

GEOMETRIAI OPTIKA

dr. Erdei Gábor, 2018-09-27

AJÁNLOTT SZAKIRODALOM:

Klein-Furtak, Optics
Richter, Bevezetés a modern optikába
Born-Wolf, Principles of optics

Geometriai optika: közelítés, amely a fényterjedést és közeghatáron való áthaladást geometriai alakzatok – görbék segítségével írja le. Ezen görbéket fénysugaraknak nevezzük.

ÁLTALUNK ALKALMAZOTT KÖZELÍTÉSEK

- irányfüggés** – csak **izotrop** közegeket tekintünk, pl. üveget
(ekkor az 1. és 2. sugárdefiníció ugyanazt adja, azaz a fénysugár $\parallel \mathbf{k} \parallel \mathbf{S}$, ld. alább)
- helyfüggés** – **homogén** és **inhomogén** közegeket tekintünk
(a fénysugarak görbék is lehetnek nem csak egyenesek)
- térrő függés** – csak **lineáris** közegeket tekintünk
(a fénysugarak kölcsönhatás nélkül keresztezhetik egymást; a tér minden pontjában azonos ω a gerjesztés körfrekvenciájával)
- hullámhosszfüggés** – **monokromatikus** eset
(csak egy hullámhossz van a spektrumban, időben koherens eset)
polikromatikus eset (időben inkoherens fény – hullámhossz-komponensekre bontható)
- térbeli koherencia** – **térben koherens** eset, pl. pontforrás, síkhullám
(van hullámfront – csillagfény, lézer) vagy
térben inkoherens eset (diffúz fény – pontforrásokra bontható)

ELMÉLETI ALAPOK

Maxwell egyenletek \rightarrow vektoriális hullámegyenlet:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad ; \quad n^2 = \epsilon_r \mu_r \quad (\text{Maxwell reláció}) \quad (1)$$

Ha monokromatikus, ω körfrekvenciájú hullámot vizsgálunk, a megoldás általános alakja lineáris közegekben:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot e^{-i\omega t}. \quad (2)$$

Mivel a gerjesztés időben harmonikus, a komplex formalizmust használjuk az EM tér leírására (tehát \mathbf{E} komplex, csak elhagytuk a hullámvonalat). Figyeljünk arra, hogy innentől fogva az egyszerűség kedvéért a fordított fázisterjesztés módszerét használjuk, azaz a fázis siet a terjedés irányában, és késik az idő függvényében ($\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}^*$). Ezzel a próbafüggvénnyel az egyenlet az időfüggetlen, ún. Helmholtz-egyenlet alakot ölti:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -k^2 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Megoldások speciális esetekben:

$$\text{Síkhullám: } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0)} \quad (4)$$

$$\text{Gömbhullám: } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}) \cdot e^{i(k \cdot r + \varphi_0)} / r, \quad (5)$$

ahol $k \equiv 2\pi/\lambda$, $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ pedig irányfüggő egységvektor jelöl. A Helmholtz-egyenlet megoldása általános esetben:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cdot e^{i k_0 \cdot S(\mathbf{r})}. \quad (6)$$

Eikonál (εικών = kép görögül): a tér pontjait az elektromágneses hullám fázisviszonyai szerint jellemző skalár mennyiség, jelölése: $S(\mathbf{r})$. A tér \mathbf{r}_1 és \mathbf{r}_2 helyvektorral jellemzett pontjai között mérhető fáziskülönbség ($\Delta\varphi$) az eikonállal kifejezve:

$$\Delta\varphi = k_0 \cdot S(\mathbf{r}_2) - k_0 \cdot S(\mathbf{r}_1). \quad (7)$$

Lassan változó amplitúdójú közelítés

Ahhoz, hogy (6)-nak megfelelően beszélhessünk az EM tér fázisviszonyairól, szükséges, hogy létezzen a „fázis” fogalma. Amennyiben ugyanis az \mathbf{E}_0 téramplitúdó térben gyorsabban változik, mint a hullámhossz, a fázisállapot elveszti értelmét. Az amplitúdó lassú változása kizárólag egy bizonyos feltétel teljesülése esetén valósul meg, aminek a szerepe az optikában, és általában a hullámtanban jelentős. Emiatt az alábbiakban röviden megvizsgáljuk e problémát.

A térbeli pozíció \mathbf{r}_0 helyvektor körüli kismértékű ($\Delta\mathbf{r}$) helyzetváltozás esetén a térerősség a következő alakban közelíthető:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) \approx \Delta\mathbf{E} + \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \Delta(\mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cdot e^{i k_0 S(\mathbf{r}_0)}) + \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \Delta\mathbf{E}_0 \cdot e^{i k_0 S(\mathbf{r}_0)} + \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cdot \Delta e^{i k_0 S(\mathbf{r}_0)} + \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \quad (8)$$

Az első tagot akkor hanyagolhatjuk el, ha feltételezzük, hogy a térerősség amplitúdója térben sokkal lassabban változik mint a fázis:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cdot \Delta e^{i k_0 S(\mathbf{r}_0)} + \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cdot (e^{i(k_0 \text{grad}(S(\mathbf{r}_0)) \Delta\mathbf{r} + k_0 S(\mathbf{r}_0))} - e^{i k_0 S(\mathbf{r}_0)}) + \mathbf{E}(\mathbf{r}_0). \quad (9)$$

A negatív előjelű tag pont akkora mint az utolsó konstans, tehát

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cdot e^{i k_0 S(\mathbf{r}_0)} \cdot e^{i k_0 \text{grad}(S(\mathbf{r}_0)) \Delta\mathbf{r}}, \quad (10)$$

ami nem más mint egy síkhullám egyenlete, ahol a lokális hullámszámvektor:

$$\mathbf{k}_{lok} = k_0 \cdot \text{grad}(S(\mathbf{r}_0)). \quad (11)$$

Ez az összefüggés úgy értelmezhető, hogy lassan változó amplitúdójú közelítésben az EM tér lokálisan úgy viselkedik mint egy síkhullám, a térerősség változását pedig elsősorban a fázis megváltozása vezérli és nem az amplitúdójé. Ez egyben azt is jelenti, hogy *hullámhosszról* csak és kizárólag a lassan változó amplitúdójú közelítésben van értelme beszélni. A geometriai optikai közelítés bevezetése után (11) további értelmet fog nyerni.

Most azt vizsgáljuk meg, hogy mit jelent (8)-ban a térerősségamplitúdó megváltozásának elhanyagolása. Ha \mathbf{J} a Jakobi-mátrix, akkor a megváltozás a következő alakban írható föl:

$$\Delta\mathbf{E}_0 \cdot e^{i k_0 S(\mathbf{r}_0)} \ll \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cdot \Delta e^{i k_0 S(\mathbf{r}_0)} \Rightarrow \mathbf{J} \Delta\mathbf{r} \cdot e^{i k_0 S(\mathbf{r}_0)} \ll \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) \cdot i k_0 e^{i k_0 S(\mathbf{r}_0)} \cdot \text{grad}(S) \Delta\mathbf{r} \quad (12)$$

Csak az x-vektorkomponenst kifejtve:

$$|\text{grad}(E_{0x}) \Delta\mathbf{r}| \cdot e^{i k_0 S(\mathbf{r}_0)} \ll |E_{0x}| \cdot k_0 e^{i k_0 S(\mathbf{r}_0)} \cdot |\text{grad}(S) \Delta\mathbf{r}|, \quad (13)$$

és a hibát felülről becsülve (azaz feltesszük, hogy $\Delta r \parallel \text{grad}(E_{0x})$):

$$\frac{|\text{grad}(E_{0x})|}{|E_{0x}|} \ll k_0 \cdot |\text{grad}(S)|. \quad (14)$$

Az összefüggést geometriai optikai közelítésben fogjuk tudni jól értelmezni, ld. alább.

A GEOMETRIAI OPTIKA ALAPEGYENLETE, ÉRVÉNYESSEGI FELTÉTELEK

A Helmholtz-egyenlet vektoriális, de mivel a Laplace-operátor skalár dimenziójú mennyiség, az egyenlet szétbontható független vektorkomponensekre (E_x, E_y, E_z). Csak az x -komponenst vizsgálva tehát:

$$\nabla^2 E_x(\mathbf{r}) = -k^2 \cdot E_x(\mathbf{r}). \quad (15)$$

Ebbe behelyettesítjük a próbafüggvényt:

$$\nabla^2 (E_{0x}(\mathbf{r}) \cdot e^{ik_0 S(\mathbf{r})}) = -k^2 \cdot E_{0x}(\mathbf{r}) \cdot e^{ik_0 S(\mathbf{r})}. \quad (16)$$

Itt jól látható, hogy a vektoramplitudó (E_{0x}) és az eikonál (S) helyfüggőek, tehát a továbbiakban ezt sem jelöljük. Az alábbi vektorazonossággal az egyenlet bal oldala átalakítható:

$$\nabla^2 (a \cdot b) \equiv a \cdot \nabla^2 b + 2\nabla a \cdot \nabla b + b \cdot \nabla^2 a. \quad (17)$$

Az új egyenlet így:

$$E_{0x} \cdot \nabla^2 e^{ik_0 S} + 2 \cdot \nabla E_{0x} \cdot \nabla e^{ik_0 S} + e^{ik_0 S} \cdot \nabla^2 E_{0x} = -k^2 \cdot E_{0x} \cdot e^{ik_0 S}. \quad (18)$$

Az első tagnál elvégzünk egy azonos átalakítást $\nabla^2 u \equiv \nabla \cdot \nabla \cdot u$ alapján:

$$\nabla^2 e^{ik_0 S} = \nabla(\nabla e^{ik_0 S}) = \nabla(ik_0 e^{ik_0 S} \cdot \nabla S) = -k_0^2 e^{ik_0 S} \cdot \nabla S \cdot \nabla S + \nabla^2 S \cdot ik_0 e^{ik_0 S}. \quad (19)$$

ahol felhasználtuk még $\nabla(a \cdot b) \equiv a \nabla b + b \nabla a$ -et is. A második tag egyszerűen átalakítható a láncszabály alkalmazásával:

$$\nabla e^{ik_0 S} = ik_0 e^{ik_0 S} \cdot \nabla S. \quad (20)$$

(19)-et, (20)-t visszahelyettesítve (18)-be, és a minden tagban szereplő $e^{ik_0 S}$ tényezővel egyszerűsítve a következőt kapjuk:

$$-k_0^2 \cdot E_{0x} \cdot \nabla S \cdot \nabla S + E_{0x} \cdot \nabla^2 S \cdot ik_0 + 2 \cdot \nabla E_{0x} \cdot ik_0 \cdot \nabla S + \nabla^2 E_{0x} = -k^2 \cdot E_{0x}. \quad (21)$$

Ennek az összefüggésnek van valós és képzetes része, mindkettőnek külön-külön egyenlőnek kell lennie. A valós részek egyenlősége alapján:

$$-k_0^2 \cdot E_{0x} \cdot |\nabla S|^2 + \nabla^2 E_{0x} = -k^2 \cdot E_{0x}. \quad (22)$$

Amennyiben

$$|\nabla^2 E_{0x}| \ll k^2 \cdot E_{0x} \Rightarrow \frac{|\nabla^2 E_{0x}| \cdot \lambda^2}{E_{0x}} \ll 4\pi^2. \quad (23)$$

Így (22) egyenletből kiesik a térerősség:

$$k_0^2 \cdot |\nabla S|^2 = k^2 \Rightarrow \boxed{|\nabla S|^2 = n^2}. \quad (24)$$

Ez a geometriai optika alapegyenlete, az ún. *eikonál-egyenlet*. Egyszerű alakja azt fejezi ki, hogy a geometriai optika közelítésének érvényessége esetén az EM tér fázisváltozásait nem

befolyásolja a térerősség változása, csupán a törésmutató-eloszlás. Az eikonál-egyenletből következik, hogy

$$|\text{grad}(S(\mathbf{r}))| = n(\mathbf{r}), \quad (25)$$

ahol $n(\mathbf{r})$ a lokális törésmutató. Az eikonál-egyenletet peremfeltételekkel együtt megoldva (azaz az S értékét ismerni kell egy felület mentén) megkaphatjuk az eikonál értékét a tér minden pontjában.

A (23) feltétel akkor teljesül, azaz akkor vagyunk a geometriai optika érvényességi körén belül, ha a térerősség-amplitúdó relatív megváltozása (pontosabban a második derivált) hullámhossznyi szakaszon elhanyagolható mértékű. Az állítás megfordítva talán még érthetőbb: akkor használhatjuk a geometriai optikát, ha a hullámhossz nagyon kicsi az EM tér amplitúdó-változásainak jellemző térbeli kiterjedéséhez képest (az amplitúdó nem befolyásolja a fázist). Emiatt a geometriai optikát gyakran szokás „nulla hullámhosszúságú” közelítésnek is nevezni, mely nem teljesül pl. árnyék szélén, vagy fókuszpont közelében, ahol az előbbi esetben \mathbf{E} -nek szakadása, utóbbi esetben pedig szingularitása van.

A (21) egyenlet képzetes részeinek egyenlőségéből pedig a következő összefüggést kapjuk:

$$E_{0x} \cdot \nabla^2 S + 2 \cdot \nabla E_{0x} \cdot \nabla S = 0, \quad (26)$$

ami az ún. *transport-egyenlet*. Ennek segítségével az eikonál ismeretében a térerősség pontról-pontra meghatározható. Érdeemes észrevenni, hogy ezen egyenlet felírásánál nem használtuk a geometriai optikai közelítést, csak a lassan változó amplitúdójét.

Az eikonál-egyenlet legfőbb alkalmazási területe az *inhomogén közegek* számítása. Példák:

- légköri effektusok (naplemente, délibáb)
- fénytörés gravitációs térben lévő folyadékokban
- szemlencse
- planár hullámvezető lencsék
- gradiens lencsék száloptikához, lézerdiodához, leképezéshez
- elektronoptikák

LOKÁLIS SÍKHULLÁMÚ KÖZELÍTÉS

Ha a (14) feltétel mellett teljesül a geometriai optika alapfeltétele is, azaz érvényes az eikonál-egyenlet, akkor $n = |\text{grad}(S)|$, vagyis a lokális hullámszámvektor hossza a következő:

$$k_{lok} = k_0 \cdot n(\mathbf{r}_0) \Rightarrow \lambda_{lok}(\mathbf{r}_0) = \lambda_0 / n(\mathbf{r}_0). \quad (27)$$

A (10), (11) összefüggések fontossága itt érthető meg: azt mutatják, hogy geometriai optikai közelítésben a fény a hullámfrontnormális irányába terjed, fázisváltozását pedig kizárólag a törésmutató-eloszlás határozza meg. (Diffrakciós jelenségeknél ez nem feltétlenül van így: a fázis értékét a tér egy adott pontjában a térerősség is befolyásolhatja.) Mivel ekkor a hullámhossz éppen megegyezik az adott törésmutatójú közegben terjedő, szintén ω körfrekvenciájú *síkhullám hullámhosszával*, ezért szokták a geometriai optikát lokális síkhullámú közelítésnek is hívni, bár ez némileg félrevezető lehet, hiszen a hullámfrontok itt is lehetnek görbült felületek, feltéve, hogy a görbületi sugár sokkal nagyobb a hullámhossznál.

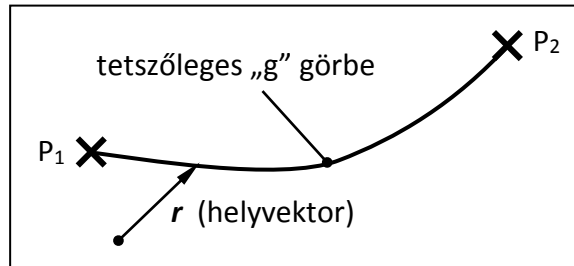
A lassan változó amplitúdójú közelítés feltétele is geometriai optikai közelítésben értelmezhető kényelmesen. Az eikonál-egyenlet értelmében, némi átrendezés után (14)-ből a következőt kapjuk:

$$\frac{|\text{grad}(E_{0x})| \cdot \lambda}{|E_{0x}|} \ll 2\pi. \quad (28)$$

A fenti kifejezés vagy úgy értelmezhető, hogy hullámhossznyi szakaszon a relatív térerősségamplitúdó-változásnak elhanyagolható mértékűnek kell lennie, vagy pedig úgy, hogy a hullámhossznak kell sokkal kisebbnek lennie mint a térerősségváltozás jellemző térbeli kiterjedése (nulla hullámhosszúságú közelítés).

FÁZISVISZONYOK LEÍRÁSA A GEOMETRIAI OPTIKÁBAN

Hullámfront: $S(\mathbf{r}) = \text{állandó}$ (fázisfront, konstans fázisú felület) ; $\mathbf{k} = k_0 \cdot \nabla S$



(7) alapján, geometriai optikai közelítésben, a következő integrálással kaphatjuk meg az elektromágneses tér $\Delta\varphi$ fáziskésését a tér két pontja között (ld. a fenti ábra):

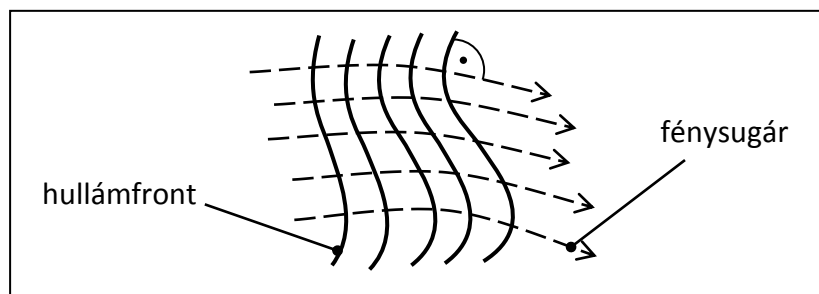
$$\Delta\varphi(P_1, P_2) = k_0 \cdot (S(P_2) - S(P_1)) = \int_g k_0 \cdot \text{grad}(S(\mathbf{r})) \cdot d\mathbf{r}, \quad (29)$$

ahol „g” tetszőleges görbe. Amennyiben a fény eljut P₁-ből P₂-be, értelemeszerűen kell léteznie legalább egy olyan g' görbének, amelyre teljesül az, hogy érintője minden pontban $\text{grad}(S(\mathbf{r}))$ irányába mutat. Erre a görbére a fáziskésés:

$$\Delta\varphi(P_1, P_2) = k_0 \cdot \int_{g'} |\text{grad}(S(\mathbf{r}))| \cdot d\mathbf{r} = k_0 \cdot \int_{g'} \mathbf{n}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = k_0 \cdot OPL(P_1, P_2), \quad (30)$$

ahol felhasználtuk (25)-t, és *OPL* (Optical Path Length) az *optikai úthossz* P₁ és P₂ között. A fenti egyenletet (29)-el összevetve: $\Delta S = OPL$, g' mentén történő integrálás esetén! A g' speciális görbe további tulajdonsága, hogy minden pontban merőleges a hullámfrontra, mivel érintője $\text{grad}(S)$ irányú, amely vektor pedig definíció szerint merőleges az $S = \text{áll.}$ felületekre, azaz a hullámfrontokra. A fent definiált g' görbéket *fénysugaraknak* nevezzük. Az eikonál-egyenlet érzéketlen a $\text{grad}(S)$ előjelére (azaz a fénysugár irányára), ami megfelel annak az állításnak, hogy a fénysugarak megfordíthatók.

Fénysugár definíció I.: a fénysugár olyan görbe, amely minden pontban merőleges a hullámfrontokra, illetve érintője $\text{grad}(S)$ irányába mutat. Mivel a a hullámszámvektor (\mathbf{k}) definíció szerint merőleges a hullámfrontokra, a fénysugár érintője \mathbf{k} irányába mutat. Ha az optikai úthosszat fénysugár mentén mérjük $\Delta S = OPL$.



ENERGETIKAI VISZONYOK LEÍRÁSA A GEOMETRIAI OPTIKÁBAN

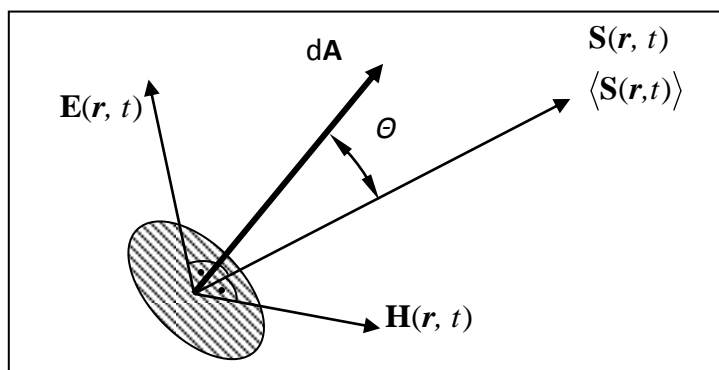
Poynting – vektor: $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ (teljesítmény-sűrűség vektor, $\mathbf{E} = \text{Re}\{\tilde{\mathbf{E}}\}$!)

A teljesítmény-sűrűség vektor időátlaga monokromatikus tér esetében dielektrikumban:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_0^*(\mathbf{r})}{2} = \frac{\mathbf{k}}{\mu\omega} \frac{\mathbf{E}_0(\mathbf{r})^2}{2} = \frac{k}{\mu\omega} \frac{|\mathbf{E}_0(\mathbf{r})|^2}{2} \cdot \frac{\nabla S}{n}. \quad (31)$$

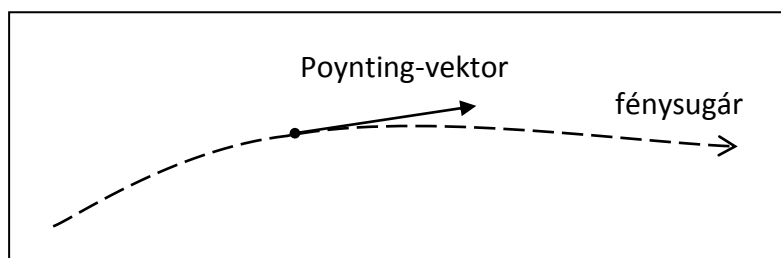
E vektor hosszát nevezzük „ I ” *intenzitásnak*. Egy infinitezimális dA felületen áthaladó teljesítmény az intenzitás segítségével a következő képpen írható fel:

$$dP(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle \cdot d\mathbf{A} = I(\mathbf{r}) \cdot dA \cdot \cos(\Theta) \quad (32)$$



Ha a Maxwell-egyenletekbe beírjuk (6) próbafüggvényt, akkor könnyen igazolható, hogy a geometriai optika érvényességi feltételének fennállása esetén izotróp közegben a Poynting-vektor és az eikonál gradiense egy irányba mutat (ld. pl. Richter, Bevezetés a modern optikába, I. kötet, 2.3.1 fejezet).

Fénysugár definíció II.: olyan görbe, amelynek érintője minden pontban a teljesítmény-sűrűség vektor irányába mutat. Az I. és II. definíció *izotróp* közegben egyenértékű.



Fénynyaláb: fénysugarak által határolt csőszerű tartomány, amelyből az energia nem képes kilépni (a geometriai közelítés érvényességi körén belül).

Intenzitástörvény:

A (26) transzport-egyenlet egyszerű azonos átalakításokkal a következő formára hozható (ld. Hartmann Römer: Theoretical Optics 7.3 fejezet):

$$\nabla(E_{0x}^2 \cdot \nabla S) = 0, \quad (33)$$

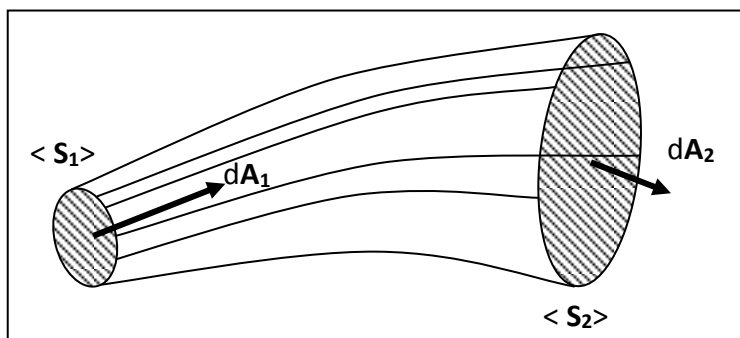
amelyből pl. az látszik, hogy homogén közegben terjedő síkhullám esetén ($\nabla S = \text{const.}$) a térerősség-amplitudó térben nem változik. A zárójelben szereplő tag arányos az x -térerősségkomponens Poynting-vektorának időátlagával, azaz az intenzitással, ld. (31). Mindhárom térerősségkomponensre fölírva és összegezve a következőt kapjuk:

$$\nabla \langle \mathbf{S} \rangle = 0 \Leftrightarrow \oint \langle \mathbf{S} \rangle d\mathbf{A} = 0. \quad (34)$$

Mivel a fénysugarak párhuzamosak a Poynting-vektorral, a (34) egyenlet ekvivalens az energiamegmaradás törvényéből is következő összefüggéssel, az infinitezimálisan keskeny fénynyalábokra érvényes ún. intenzitástörvénnyel:

$$\langle \mathbf{S}_1 \rangle \cdot d\mathbf{A}_1 = \langle \mathbf{S}_2 \rangle \cdot d\mathbf{A}_2, \quad (35)$$

mely olyan (ún. „reguláris”) tértartományban igaz, ahol a fénysugarak nem kereszteződnek.



A FÉNYSUGARAK EGYENLETE ÍVHOSSZ SZERINTI PARAMÉTEREZÉSÉBEN

A fénysugarakat az eikonállal definiáltuk, ezért egyenletüket az eikonál-egyenletből vezetjük le. Fénysugár = térgörbe, jelöljük g -vel. A g megadása, p paraméter függvényében:

$$g: \mathbf{r} = \mathbf{r}(p) \quad (36)$$

alakú, amit a görbe paraméterezésének nevezünk. A fenti egyenletben \mathbf{r} a fénysugár pályáját letapogató helyvektor. Mivel a fénysugár párhuzamos $\text{grad } S$ -el, valamint $\text{grad} S(\mathbf{r}) \perp S(\mathbf{r}) = \text{const.}$ (hullámfront) és $d\mathbf{r}(p)/dp \parallel g$ görbe érintője (fénysugár), felírható, hogy:

$$\frac{d\mathbf{r}(p)}{dp} \sim \text{grad } S(\mathbf{r}). \quad (37)$$

g -nek végtelen sok paraméterezése létezik, mert ha $\mathbf{r}(p)$ paraméterezés, akkor $\mathbf{r}(p(q))$ is az, feltéve, hogy $p(q)$ szig. mon., folytonos és a deriváltja is az. Emiatt a sugarak egyenlete tartalmaz egy határozatlan függvényt. Egy görbe két paraméterezésének a deriváltja között a következő összefüggés áll fenn:

$$\frac{d\mathbf{r}(p)}{dp} = \frac{d\mathbf{r}(q)}{dq} \cdot \frac{dq}{dp}, \quad (38)$$

ha $q(p)$ jelenti a kapcsolatot a két függvény között. Mivel dq/dp skalár mennyiség, a fenti kifejezés azt jelenti, hogy egy görbe különböző paraméterek szerinti deriváltvektorai mind ugyanabba az irányba mutatnak (a görbe érintője), csak a nagyságuk eltérő. Ezek szerint bizonyosan létezik egy olyan $\mathbf{r}(q)$ paraméterezés, amire igaz, hogy

$$\frac{d\mathbf{r}(q)}{dq} = \text{grad } S(\mathbf{r}). \quad (39)$$

A (38) összefüggést felhasználva, egy tetszőleges $\mathbf{r}(q(p))$ paraméterezésre ez a következőképpen néz ki:

$$\frac{d\mathbf{r}(p)}{dp} = \frac{dq}{dp} \cdot \text{grad } S(\mathbf{r}) = f(p) \cdot \text{grad } S(\mathbf{r}), \quad (40)$$

ahol $f(p)$ egy tetszőleges függvény, amely az $\mathbf{r}(p)$ görbe alakját nem befolyásolja, csak a paraméterezését. Amennyiben az $f(p) = 1/n(\mathbf{r})$ függvényt választjuk (40)-ből a következő lesz:

$$\frac{d\mathbf{r}(p)}{dp} = \frac{\text{grad } S(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})}. \quad (41)$$

Az eikonál-egyenlet miatt ez egy egységvektor, és matematikából tudjuk, hogy egy görbe ívhossz szerinti deriváltja az az érintő irányú egységvektor. Vagyis ekkor $p = s$, ami a fénysugár mentén mért ívhossz. Ezt beírva az egyenletbe, és még egyszer ívhossz szerint deriválva a következőt kapjuk:

$$\frac{d}{ds} \left(n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \nabla S. \quad (42)$$

Az egyenlet jobb oldala a következőképp írható:

$$\frac{d}{ds} \nabla S = \nabla \cdot \nabla S \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (43)$$

$dr(s)/ds$ helyére beírva (41) egyenletet, a fenti kifejezés a következően alakul:

$$\nabla \cdot \nabla S \cdot \frac{\nabla S}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \nabla \cdot [\nabla S]^2. \quad \left(\text{Id. } \frac{df^2}{dx} = 2f \cdot \frac{df}{dx} \right) \quad (44)$$

Az eikonál egyenlet felhasználásával a kifejezés tovább egyszerűsödik:

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \nabla(n^2) = \nabla n = \text{grad } n \quad (45)$$

Ezt egyenlővé téve (42) baloldalával megkapjuk a sugarak ívhossz-szerinti paraméterezésben felírt differenciálegyenletét:

$$\boxed{\frac{d}{ds} \left(n \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \text{grad } n}, \quad (46)$$

ahol $\mathbf{r}(s)$ a megoldásgörbe paraméterezése. Példa – homogén közegek esete ($n = \text{const.}$). Ekkor a sugarak differenciálegyenlete a következő alakra egyszerűsödik

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0, \quad (47)$$

aminek a megoldását kétszeres integrálás után megkapjuk:

$$\mathbf{r} = s \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad (48)$$

ahol \mathbf{a} és \mathbf{b} tetszőleges (a peremfeltételek által meghatározott) konstans vektorok. Ez azt jelenti, hogy homogén közegben a fénysugár egyenes vonal, amely áthalad a \mathbf{b} -vel megjelölt ponton, és \mathbf{a} irányba mutat.

FÉNYTÖRÉS KÖZEGHATÁRON

Igazolható (ld. pl. Richter: Bevezetés a modern optikába), hogy közeghatárhoz érve a geometriai optikai közelítésben a fénysugarakra érvényes a Snellius-Descartes törvény. Mivel a törési törvény általános érvényessége síkhullámokra levezethető (ld. korábban), szokás a geometriai optikát lokális síkhullámú közelítésnek is nevezni.

A GEOMETRIAI OPTIKA ALKALMAZÁSI TERÜLETEI

- képképző rendszerek (mi ezzel foglalkozunk)
- megvilágító rendszerek

Képképző / megvilágító rendszerek geometriai modellezésénél a tárgyat / fényforrást térben koherens források (pontforrások) összegére bontjuk.

GEOMETRIAI OPTIKAI KÖZELÍTÉSEK A KÉPKÉPZÉSBEN

- elsőrendű (paraxiális) közelítés → nagyítás, tárgy-kép helyzet, fényerő, max. felbontás
- harmadrendű közelítés (aberráció elmélet) → képképzési hibák analízise
- valós sugárátvezetés (törés, terjedés ismételtetése) → képképzési hibák, optimalizáció

IDEÁLIS KÉPKÉPZÉS – egyszerűsített definíció

- pontot pontba képez le, azaz a képpont és a tárgypont „konjugáltjai” egymásnak
- a képképző rendszer forgásszimmetrikus
- optikai tengelyre merőleges síkban lévő alakzatok hasonló alakzatokba képződnek le (azaz torzításmentesen)

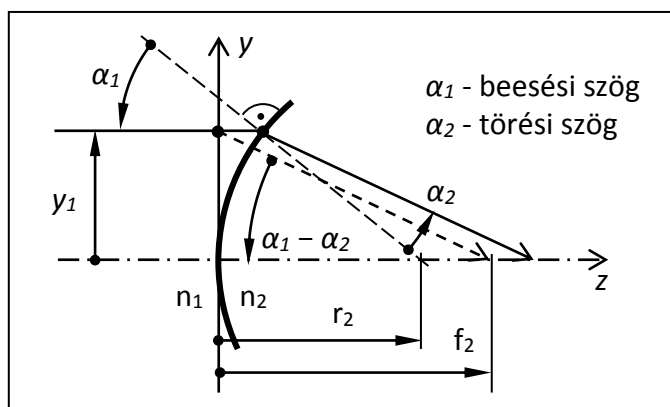
ELSŐRENDEŰ (PARAXIÁLIS) KÖZELÍTÉS (GAUSS-OPTIKA)

A paraxiális közelítés feltételei:

$$\alpha \approx \sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \quad [\alpha] = \text{rad} ; \text{ (ezért „elsőrendű” a közelítés)}$$

$$y \ll r \quad \text{előjeles mennyiségek!}$$

Azaz fénysugarak az optikai tengely közelében, vele kis szöget bezárva haladnak, és a felületek *síkkal közelíthetőek*. Ezekből következik: gömbhullám ~ paraboloid felület.



Fókusz távolság meghatározása egyetlen törőfelület esetén:

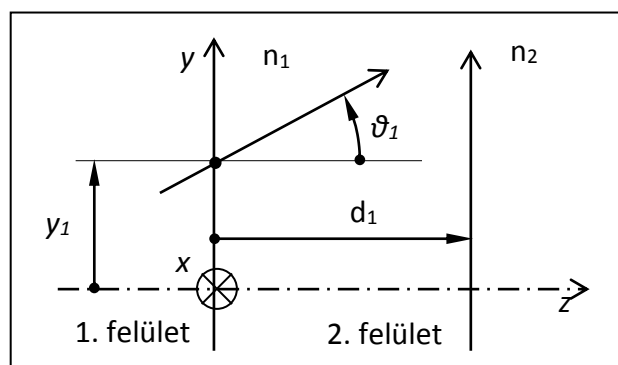
$$\left. \begin{array}{l} n_1 \cdot \alpha_1 = n_2 \cdot \alpha_2 \quad (\text{fénytörés}) \\ \alpha_1 \cdot r_2 = y_1 \quad (\text{felületnormális}) \\ f_2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) = y_1 \quad (\text{ideális leképezés}) \end{array} \right\} \Rightarrow f_2 = r_2 \cdot \frac{n_2}{n_2 - n_1} \quad [\alpha] = \text{rad} ! \quad (49)$$

$$\text{Tükör tárgyalása formálisan: } n_2 = -n_1. \quad \text{Törőerő: } P \equiv \frac{n_2}{f_2} \quad [\text{dioptria} = \text{m}^{-1}] \quad (50)$$

Két, közvetlenül egymás mögé helyezett (1. és 2. sz.) felület esetén:

$$P_{\text{eredő}} = P_1 + P_2 \quad (51)$$

Paraxiális közelítésben a fénytörés ill. szabadtéri terjedés az X-Z és Y-Z síkokban egymástól függetlenül számolható! Ez a közelítés teljesíti az ideális leképezés feltételeit! (A levezetést ld. Richter, Bevezetés a modern optikába, I. kötet, 2.3.4 fejezet.)



A paraxiális közelítés alapkérdése az, hogy ha egy adott 1. síkon adott a fénysugár pozíciója és iránya ($y_1 ; \vartheta_1$), akkor egy további 2. síkon mekkora ($y_2 ; \vartheta_2$). Mivel a közelítés lineáris, a válasz mátrixos formában fogalmazható meg. Az X-Z / Y-Z függetlenség miatt csak az Y-Z irányban felírva:

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ n_2 \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ n_1 \vartheta_1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

A fénysugár irányát leíró $n \cdot \vartheta$ mennyiséget *optikai iránykoszinusznak* nevezzük. Forgásszimmetrikus rendszerben az X-Z irányban felírt egyenletrendszernek is ugyanez az ABCD mátrixa a vizsgált 1.-2. síkok között. Pl. fénytörés ABCD mátrixa (ha a két sík egy törőfelületnél éppen egybeesik):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (53)$$

ahol P_1 a felület törőereje (értelmezést ld. fentebb). Szabadtéri terjedés ABCD mátrixa:

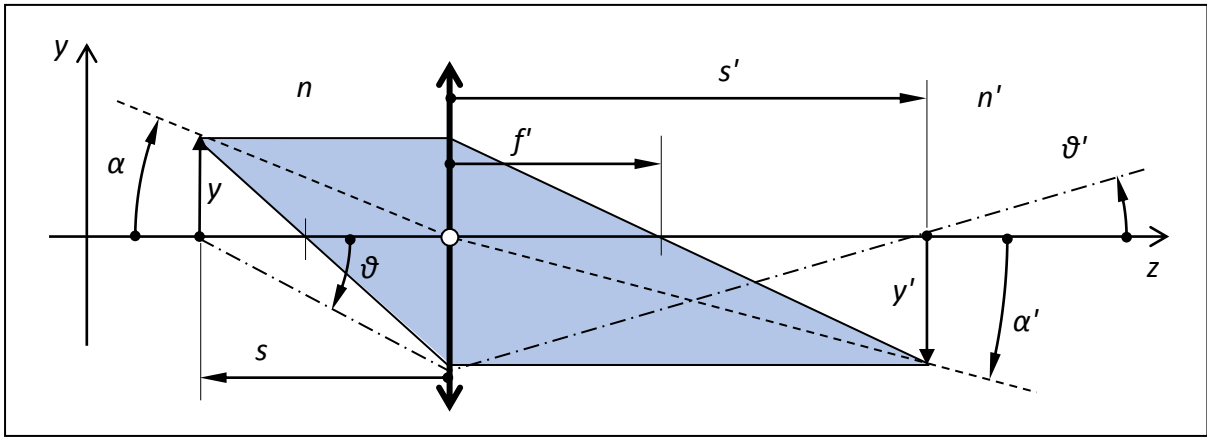
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & d_1/n_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

ahol d_2 az 1. és 2. sík távolsága, n_1 a közöttük mért törésmutató. Egy N felületből álló összetett rendszer \mathbf{M} mátrixát értelemszerűen a fenti elemi mátrixok szorzata adja:

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}_N \cdot \mathbf{R}_N \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{T}_1. \quad (55)$$

VÉKONYLENCSÉK JELLEMZŐI

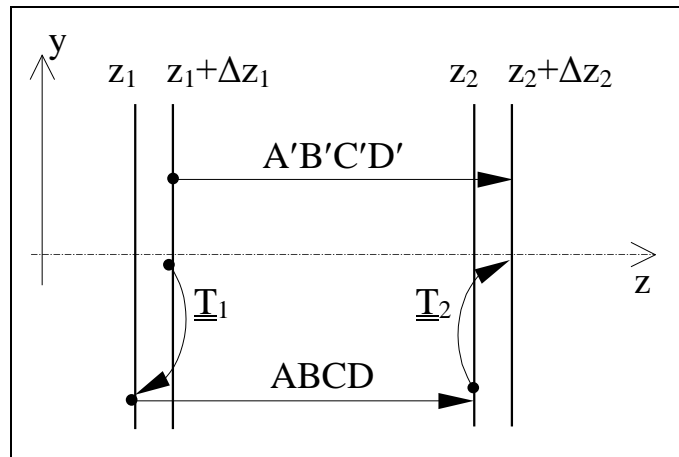
- s, s' – tárgy-, képtávolság
- y, y' – tárgy-, képmagasság
- α, α' – tárgyszög, képszög (törési törvényből: $n \cdot \alpha = n' \cdot \alpha'$)
- m – transzverzális nagyítás ($m \equiv y'/y$)
- m_L – longitudinális nagyítás ($m_L \equiv \partial s'/\partial s$)
- m_α – szögnagyítás ($m_\alpha = \vartheta'/\vartheta$)
- f' – képoldali fókusztávolság ($f' = s'$, ha $s = -\infty$)
- NA – tárgyoldali numerikus apertúra ($NA \equiv n \cdot \sin \vartheta$) – ez nem paraxiális mennyiség



A távolságok és szögek előjeles mennyiségek! Tehát $s' > 0$, de $s < 0$, és $\vartheta' > 0$ de $\vartheta < 0$.

IDEÁLIS LEKÉPEZÉS ÖSSZETETT RENDSZERREL

Tétel: paraxiális közelítésben minden forgásszimmetrikus optikai rendszer ideálisan képezi le egy homogén tárgytér minden pontját egy homogén képtérbe, ha létezik legalább egy olyan sugár, amelyik mind a tárgytérben mind a képtérben metszi az optikai tengelyt. (A nem túl bonyolult levezetés megtalálható pl. a Richter: Bevezetés a modern optikába c. könyvben.) Legyen egy optikai rendszernél a z_1 és z_2 síkpár az, ahol e metszés bekövetkezik, és jellemezzük e két sík közötti fényterjedést az $ABCD$ mátrixszal.



Magyarázat $A'B'C'D'$ felírásához.

(52) alapján a fénysugarak helykoordináta-transzformációja a következő egyenlettel írható le:

$$\begin{aligned} y_2 &= A \cdot y_1 + B \cdot (n_1 \vartheta_1) \\ n_2 \vartheta_2 &= C \cdot y_1 + D \cdot (n_1 \vartheta_1) \end{aligned} \quad (56)$$

Leképezés esetén az y_2 helykoordináta mindig független a fénysugár indulási irányától, ami csak akkor lehet igaz, ha $B = 0$. (Leképezés esetén B értéke mindig zérus.)

Amennyiben két síkpár között leképezés áll fenn, tehát a közöttük felírható mátrixban $B = 0$, igen könnyen belátható, hogy:

$$\begin{aligned} A &= m \\ D &= m_\alpha \cdot \frac{n_2}{n_1} \end{aligned} \quad (57)$$

A z_1 - z_2 síkpárt *referenciasíkoknak* tekintve most azt vizsgáljuk meg, hogy egy tetszőleges másik $z_1 + \Delta z_1$ helyzetű tárgysíkhhoz létezik-e képsík. Ezen feltételezett képsík helye legyen

$z_2 + \Delta z_2$. Mivel a $(z_1; z_2)$ síkokhoz tartozó $ABCD$ mátrixot tekintjük adotttnak, ezzel fejezzük ki az eltolt síkpárhoz tartozó $A'B'C'D'$ mátrixot:

$$A'B'C'D' = \mathbf{T}_2 \cdot ABCD \cdot \mathbf{T}_1. \quad (58)$$

A szabadtéri terjedés mátrixának (54) általános alakja alapján:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta z_1}{n_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\Delta z_2}{n_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (59)$$

Vagyis $A'B'C'D'$ -re a következőt kapjuk:

$$\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + \frac{\Delta z_2}{n_2} C & \frac{\Delta z_2}{A \cdot n_2} - \left(A + \frac{\Delta z_2}{n_2} C \right) \frac{\Delta z_1}{n_1} \\ C & D - \frac{\Delta z_1}{n_1} C \end{bmatrix}. \quad (60)$$

Mivel a fenti összefüggés alapján $C' = C$, értéke tárgy és képsík helyzet-független, tehát C a vizsgált optikai rendszer egy jellemző paramétere, melynek jelentősége a következő alfejezetben nyer értelmet. Ha a Δz_1 és Δz_2 -vel eltolt síkok között is leképezés áll fön, akkor $B' = 0$, amiből:

$$\frac{n_2}{\Delta z_2} - \frac{1}{A^2} \frac{n_1}{\Delta z_1} = -\frac{C}{A}. \quad (61)$$

Ez a lencsetörvény általános alakja, tetszőleges leképezést leíró referenciasíkokhoz képest.

ÖSSZETETT LENCSERENDSZEREK TÁRGYALÁSA FŐSÍKOK SEGÍTSÉGÉVEL

Fősíkok: az a tárgy-képsík pár, amelyre igaz: $m \equiv +1$. Ilyen minden optikai rendszernél meghatározható. A fősíkok helyzete *egyértelmű*.

Ha referenciasíknak a fősíkokat választottuk, (61) az alábbi egyszerű alakot ölti:

$$\frac{n_2}{\Delta z_2} - \frac{n_1}{\Delta z_1} = -C. \quad (62)$$

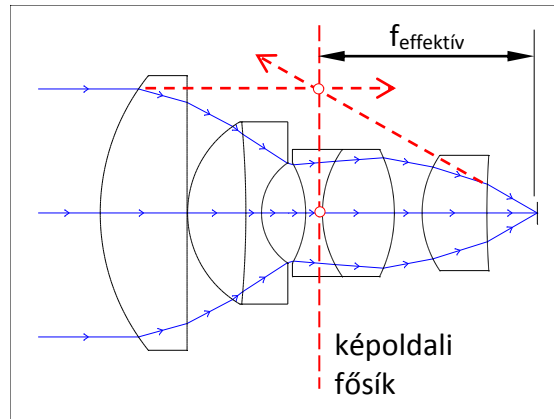
Tartson Δz_1 a végtelenhez. Ekkor Δz_2 definíció szerint a képoldali fókuszpont helyzetét adja:

$$f' \equiv \Delta z_2; \quad C = -\frac{n'}{\Delta z_2} = -\frac{n'}{f'}; \quad P \equiv \frac{n'}{f'}, \quad (63)$$

ahol bevezettük a törőerő fogalmát (P), valamint a tárgy és képoldali törésmutatókat: $n = n_1$ és $n' = n_2$. Az f' képoldali fősíktól mért távolságot *effektív fókusztávolságnak* nevezzük. Ezekkel megkapjuk a lencsetörvény jól ismert, Gauss-féle alakját ($s = \Delta z_1$ és $s' = \Delta z_2$):

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'}{f'} \Rightarrow \frac{n'}{s'} = \frac{n'}{f'} + \frac{n}{s}. \quad (64)$$

Ha tehát a fősíkoktól mérjük a tárgy és képtávolságot, illetve a fókusztávolságot (effektív fókusztávolság), akkor tetszőleges lencserendszer esetén érvényes a lencsetörvény!



A fókuszok helyzetének grafikus meghatározása

Alapvető paraxiális törvényszerűségek:

$$m_L = \frac{n'}{n} \cdot m^2$$

$$m_\alpha \cdot m = \frac{n}{n'} \quad (\text{Lagrange - Helmholtz - egyenlet}) \quad (65)$$

$$\frac{n}{f} = -\frac{n'}{f'}$$

Speciális lencserendszerek: **teleobjektív**, $f_{\text{effektív}} >$ szerkezeti hossz (ld. fényképezőgép)
inverz teleobjektív, hátsó fókusztávolság $> f_{\text{effektív}}$ (ld. projektor)