MECHANIKA 2	A) HF 03.

A 05.) feladat

Adott egy „m” tömegpont, amelyik az „x” tengely mentén mozog. A tömegpontot az origóhoz egy „D” erősségű rugó köti. A rugó nyugalmi hossza nulla.

a.) Írja fel a rendszer relativisztikus „L_R” Lagrange függvényét!
b.) Az L_R ismeretében határozza meg a „p” általános impulzust!
c.) Az eddigiek malapján határozza meg rendszer „H_R” relativisztikus Hamilton függvényét!
d.) Irja fel az „E” energia megmaradásának a tételét úgy, hogy a kifejezésben az „x” hely és az „$\dot{x}$” sebesség adatok szerepeljenek.
e.) A d.)-ben kapott eredmény alapján határozza meg az „$\dot{x}(x)$” függvényt!
f.) Határozza meg a rezgés „A” amplitudójának és az „E” energiának a kapcsolatát!
g.) Írja fel a „T” periódusidőt meghatározó $\int(...)dx$ integrált! (Az integrált kiszámítania nem kell.)
h.) **EXTRA gyakorlásra**: A H_R ismeretében írja fel a kanonikus egyenleteket. Ezek alapján adja meg az x(t) meghatározására alkalmas mozgásegyenletet!

A 06.) feladat

Adott egy „–z” irányú, homogén „B” mágneses tér. Ebben a mágneses térben, az „x-y” síkban egy „Q” pontöltés mozoghat. Az „m” tömegű töltés sebessége sokkal kisebb, mint a „c”. Mindvégig síkbeli (r,φ) polár koordinátákkal dolgozunk!

a.) Mutassa meg, hogy a „$\vec{B} = -B \cdot \vec{e}_z$” mágneses vektormezőt előállítja.az $\vec{A} = -\frac{B}{2} r \cdot \vec{e}_\varphi$ vektorpotenciál.!
b.) Irja fel a rendszer „L” (nem relativisztikus) Lagrange függvényét, ha általános koordinátáknak az (r,φ) polár koordinátákat választottuk!
c.) Határozza meg a Lagrange2 mozgásegyenleket!
d.) Mutassa meg, hogy a mozgásegyenleteknek van olyan megoldása ami egy „r=R” állandó sugarú körpályán egyenletesen haladó töltést ad meg!
e.) Határozza meg a körmözgás körfrekvenciáját!
f.) **EXTRA gyakorlásra**:
Az „L” Lagrannge függvény ismeretében határozza meg az (r,φ) koordinátákhoz tartozó általános impulzusokat!
Határozza meg a rendszer „H” Hamilton fügvényét!
Határozza meg a kanonikus egyeleteket!

MECHANIKA 2	B) HF 03.

B 07.) feladat

Egy kezdetben, az üzemanyaggal együtt M_0 nyugalmi tömegű, a megfigyelőhöz képest álló rakéta gyorsítani kezd. Az üzemanyag égésterméke a rakétához képest relativisztikusan nagy w sebességgel áramlik ki a fúvókán. Írja le a rakéta mozgását!

a.) Tekintse azt a pillanatot, amikor a rakéta tömöge $M_0 - \tilde{m}$. Írja fel a rakéta négyes-impulzusát a vele együttmozgó vonatkoztatási rendszerben!

b.) Ebben a pillanatban kicsiny dm nyugalmi tömegű égéstermék távozott a rakétából. Írja fel a kilövelt égéstermék, és a rakéta négyes-impulzusát a folyamat után. A kicsiny mennyiségekben csak lineáris rendig számoljon!

c.) Írja fel a négyes-impulzus megmaradást a rakétával pillanatnyilag együttmozgó inerciarendszerben! Ez alapján határozza meg a rakéta tömegének $d\tilde{m}$ csökkenését, ill. a rakéta dv_0 sebességét a folyamat után!

d.) A dm és $d\tilde{m}$ mennyiségek közötti egyszerű összefüggés integrálásával határozza meg a rakéta nyugalmi tömegének teljes $\tilde{m}$ csökkenését, amikorra összesen m tömegű égéstermék távozott. Mivel magyarázza, hogy a két mennyiség nem egyenlő?

e.) Most térjünk át abba a koordinátarendszerbe, ahol a rakéta kezdetben állt. A relativisztikus sebességösszeadási formula segítségével adjuk meg a rakéta sebességének dv megváltozását ebben a rendszerben!

f.) Az e.) feladat alapján egy differenciálegyenletet kaptunk, melyből a $v(\tilde{m})$ függvény meghatározható. Oldja meg a differenciálegyenletet!

g.) A korábban bevezetett rapiditás paraméter ($\tanh(\theta) = v/c$) segítségével az e.) és f.) feladat megoldása leegyszerűsíthető. Ehhez a c.) feladatban a rakéta folyamat utáni dv_0 sebességét számítsa át $d\theta$ rapiditásra!

h.) Tudjuk, hogy a rapiditások egyszerűen összeadhatók, ezért a g.) feladatban kapott kifejezés egy differenciálegyenlet a $\theta(\tilde{m})$ függvényre. Oldja meg a differenciálegyenletet!

i.) Vesse össze az f.) és h.) feladat eredményeit. Ha jól számolt, ugyanazt kellett kapnia.

B 08.) feladat

Egy q töltésű m nyugalmi tömegű részecske egymással párhuzamos, homogén E térerősségű elektromos és B indukciójú mágneses térben mozog. *(A sugárzási veszteségektől eltekinthet.)* Válasszuk a koordinátarendszerünket úgy, hogy a két térerősség közös iránya legyen a z tengely! A $t=0$ időpontot úgy választjuk meg, hogy a részecske impulzusának z komponense éppen zérus ekkor, $p_z(0) = 0$.

A részecske azonban az x-y irányban mozoghatott, a $t=0$ időpontban az energiáját jelöljük ε_0-lal.

a.) Adja meg a hármas impulzus $\dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{p}_z$ időderiváltjait, azaz írja fel a mozgásegyenletet!

b.) Az impulzus z-komponenseére vonatkozó egyenletet azonnal meg lehet oldani. Adja meg a $p_z(t)$ függvényt!

c.) Tudjuk, hogy egy részecske négyes-impulzusának Minkowski-hossznégyzete
$p_\mu p^\mu = m^2c^2$.
Képezze az egyenlet időderiváltját!

d.) Használja fel, hogy a négyes-impulzus komponensei $p^\mu = (\varepsilon / c, \gamma m\vec{v})$, ahol $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, és $\varepsilon = \gamma mc^2$. Ennek segítségével, az a.), b.) és c.) feladat eredményeit felhasználva fejezze ki a részecske $\varepsilon(t)$ energiáját az idő függvényében!

e.) A négyes-impulzus kifejezéséből tudjuk, hogy $\vec{v} = \frac{c^2}{\varepsilon}\vec{p}$. Ezt felhasználva írja át az impulzus *x* és *y* komponensére vonatkozó mozgásegyenleteket az alábbi alakba:

$$\begin{aligned}\dot{p}_x &= +A(\varepsilon)\,p_y\\ \dot{p}_y &= -A(\varepsilon)\,p_x\end{aligned} \quad !$$

Adja meg $A(\varepsilon)$ kifejezést!

f.) Keressük az egyenlet megoldását $p_x = p_0\cos(\varphi)$ és $p_y = p_0\sin(\varphi)$ alakban, ahol p_0 a kezdeti feltételektől függő konstans, $\varphi(t)$ pedig egy időtől függő paraméter! Az e.)-ben szereplő mozgásegyenletbe behelyettesítve adja meg a $\dot{\varphi}$ -ra vonatkozó mozgásegyenletet! Oldja meg az egyenletet!

g.) Most már a kezünkben vannak a $\varepsilon(t)$ és $\vec{p}(t)$ kifejezések. A négyesimpulzus négyes-hosszának ismeretében adja meg p_0 és ε_0 kapcsolatát!

h.) EXTRA! A $v_z(t) = \frac{c^2}{\varepsilon(t)}p_z(t)$ egyenlet integrálásával fejezze ki a részecske *z(t)* koordinátáját az idő függvényében!

i.) EXTRA! Az eredeti a.)-ban felírt mozgásegyenlet egyszerű lineáris összefüggést teremt $\dot{p}_x, \dot{p}_y$ és v_x, v_y között. Mivel előbbiekre megoldottuk a mozgásegyenletet, így könnyen leolvashatja az *x(t)* és *y(t)* időfüggéseket is.

j.) EXTRA! Milyen pályán mozog a részecske?

B 09.) feladat

Egy *q* töltésű *m* nyugalmi tömegű részecske egymásra merőleges, homogén *E* térerősségű elektromos és *B* indukciójú mágneses térben mozog. *(A sugárzási veszteségektől eltekinthet.)* Válasszuk a koordinátarendszerünket úgy, hogy *B* iránya legyen a *z* tengely, *E* pedig mutasson *y* irányba! A részecske *z* irányú sebessége zérus, mozgását az *x*-*y* síkban végzi. (*Miért is?*)

a.) Írja fel a részecske relativisztikus mozgásegyenletét!

Először vizsgálja a probléma nem-relativisztikus határesetét, amikor $\vec{p} \approx m\vec{v}$!

b.) Írja fel a mozgásegyenletet erre határesetre!

c.) Ha jól számolt, a mozgásegyenlet egy elsőrendű lineáris inhomogén egyenletrendszer $v_x(t)$ és $v_y(t)$ függvényekre. Adja meg a **homogén** egyenlet általános megoldását!

d.) Adja meg az **inhomogén** egyenlet egy olyan **partikuláris** megoldását, ami egy egyenes vonalú egyenletes mozgást ír le!

e.) Vázolja a részecske általános pályáját! Merre „halad” a részecske?

A relativisztikus mozgásegyenletek megoldásánál szokás ún. relativisztikus korrekciókat számítani. Ennek lényege, hogy a megjelenő $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ faktort sorba fejtjük, és egyre magasabb rendekig vesszük figyelembe.

f.) Írja fel az a.) mozgásegyenletet közelítőleg úgy, hogy a b.)-ben szereplőnél eggyel magasabb rendű közelítést használ!

g.) EXTRA Az f.)-ben szereplő egyenletrendszert hozza explicit alakra, azaz fejezze ki a $\dot{v}_x$ és $\dot{v}_y$ mennyiségeket!

h.) EXTRA Oldja meg az egyenletet numerikusan. Játsszon a paraméterekkel, és vesse össze a nem-relativisztikus ill. a korrigált megoldást!

i.) EXTRA Oldja meg numerikusan a teljes relativisztikus mozgásegyenletet! Mennyire jó az első relativisztikus korrekció?