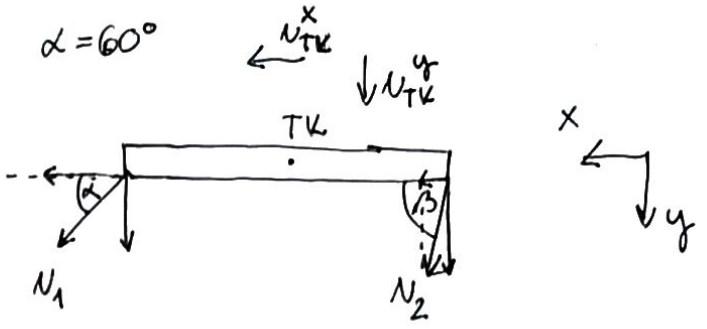
(F1.)

$L = 1{,}00\,m$

$v_1 = 1\,\frac{m}{s}$

$v_2 = 1{,}93\,\frac{m}{s}$

$t = 1{,}57\,s$



a) rúdirányban: $v_1 \cdot \cos 60° = v_2 \cdot \cos\beta \rightarrow \cos\beta = \frac{v_1}{v_2} \cdot \cos 60° = \frac{v_1}{2v_2}$

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{4v_2^2}}$$

$$v_{TK}^x = v_1 \cdot \cos 60° = \frac{v_1}{2}$$

$$v_{TK}^y = \frac{v_1 \cdot \sin 60° + v_2 \sin\beta}{2} = v_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \cancel{v_2} \cdot \frac{\sqrt{4v_2^2 - v_1^2}}{4\cancel{v_2}} = v_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{4v_2^2 - v_1^2}$$

TK-ba beírva mindkét végpont sebessége $\frac{\omega L}{2}$.

$$v_{TK}^y - v_1 \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4} v_1 + \frac{1}{4}\sqrt{4v_2^2 - v_1^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4v_2^2 - v_1^2} - \frac{\sqrt{3}}{4} v_1 = \frac{\omega L}{2}$$

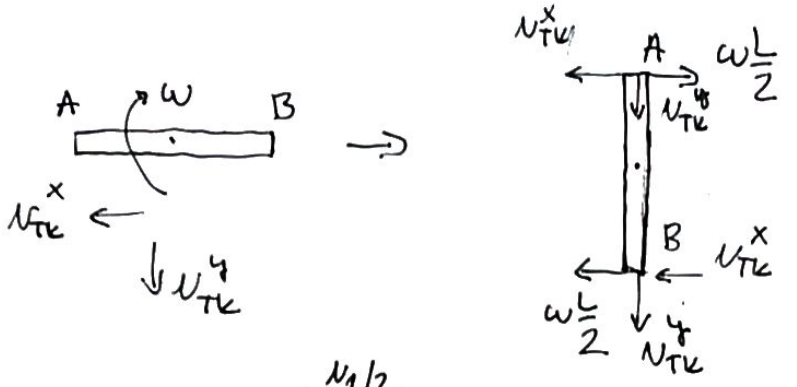
$$\underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2L}\left(\sqrt{4v_2^2 - v_1^2} - \sqrt{3}\, v_1\right) \approx \underline{\underline{1{,}0\,\frac{1}{s}}}$$

b) TK állandó sebességgel mozog, így TK-rendszerben ugyanazt a gyorsulást látjuk:

$$\underline{\underline{a_{cp}}} = \omega^2 \frac{L}{2} = \underline{\underline{0{,}5\,\frac{m}{s^2}}}$$

c) A rúd elfordulása a kezdeti helyzethez képest:

$$\varphi = \omega \cdot t = 1{,}57\ rad \approx \frac{\pi}{2}\ rad = 90°$$



$$v_A^x = \omega\frac{L}{2} - \overset{v_1/2}{v_{TK}^x} = 1\,\tfrac{1}{s}\cdot 0{,}5\,m - 0{,}5\,\tfrac{m}{s} = 0$$

$$v_A^y = v_{TK}^y = v_1\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{4v_2^2 - v_1^2} = 1{,}4\,\frac{m}{s}$$

$$\underline{\underline{v_A = 1{,}4\ m/s}}$$

$$v_B^x = \omega\frac{L}{2} + v_{TK}^x = 1\,\frac{m}{s}$$

$$v_B^y = v_A^y = 1{,}4\,\frac{m}{s}$$

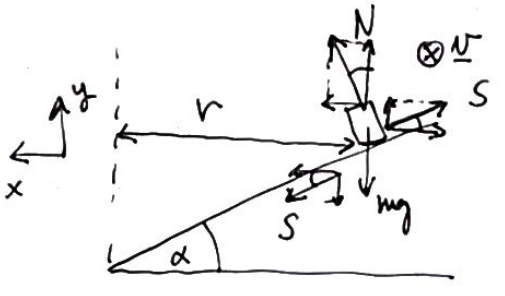
$$\underline{\underline{v_B = 1{,}7\ m/s}}$$

F2.

$r = 50\,m$

$\alpha = 30°$

$\mu = 0{,}4$



Vagy felfelé csúszik (max. sebesség), vagy lefelé csúszik (min sebesség):

Maximális sebességnél a tapadási súrlódási erő „lefelé" mutat.

Minimális sebességnél „felfelé" mutat.

$$x:\quad N\sin\alpha \pm S\cdot\cos\alpha = m\frac{v^2}{r} \quad (1)$$

$$y:\quad N\cos\alpha \mp S\cdot\sin\alpha = mg \quad (2)$$

$$S \le \mu N \quad (3)$$

$(1)\cdot\sin\alpha + (2)\cdot\cos\alpha$:

$$N\underbrace{\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)}_{=1} = m\frac{v^2}{r}\cdot\sin\alpha + mg\cos\alpha$$

$$N = m\frac{v^2}{r}\sin\alpha + mg\cos\alpha$$

(1): $$S = \pm\left(m\frac{v^2}{r} - N\sin\alpha\right)\cdot\frac{1}{\cos\alpha} =$$

$$= \pm\left(\frac{mv^2}{r\cdot\cos\alpha} - \frac{mv^2}{r\cdot\cos\alpha}\sin^2\alpha - mg\cdot\sin\alpha\right) =$$

$$= \pm\left(\frac{mv^2}{r\cancel{\cos\alpha}}\cdot\cos^{\cancel{2}}\alpha - mg\cdot\sin\alpha\right)$$

(3): $$\pm\left(\frac{mv^2}{r}\cdot\cos\alpha - mg\cdot\sin\alpha\right) \leq \mu\left(\frac{mv^2}{r}\sin\alpha + mg\cos\alpha\right)$$

$+$ S lefelé mutat, maximális sebesség

$-$ S felfelé mutat, minimális sebesség

$$\frac{v^2}{r}\cdot\cos\alpha - g\cdot\sin\alpha \leq \frac{\mu v^2}{r}\sin\alpha + \mu g\cos\alpha$$

$$v^2(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) \leq gr(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$$

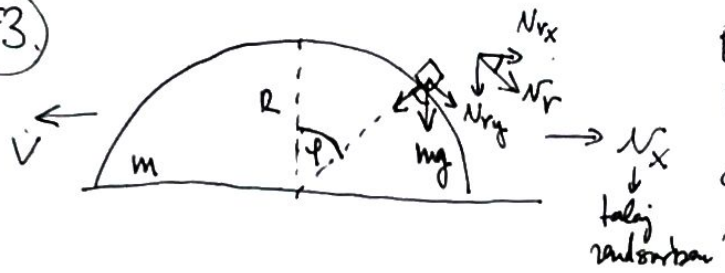
$$v \leq \sqrt{gr}\sqrt{\frac{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}} = \underline{\underline{25\,\frac{m}{s} = 90\,\frac{km}{h}}}$$

másik eset:

$$-\frac{v^2}{r}\cos\alpha + g\cdot\sin\alpha \leq \frac{\mu v^2}{r}\sin\alpha + \mu g\cos\alpha$$

$$v \geq \sqrt{gr}\sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha}} = \underline{\underline{8{,}4\,\frac{m}{s} = 30\,\frac{km}{h}}}$$

F3.



Elváláskor a test és a félhenger közötti nyomóerő nulla. Ezért ebben a pillanatban a félhenger már nem gyorsul.

Félhenger rendszerében: $mg\cos\varphi = m\frac{v_r^2}{R} \rightarrow v_r^2 = gR\cdot\cos\varphi$ (1)

Vízszintes irányban nincs külső erő: $0 = mV - mv_x \rightarrow V = v_x$ (2)
(talaj rendszerében)

Energiamegmaradás: $mgR(1-\cos\varphi) = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2$ (3)

Kényszerfeltétel: $v_{rx} - V = v_x \xrightarrow{(2)} v_{rx} = 2v_x \rightarrow v_x = \frac{v_{rx}}{2}$

$v_{rx} = v_r\cos\varphi$

$v_{ry} = v_y = v_r\cdot\sin\varphi$

(3):
$$2gR(1-\cos\varphi) = V^2 + v_x^2 + v_y^2$$
$$2gR(1-\cos\varphi) = 2v_x^2 + v_r^2\sin^2\varphi$$
$$2gR(1-\cos\varphi) = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_{2}}\cdot v_r^2\cos^2\varphi + v_r^2\sin^2\varphi$$
$$v_r^2 = \frac{2gR(1-\cos\varphi)}{\frac{\cos^2\varphi}{2} + \sin^2\varphi}$$

(1):
$$\frac{2\cancel{gR}(1-\cos\varphi)}{\frac{1}{2}\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \cancel{gR}\cdot\cos\varphi$$
$$2(1-\cos\varphi) = \frac{1}{2}\cos^3\varphi + \cos\varphi - \cos^3\varphi$$
$$4 - 4\cos\varphi = -\cos^3\varphi + 2\cos\varphi$$
$$0 = \cos^3\varphi - 6\cos\varphi + 4$$

$\cos\varphi = x$: $\quad 0 = x^3 - 6x + 4$

$x = 2$ megoldása az egyenletnek, ezért

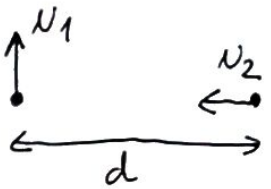
$$0 = (x-2)x^2 + 2x(x-2) - 2(x-2)$$

$$0 = x^2 + 2x - 2$$

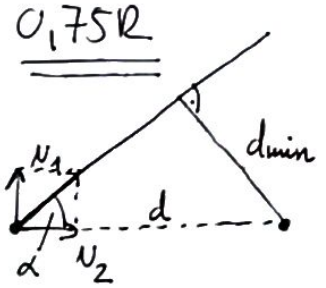
$$x = \frac{-2 + \sqrt{4 + 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \sqrt{3} - 1 = \cos\varphi \Rightarrow \varphi = 42{,}9^\circ = 0{,}75\,\text{rad}$$

A hengren megtett út: $\underline{\underline{s}} = R\cdot\varphi = \underline{\underline{0{,}75R}}$

F4.



átülve a v_2-vel elindított testre



Mindkét rendszer gyorsulása azonos nagyságú (g) és irányú, ezért átülve, egyenes vonalú, egyenletes mozgást kapunk.

Tehát az ábra alapján:

$$\underline{\underline{d_{min}}} = d\cdot\sin\alpha = \underline{\underline{d\cdot\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}}}$$