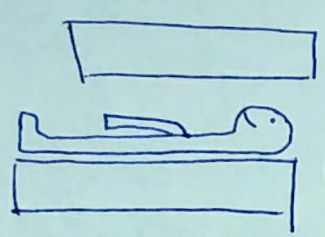
Fizika M1, 1. előadás, 2017/09/04

I. Mágneses rezonancia

(Klasszikus és kvantummechanikai leírás. Orvosi képalkotás)

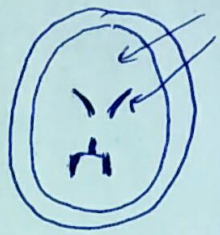
I.A. Mágneses rezonancia képalkotás (MRI) diskéjben

- elrendezés:



mágnesek, elektronika →

pl: koponya MR felv.



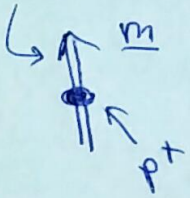
különböző szövetek elkülönülnek

- emberi test: víz, zsír, ...

H_2O — H-tartalmú vegyületek

H-atommag: 1 db proton

mágn. momentum (vektor)



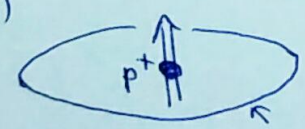
kis "rúdmágnes"

méret: ~ 1 fermiométer (fm) $= 10^{-15}$ m

$$|\underline{m}| \equiv \mu_p \approx 1{,}4 \times 10^{-26} \frac{J}{T}$$

- MRI minimál-modell:

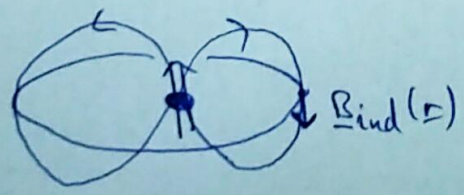
(a)



vezető gyűrű

p^+ mágn. mom. beállítása

(b)



(c) gerjesztés az B-térrel

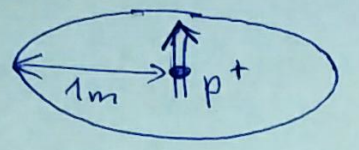
dipól mozogni kezd

(d) vezetőben feszültség indukálódik → ezt mérjük

$\underline{B}_{ind}(\underline{r},t) \rightarrow$ fluxus $\Phi(t) \rightarrow U(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$

I.B MRI egyetlen protonnal

- Mekkora B-teret kelt egy proton a körvezető pontjaiban?



dipólter-formula: $\underline{B}_{ind}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\underline{r}\cdot(\underline{m}\cdot\underline{r})}{r^5} - \frac{\underline{m}}{r^3}\right]$

origóba helyezett $\underline{m}$ mágn. mom. által indukált B-tér az $\underline{r}$ helyen.

$\mu_0 \cong 1{,}26 \times 10^{-6} \frac{kg \cdot m}{s^2 A^2}$ (vákuum permeabilitásra)

$$\underline{B}_{ind}(\underset{x}{d}, \underset{y}{0}, \underset{z}{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[0 - \frac{\mu_p \underline{e}_z}{d^3}\right] = -\frac{\mu_0 \mu_p}{4\pi d^3} \cong \underline{\underline{-1{,}4 \times 10^{-33}\, T \underline{e}_z}}$$

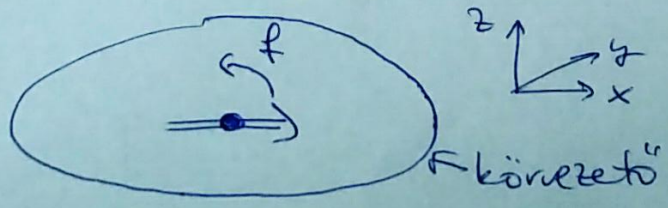
$d = 1m$

$T \equiv \text{Tesla} \equiv \frac{kg}{s^2 A}$

- nagyságrendek: Föld mágneses tere a felszínen: $2-7\,\mu T = 2-7 \times 10^{-6}\, T$

B-tér MRI berendezésekben: $1-3\,T$

- $f = 50\,MHz$ frekvenciával forgatunk egy protont az xz-síkban. Mekkora amplitúdójú ac feszültséget indukál a körvezetőben?



$$U(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$$ körvezetőt átszelő mágneses fluxus

↑

körvezetőben indukált feszültség.

$$\Phi(t) = \int_{\text{körvezető felületére}} d\underline{F} \cdot \underline{B}_{ind}(t) =$$

$\underline{m}$ által indukált mágn. vektorpotenciál

$$= \int_{\text{körvezetőre}} d\underline{l}\ \underline{A}_{ind}(t) = \int d\underline{l}\ \frac{\mu_0}{4\pi}\ \frac{\underline{m}(t) \times \underline{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 \mu_p}{2d} \sin(2\pi f t)$$

$$\underline{m}(t) = \mu_p \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\pi f t) \\ 0 \\ \sin(2\pi f t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{U(t)}} = -\underbrace{\frac{\mu_0 \mu_p 2\pi f}{2d}}_{\approx 2{,}78 \times 10^{-24}\,V} \cos(2\pi f t)$$

• Becsüld meg, hány H-atom van a testedben!

- test $\approx 100\,l$ víz $\approx 100\,kg$ H_2O $(m_{test} \approx 100\,kg)$
- egy H_2O molekula tömege $\Delta m = (1+1+16)u = 18u =$

$$= 18 \times 1{,}6 \times 10^{-27}\,kg \approx 3 \times 10^{-26}\,kg$$

- H-atomok száma $= 2 \times$ vízmolekulák száma $=$

$$= 2 \times \frac{m_{test}}{\Delta m} \approx \underline{\underline{6 \times 10^{27}}}$$

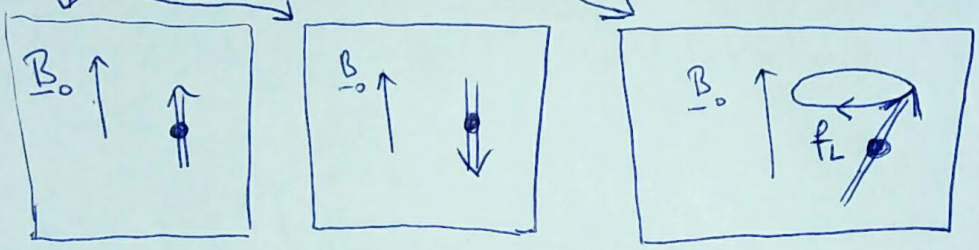
I.C Kibillentett mágneses momentum Larmor-precesszál

• áll: Tegyünk egy protont $\underline{B}_0 = B\underline{e}_z$ sztatikus B-térbe.

Ha $\underline{m} \uparrow\uparrow \underline{B}_0$ vagy $\underline{m} \uparrow\downarrow \underline{B}_0$, akkor $\underline{m}$ nem mozog.

Egyébként $\underline{m}$ precesszál $\underline{B}_0$ körül (Larmor-precesszió) $f_L = \frac{2\mu_p B_0}{h}$ frekvenciával (Larmor-frekvencia).

$h \approx 6{,}6 \times 10^{-34} \frac{kgm^2}{s}$ ← Planck-állandó

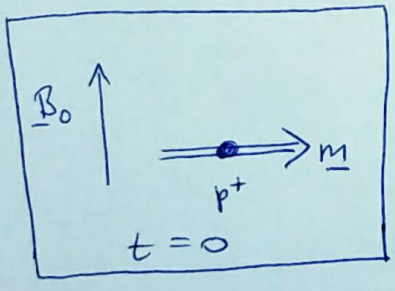


biz.: később

pl: $\underline{m}(t=0) = \mu_p \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ 0 \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underline{m}(t) = \mu_p \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos(2\pi f_L t) \\ -\sin\vartheta \sin(2\pi f_L t) \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

•



$B_0 = 1T$

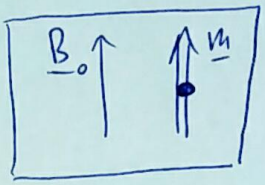
másodpercenként hányszor fordul körbe $\underline{m}$?

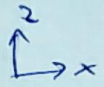
$f_L = \frac{2\mu_p B_0}{h} \approx 42{,}6\,MHz$, azaz kb. 43 millió ~~szor~~.

I.D Rezonánsan gerjesztett mágneses momentum Rabi-oszcillál

- $\underline{B}$ mágneses térbe helyezett $\underline{m}$ mágneses momentum helyzeti energiája $E_h = -\underline{m} \cdot \underline{B}$ (ld. irányító)
- tfh. hőmérséklet szerepe elhanyagolható ($T=0$)

energiaminimum elve: $\underline{m} \uparrow\uparrow \underline{B}_0$





ha $\underline{m}$-et átbillentjük x irányba

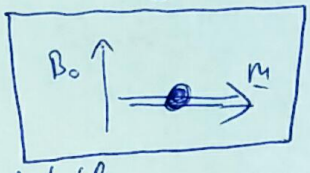
$\Downarrow$

Larmor-precesszál

$\Downarrow$

detektorban (körvezetőben) feszt indukál

$\downarrow$ hogyan? REZONÁNS GERJESZTÉSSEL



- helyzeti energiakülönbség B_0-lal párhuzamos és ellentétes beállás között: ~~$\Delta E_h = E_h(\text{ell.}) - E_h(\text{párh.})$~~

$$\Delta E_h = E_h(\text{ell.}) - E_h(\text{párh}) = 2\mu_p B_0 \underset{B_0 = 1\,\text{Tesla}}{\cong} 0{,}17\,\mu\text{eV}$$

$$(1\,\text{eV} \cong 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{Joule},\ 1\,\mu\text{eV} \cong 1{,}6 \times 10^{-25}\,\text{J})$$

- elektromágneses (EM) sugárzás: ($c \approx 3 \times 10^8 \frac{m}{s}$, fénysebesség)

hullámhossz (λ), hullámszám ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$),

frekvencia (f; $c = f \cdot \lambda$), körfrekvencia ($\omega = 2\pi f$),

periódusidő ($T = 1/f$)

energiakvantum: $\varepsilon = h \cdot f$

- pl: látható fény: $\lambda \in [390\,nm, 700\,nm]$.

feladat: $\lambda_{zöld} = 540\,nm \rightarrow k_{zöld} = ?$ $f_{zöld} = ?$ $\omega_{zöld} = ?$

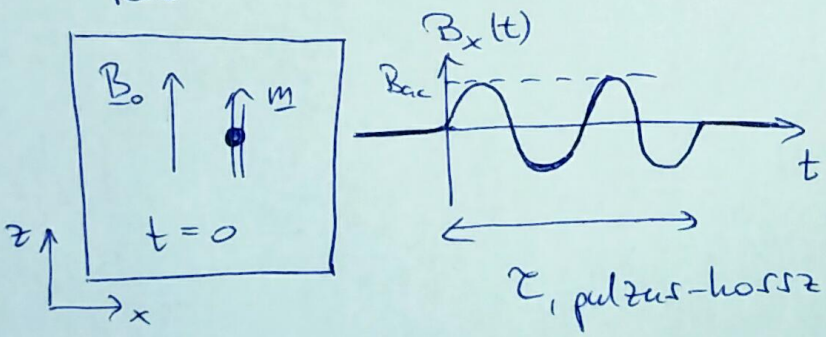
$T_{zöld} = ?$ $\varepsilon_{zöld} = ?$

pl: rádiófrekvencia (RF) $f \in [3\,kHz, 300\,GHz]$

feladat: $f = 42\,MHz \rightarrow k = ?, \lambda = ?, \omega = ?, T = ?, \varepsilon = ?$

- <u>sejtés</u>: rezonáns EM sugárzás $(h \cdot f = \Delta E_h)$ át tudja billenteni a mágn. mom.-ot párh.-ból ell.-be.

- <u>áll</u>: rezonánsan gerjesztett mágneses momentum teljes Rabi-oszcillációt mutat.



① $B_x(t) = B_{ac} \sin(2\pi f t)$

$B_y(t) = 0$

$B_z(t) = B_0$

② gyenge gerjesztés: $B_{ac} \ll B_0$

③ rezonáns gerjesztés: $f = f_L = \frac{\Delta E_h}{h} = \frac{2\mu_p B_0}{h}$

Ekkor

$$\underline{m}(t) = \begin{pmatrix} \sin(2\pi f_R t)\cos(2\pi f_L t) \\ -\sin(2\pi f_R t)\sin(2\pi f_L t) \\ \cos(2\pi f_R t) \end{pmatrix}, \text{ ahol } f_R = \frac{\mu_p B_{ac}}{h}$$

↑ Rabi-frekvencia

$\underline{m}(t)$: '+z'-ről indul

||: lespirálozik '-z'-re

visszaspirálozik '+z'-re :||

Rabi-oszcilláció

$T_R = \frac{1}{f_R}$ idő alatt

↳ Rabi-idő

• feladat: mekkorára válasszuk a τ pulzus-hosszt, hogy az egyenlítőn érjen véget a Rabi-oszcilláció? Tfh $B_0 = 1T$ és $B_{ac} = 1mT$.

1 teljes Rabi-ciklus ($+z \to -z \to +z$) időtartama:

$$T_R = \frac{1}{f_R} = \frac{h}{\mu_p \cdot B_{ac}} \cong 46{,}9\,\mu s$$

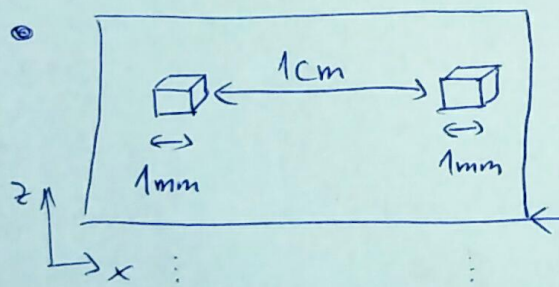
$+z \to$ egyenlítő: $\underline{\underline{\tau = \frac{T_R}{4} \approx 11{,}7\,\mu s}}$

A gerjesztő B-térnek hány periódusa fér ebbe a pulzusba? $\frac{\tau}{T} = \frac{\tau}{1/f} = \frac{\tau}{1/f_L} = \underline{\underline{500}}$

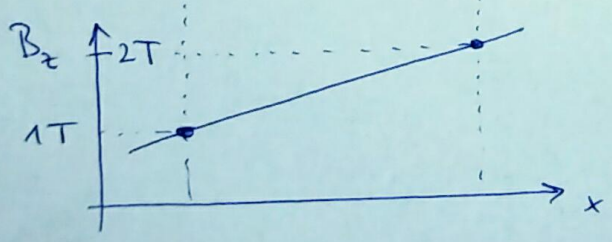
rezonáns gerj.

I.E Mágnesestér-gradiens lehetővé teszi a képalkotást

• Egyik kockában víz van, másik üres. Melyikben van víz?



← átlátszatlan doboz



- ha $f = 42{,}6$ MHz-es gerjesztésre fesz. indukálódik a detektorban ⇒ bal kockában van víz.
- ha $f = 85{,}2$ MHz-re, akkor jobb kockában.