

4. ábra. A Kepler-10b bolygónkéhez viszonyított mérete.

számított tömeg-sugár reláció alapján úgy tűnik, hogy a planéta vasmagja a teljes bolygótömeghez viszonyítva valamivel nagyobb, mint a Földé (bolygónk vas-nikkel magja a teljes tömeg 32,6%-a).

## Összegzés

Az igazán nagy jelentőségű felfedezés az olyan Földhöz hasonló méretű bolygók megtalálása volna, amelyek csillaguk lakhatósági zónájában keringenek. Azonban nemcsak a Földünk méretével megegyező planéták lehetnek érdekesek, hanem a nála nagyobb kőzetbolygók is, hiszen ezek megfelelő környezeti feltételek teljesülése esetén szintén életet hordozhatnak felszínükön. Az összetételre vonatkozó számítási eredmények felhasználásával nagyszerű összehasonlításokat végezhetünk a nagy tömegű kőzetbolygók és a mi Földünk tulajdonságai között. A Földhöz hasonló felépítésű, de annál nagyobb tömegű szuper-Földek geológiai értelemben aktívabb égitestek, hiszen magasabb belső hőmérsékletük intenzívebb geodinamikát tarthat fenn, elősegítve ezzel a hatékonyabb le-

meztectonikát. Számos kutatás pedig alátámasztani látszik azt a feltételezést, amely szerint a lemeztectonika léte elősegítette a földi élet fejlődését. Így a szuper-Földek – megfelelő kritériumok teljesülése esetén – akár kedvezőbb feltételeket is nyújthatnak az olyan típusú élet számára, mint amit mi itt a Földön megismertünk. Az élet jellegét meghatározó vagy befolyásoló fizikai paraméterek közül pedig az egyik legfontosabb a felszíni nehézségi gyorsulás értéke, mivel ez szabja a felső határt az élőlények tömegének és méretének egy adott planéta bioszférájában.

A Kepler-űrtávcső mérései által a Földünkhöz hasonló, és a nála nagyobb méretű bolygók esetén a várható felfedezések száma akár a több százat is elérheti, amely adattömeg már segíti a szakembereket a Tejútrendszerbeli potenciálisan lakható bolygók lehetséges számának becslésében. A 2010-es év összes bejelentett exobolygó-felfedezése száz körül volt, és ebből 8 az elsőként a Kepler-űrtávcsővel detektált planéta, mely arány növekedésére lehet számítani a következő években. Mivel a kis tömegű exobolygókat illetően is tömeges felfedezések várhatók, a Kepler valószínű forradalmat indíthat el az exobolygó-kutatás területén.

### Linkgyűjtemény:

Kepler: <http://www.kepler.nasa.gov/Mission/discoveries/>  
Kepler-9d: <http://arxiv.org/abs/1008.4393v3>  
Exobolygó enciklopédia: <http://exoplanet.eu/>

### Irodalom

1. Szabó R.: Bolygóáradat és asztroszeizmológia. *Fizikai Szemle* 59/4 (2009) 121–126.
2. Futó P.: Szuper-Földek. *Természet Világa* 141 (2010) 520.
3. P. Futó: Detailed internal structure model for super-Earths in case of Earth-like composition. *Lunar and Planetary Science XLII*. (2010) #1024, Houston.
4. N. M. Batalha: Kepler's First Rocky Planet: Kepler-10b. *Astrophys. J.* 729 (2011) 27.

## A FIZIKA TANÍTÁSA

# A LORENTZ-FÉLE SEBESSÉGTRANSZFORMÁCIÓ SZEMLÉLTETÉSE ENERGIA-IMPULZUS DIAGRAMOKKAL

Bokor Nándor  
BME, Fizika Tanszék

Furcsa és kicsit egzotikus példa a relativisztikus jelenségek energia-impulzus diagramokkal [1] való szemléltetésére a *Lorentz-féle sebességtranszformációs képlet* levezetése. Egy tisztán kinematikai kérdést ugyanis dinamikai fogalmak segítségével (energiamegmaradás, impulzusmegmaradás) szemléltet és vezet le.

Az [1] cikkhez hasonlóan itt is  $c = 1$  egységeket használok. A sebességek tehát dimenzió nélküli szá-

mok, amelyek csak  $(-1)$  és  $1$  közötti értékeket vehetnek fel; a tömeg, impulzus és energia pedig mind ugyanabban az egységben mérendő.

Egy  $S$  vonatkoztatási rendszerben egy meteor  $v$  sebességgel mozog balra, egy űrhajó pedig  $u$  sebességgel jobbra. A kérdés: *mekkora  $v'$  sebességgel mozog balra a meteor az űrhajóhoz képest, azaz az űrhajóhoz rögzített  $S'$  vonatkoztatási rendszerben?*

(A balra irányuló  $v$  és  $v'$  sebességeket negatívnak, a jobbra irányuló  $u$ -t pozitívnak tekintem.)

A levezetéshez *odaképzelnünk* egy harmadik objektumot: egy űrkabin, amely a meteorral együtt  $v$  sebességgel mozog balra, és amelynek  $m^*$  tömegét az alábbi szempont szerint választjuk meg:  $S$  legyen éppen az a vonatkoztatási rendszer, amelyben az  $m^*$  tömegű űrkabinból és az  $m$  tömegű űrhajóból álló rendszer tömegközéppontja nyugszik! Nyilván tetszőleges  $u$ ,  $v$  és  $m$  mellett található ilyen  $m^*$  tömeg (még ha esetleg nem realizálható is egy ilyen tömegű űrkabin), és ha a képzeletbeli űrkabinra levezetjük a  $v'(v, u)$  sebességtranszformációs összefüggést, ugyanaz a képlet automatikusan érvényes lesz a vele együtt mozgó meteorra is.

Az 1. ábrán látható az űrhajó-űrkabin rendszer energia-impulzus diagramja az  $S$  vonatkoztatási rendszerből nézve. Az ábráról leolvasható, hogy

1) A rendszer eredő energia-impulzus vektora – az ábrán a szaggatott vonallal jelölt vektor – függőleges (hiszen  $S$  a *tömegközépponti* rendszer);

2) Az űrhajó energia-impulzus vektora az  $m$ -hez tartozó hiperbolára mutat;

3) Az űrkabin energia-impulzus vektora a vektor-kivonás szabályainak megfelelően automatikusan kiadódik (ez a  $\beta$  dőlésszögű vektor az ábrán).

Az űrhajó és az űrkabin energia-impulzus vektorának dőlésszöge adja meg az  $S$ -ben mért sebességüket:

$$u = \tan \alpha \quad (1)$$

$$v = -\tan \beta \quad (2)$$

A (2)-ben szereplő mínusz előjel oka, hogy  $v$  negatív szám, az ábrákon szereplő hegyesszögeket viszont az átláthatóság kedvéért mind pozitívnak veszem.

Az  $S$  tömegközépponti rendszerben az impulzus- és energiamegmaradás egyenletei:

$$\frac{m u}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{m^* v}{\sqrt{1-v^2}} = 0, \quad (3)$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{m^*}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (4)$$

ahol  $M$  az ábra szerinti felső hiperbolához tartozó tömegérték, a „rendszer össztömege”.

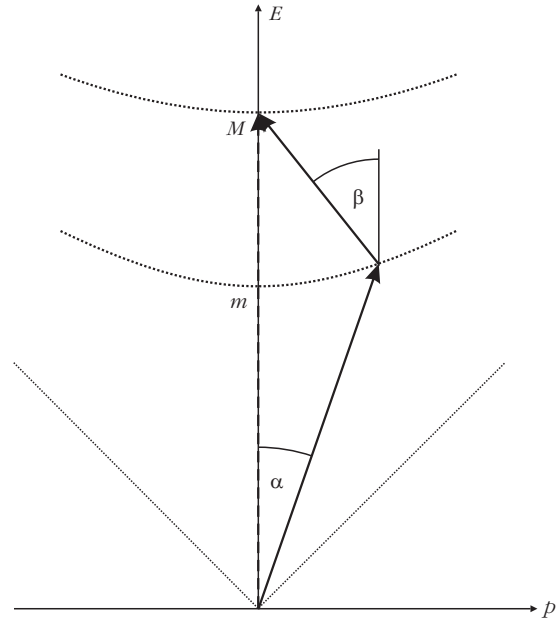
(3) és (4) kombinálásával  $m^*$  könnyen kiküszöbölhető:

$$M = \frac{m}{\sqrt{1-u^2}} \left( 1 - \frac{u}{v} \right). \quad (5)$$

Mi az 1. ábra energia-impulzus diagramjának megfelelője az űrhajóhoz rögzített  $S'$  vonatkoztatási rendszerben? Az  $S'$ -beli, új ábra megszerkesztéséhez az alábbi gondolatmenettel jutunk el. Az  $S'$  rendszerben

1) az  $m$  tömegű űrhajó áll, tehát az ő energia-impulzus vektora lesz függőleges;

2) az űrhajó-űrkabin rendszer tömegközéppontja éppen  $(-u)$  sebességgel mozog balra (hiszen  $S$ -ben

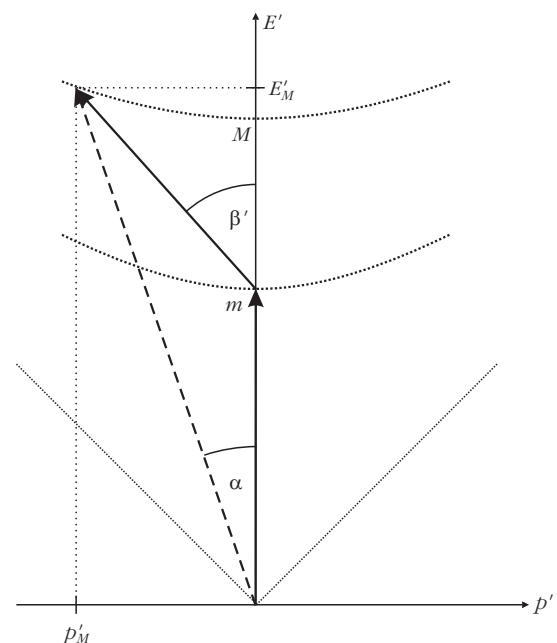


1. ábra. Az űrhajó-űrkabin rendszer energia-impulzus diagramja  $S$ -ből nézve.

állt), tehát a tömegközéppont energia-impulzus vektora  $\alpha$  szöggel dől *balra* az  $E$ -tengelyhez képest.

A helyzetet a 2. ábra mutatja. A tömegközéppont energia-impulzus vektorát természetesen olyan hosszúra kell rajzolni, hogy az  $M$ -hez tartozó hiperbolára illeszkedjen. Az ábrán ilyen módon – két vektor különbségeként – ismét automatikusan kiadódik az űrkabin energia-impulzus vektora is, amely most  $\beta'$  szöggel dől az  $E$ -tengelyhez képest. A  $\beta'$  dőlésszög *különbözik* az 1. ábra  $\beta$ -jától: éppen ezt fejezi ki a sebességtranszformáció. A sebességtranszformációs képlet levezetése ezek után nem más, mint az 1. és 2. ábrákon szereplő  $\alpha$ ,  $\beta$  és  $\beta'$  szögek tangensei közötti összefüggés megtalálása.

2. ábra. Az űrhajó-űrkabin rendszer energia-impulzus diagramja az űrhajó vonatkoztatási rendszerből,  $S'$ -ből nézve.



A keresett  $v'$  sebesség ugyanis a

$$v' = -\tan\beta' \quad (6)$$

alakba írható (a mínusz előjel oka ismét az, hogy az ábrákon szereplő hegyesszögeket következetesen pozitívnak, a balra mutató sebességeket viszont negatívnak tekintem).

A 2. ábrából – ügyelve az előjelekre – egyszerűen felírhatók a tangensek (és ezzel a sebességek):

$$u = \tan\alpha = -\frac{p'_M}{E'_M}, \quad (7)$$

$$v' = -\tan\beta' = \frac{p'_M}{E'_M - m}, \quad (8)$$

ahol  $p'_M$  és  $E'_M$  a tömegközéppont impulzusa, illetve energiája az  $S'$  vonatkoztatási rendszerben.

$E'_M$ -re, (5) felhasználásával

$$E'_M = \frac{M}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{m}{1-u^2} \left(1 - \frac{u}{v}\right) \quad (9)$$

adódik. (8)-at és (7)-et elosztva, (9) felhasználásával a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{v'}{u} &= -\frac{E'_M}{E'_M - m} = -\frac{1}{1 - \frac{m}{E'_M}} = \\ &= -\frac{1}{1 - \frac{1-u^2}{1 - \frac{u}{v}}} = \frac{v-u}{u-u^2v}, \end{aligned} \quad (10)$$

amelyből adódik a Lorentz-féle sebességtranszformációs képlet:

$$v' = \frac{v-u}{1-uv}. \quad (11)$$

### Kitérő

Ha a speciális relativitáselmélet helyett egy olyan furcsa elmélet lenne érvényes, amely szerint az 1. és 2. ábrákon a hiperbolák helyett vízszintes egyenesek szerepelnének, akkor a 3. ábrán látható diagramot kapnánk (az ábra helytakarékosági okokból egymásra vetítve mutatja az  $S$  és  $S'$  rendszerbeli szituációkat).

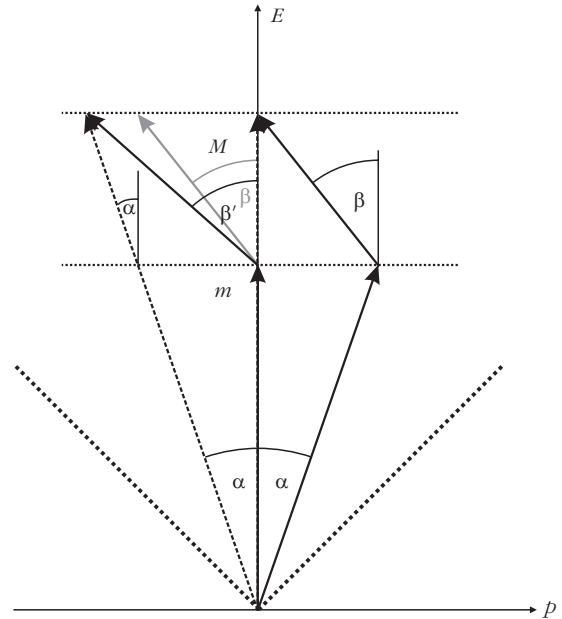
Ez esetben – amint az ábráról leolvasható – a tangensek közötti összefüggés egyszerűen

$$\tan\beta' = \tan\alpha + \tan\beta \quad (12)$$

lenne, amiből a

$$v' = v - u \quad (13)$$

Galilei-féle sebességtranszformáció adódna.



3. ábra. „Furcsa elmélet.”

A helyes elmülethez visszakanyarodva: ott is a 3. ábrához hasonló helyzet alakul ki *kis sebességeknél*. Olyankor ugyanis az energia-impulzus vektorok nagyon kis szöggel dőlnek az  $E$ -tengelyhez képest, tehát a hiperboláknak csak a középső, gyakorlatilag vízszintes egyenessel helyettesíthető része kap szerepet. (Ilyenkor természetesen (12) helyett nem csak a tangensek, hanem közelítőleg maguk a szögek is additívak.)

### A fényről

A (11) sebességtranszformációs képlet nem csak tömegpontok sebességére működik, hanem helyesen adja vissza a relativitáselmélet egyik alap-posztulátumát, a *fénysebesség* mért értékének inerciarendszertől független voltát is: például  $v = -1$  érték mellett  $v'$ -re is  $(-1)$ -et ad.

Kifogásolható, hogy a (11)-et eredményező levezetés csak anyagi pontok esetére érvényes, hiszen a (3) és (4) egyenletekben szereplő impulzus- és energia-kifejezés fényugárra nem írható fel (a fényre vonatkozó  $m^* = 0$  és  $|v| = 1$  miatt). Ha azonban az

$$\frac{m^* v}{\sqrt{1-v^2}} \quad \text{és} \quad \frac{m^*}{\sqrt{1-v^2}}$$

kifejezéseket egyaránt  $p_f$ -fel helyettesítjük –  $p_f$  a fényrészecske impulzusát jelöli, ami egyenlő az  $E_f$  energiájával –, a levezetés expliciten fényugárra is könnyen végigvihető (a kezdő lépéseket lásd később).

Tanulságos megnéznünk, hogyan viselkedik az 1. és 2. ábra, ha meteor helyett fényrészecske a balra baladó objektum. Az  $S$ -beli helyzetet a 4. ábra mutatja. Az általánosság ismét semmit sem sérül, ha az űrhajó tömegét akkorának feltételezzük, hogy az űrha-

jó-fényrészecske rendszer *eredő* energia-impulzus vektora *függőleges* legyen, ahogy az ábra mutatja.

Az  $S'$ -beli energia-impulzus diagram szerkesztése – ezt az 5. ábra mutatja – teljesen a 2. ábra mintájára történik. Csakhogy most, mivel az  $S$ -beli ábra  $\beta$ -ját  $45^\circ$ -osra választottuk, automatikusan – a hiperbolák *geometriai tulajdonságaként* – adódik az az eredmény, hogy az  $S'$ -beli ábrán is  $\beta' = 45^\circ$ -os szögben fog dőlni a fényrészecske energia-impulzus vektora az  $E$ -tengelyhez képest. Az energia-impulzus diagramok világában a fénysebesség invarianciája tehát *geometriai szerkesztésként* adódik.

A 4. és 5. ábrákon ugyanakkor az is látszik, hogy a fényrészecske  $S$ -beli és  $S'$ -beli energia-impulzus vektora *nem ugyanolyan „hosszú”* (precízebben: nem ugyanakkora energiát képvisel). Mekkora a két energia aránya? Az  $S$ -beli impulzus- és energia-megmaradás egyenletei a következők (vesd össze (3) és (4)):

$$\frac{m u}{\sqrt{1-u^2}} - p_f = 0, \quad (14)$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{1-u^2}} + p_f, \quad (15)$$

amelyekből  $p_f$  kiküszöbölésével

$$M = \frac{m}{\sqrt{1-u^2}} (1+u) = m \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} \quad (16)$$

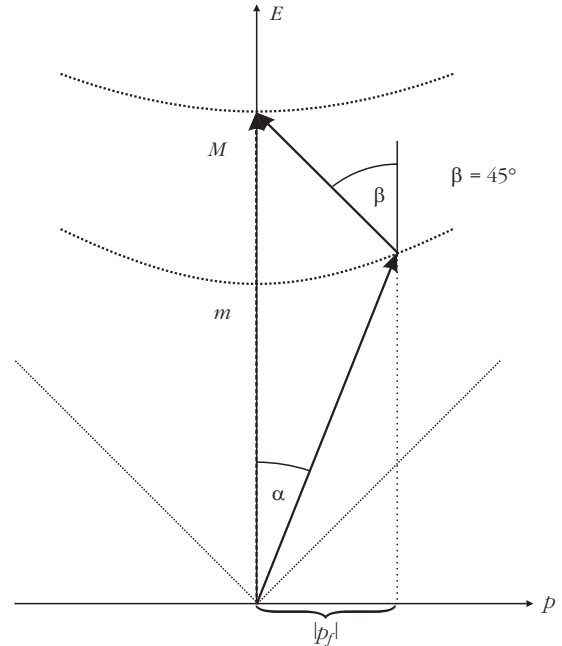
adódik (ezt kapnánk (5)-ből is,  $v = -1$  helyettesítéssel). A fényrészecske  $S'$ -beli és  $S$ -beli *energiájának aránya*:

$$\frac{E'_f}{E_f} = \frac{|p'_f|}{|p_f|}. \quad (17)$$

A számlálóban szereplő  $p'_f$  (ahogy az 5. ábrából leolvasható) nem más, mint az  $M$  tömegű űrhajó-fényrészecske *rendszer* impulzusa  $S'$ -ben, míg a nevezőben szereplő  $p_f$  (ahogy a 4. ábrán látszik) egyenlő az  $m$  tömegű *űrhajó*  $S$ -beli impulzusával. Ebből:

$$\frac{E'_f}{E_f} = \frac{\frac{M u}{\sqrt{1-u^2}}}{\frac{m u}{\sqrt{1-u^2}}} = \frac{M}{m} = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}, \quad (18)$$

ahol az utolsó lépésben felhasználtam a (16)-ot. A (18) képlet ( $E'_f = hf'$ ,  $E_f = hf$  helyettesítéssel) éppen a fényhullámra vonatkozó *Doppler-effektus* képlete. Ha az  $S$  rendszerben a fény frekvenciáját  $f$ -nek mérjük, akkor a fénysugárral *szemben* haladó  $S'$  űrhajóbeli megfigyelő a (18) képlet szerinti mértékben *nagyobb  $f'$*  frekvenciájúnak észleli a fénysugarat. Mint a (18) egyenlet utolsó lépéséből látszik, a két frekvencia aránya közvetlenül is leolvasható a 4. (vagy az 5.) ábra energia-impulzus diagramjáról, mint a két hiperbolához tartozó  $M$  és  $m$  tömegek aránya. (Természe-



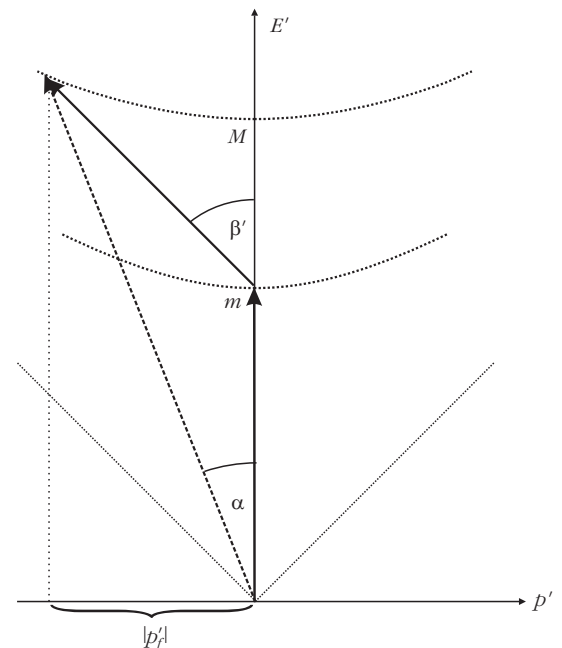
4. ábra. Az űrhajó-fényrészecske rendszer energia-impulzus diagramja  $S$ -ből nézve.

tesen a Doppler-effektus, mint alapvetően kinematikai effektus – amely legszorosabban az idődilatacióhoz kötődik – a *téridőbeli* ( $t, x$ ) Minkowski-diagramon is szemléltethető és levezethető [2].)

## Záró megjegyzés

Célom csupán az energia-impulzus diagramok néhány érdekes tulajdonságának bemutatása volt. Nem foglalkoztam például azzal az esettel, amikor az  $u$  és a  $v$  szöveget *zár be*. Ekkor az energia-impulzus diagram 3-di-

5. ábra. Az űrhajó-fényrészecske rendszer energia-impulzus diagramja az űrhajó vonatkoztatási rendszeréből,  $S'$ -ből nézve.



menziós, és hiperbolák helyett hiperboloidok szerepelnek rajta [1]. Várható, hogy hasonló okoskodással kiadódna egy-egy ilyen ábrából a *merőleges sebességkomponensre* vonatkozó ismert transzformációs képlet és az általános *irányfüggő Doppler-effektus* képlete is.

#### Irodalom

1. Bokor N.: Ütközések elemzése energia-impulzus diagramokkal. *Fizikai Szemle* 61 (2011) 54–60.
2. Bokor N.: Az elektromágneses és az akusztikai Doppler-effektus elemzése geometriai diagramokkal. *Fizikai Szemle* 58 (2008) 142–146.