

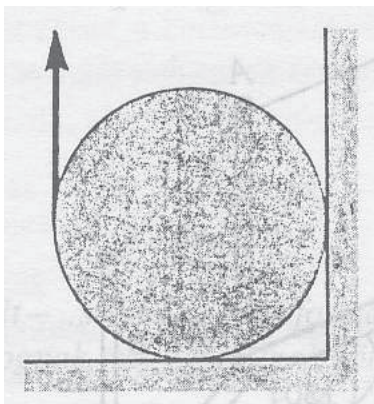
# 1. Feladatok merev testek fizikájának tárgyköréből

## Forgatónyomaték, impulzusmomentum, impulzusmomentum tétel

**1.1. Feladat:** (HN 10B-4) Egy  $\mathbf{F} = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} + f_z\mathbf{k}$  ( $f_x = 2\text{ N}$ ;  $f_y = 3\text{ N}$ ;  $f_z = 0\text{ N}$ ) erő hat egy testre. A test a  $z$  koordinátatengely mentén fekvő forgástengellyel van rögzítve. Az erő az  $\mathbf{r} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$  ( $x = 4\text{ m}$ ;  $y = 5\text{ m}$ ;  $z = 0\text{ m}$ ) pontban támad. Határozzuk meg a forgatónyomaték nagyságát és irányát!

**1.2. Feladat:** Egy "L" hosszúságú kötélen végén  $0,2\text{ kg}$  tömegű test függőleges síkban körmozgást végez. A pálya csúcsán a kör középpontjára vett perdület fele akkora, mint a pálya alján, ahol a tömeg kinetikus energiája  $4\text{ J}$ . Mekkora az "L"?

**1.3. Feladat:** (HN 10C-48) A 1. ábra egy  $G$  súlyú homogén hengerre függőleges irányban ható  $F$  erőt mutat. A henger és a felületek közötti nyugalmi súrlódási együttható  $\mu = 0,5$ . Fejezzük ki a  $G$  függvényében azt a legnagyobb  $F$  erőt, amely még nem indítja meg a henger forgását!



1. ábra.

**1.4. Feladat: Órai kidolgozásra 1. feladat** (HN 13B-7) Homogén tömör henger csúszás nélkül gördül le a  $\alpha$  szög alatt hajlított lejtőn. Bizonyítsuk be, hogy a csúszást gátló nyugalmi tapadási súrlódási együttható legkisebb értéke  $\tan\alpha/3$  kell, hogy legyen! (A henger tehetetlenségi nyomatéka  $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ .)

**1.5. Feladat:** Egy tömör hengert és egy vékony falú csövet egyszerre engedünk el egy adott hajlásszögű lejtő tetejéről. Mindkét tárgy tisztán gördül.

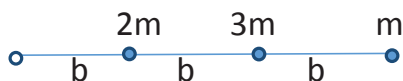
- Határozza meg a henger tömegközéppontjának gyorsulását!
- Határozza meg a cső tömegközéppontjának gyorsulását!
- Milyen messze gurul el a cső, míg a henger  $s_h$  utat tesz meg?

**1.6. Feladat:** Egy jójó külső  $R$  sugara tízszerese belső  $r$  sugarának. A jójó orsója körüli tehetetlenségi nyomatéka jó közelítéssel  $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ , ahol  $m$  a jójó teljes tömege. A fonál vége nem mozog.

- Számítsa ki a jójó tömegközéppontjának gyorsulását!
- Határozza meg a fonálban ébredő erőt!

**1.7. Feladat:** Egy elhanyagolható tömegű merev rúdra három pontszerű testet erősítettek. Az egyik végén csapágyazott rúd függőleges síkban lenghet.

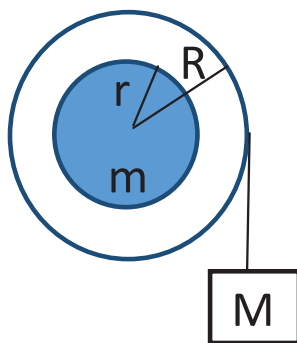
- Mekkora a tehetetlenségi nyomaték a csapágyra nézve?
- Mekkora lesz az alsó test sebessége a rúd függőleges helyzetben való áthaladásakor, ha a 2. ábrán látható helyzetből kezdősebesség nélkül elengedjük?



2. ábra.

**1.8. Feladat:** Homogén tömör tárcsa sugara  $6$  cm, tömege  $1,5$  kg. Nyugalomból indul a motor által kifejtett  $0,6$  Nm forgatónyomaték hatására. Mennyi idő alatt éri el az  $1200$  1/perc fordulatszámot? ( $\theta = \frac{1}{2}mr^2$ )

**1.9. Feladat:** Egy  $r = 20$  cm "tehetetlenségi" sugarú,  $m = 40$  kg tömegű kerék sugara  $R = 30$  cm. Az  $R$  sugárhoz tartozó keréktömeget hanyagoljuk el.) Függőlegesen helyeztük egy vízszintes



3. ábra.

tengelyre. Egy  $M = 2.0$  kg tömegű testet erősítettünk a szélére tekert kötéltre a 3. ábrának megfelelően. Határozza meg a kerék elengedés utáni kezdeti szöggyorsulását! (A kerékre:  $\theta = mr^2$ .)

**1.10. Feladat:** Egy lendkerék fordulatszáma  $60$  rad/s-ról  $180$  rad/s-ra növekedett a rajta történt  $100$  J munkavégzés következtében.

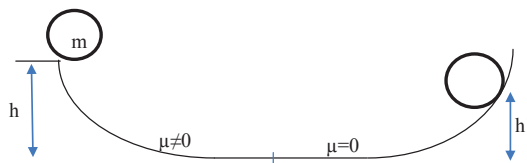
- Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka?
- Ezt követően egy 3-szor nagyobb tehetetlenségi nyomatékú álló kereket nyomunk a lendkerékhez. Mekkora lesz a kialakuló közös fordulatszám?

**1.11. Feladat:** Egy  $m$  tömegű,  $\theta = \frac{1}{2}mR^2$  tehetetlenségi nyomatékú kereket  $\omega_0$  szögsebességgel megforgatunk és zérus kezdősebességgel a  $\mu$  súrlódási együtthatójú talajra engedjük.

- Mennyi idő múlva fog tisztán gördülni a kerék?
- Mekkora utat tesz meg eközben?

**1.12. Feladat: Órai kidolgozásra 2. feladat** A 4. ábrán látható módon az  $m$  tömegű  $\theta = \frac{1}{2}mR^2$  tehetetlenségi nyomatékú korongot egy lejtőn  $h$  magasságban elengedünk. A lejtő tapadási súrlódási együtthatója  $\mu_0$ , ezért a korong itt tisztán gördül. A pálya második fele viszont súrlódásmentes.

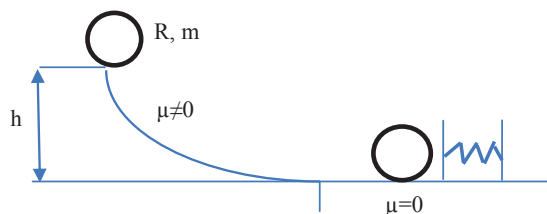
- Mekkora sebessége és szögsebessége van a korongnak a lejtő alján?
- Milyen  $h'$  magasra megy fel a súrlódásmentes emelkedőn a korong?
- Mennyi a lejtő tetején a korong impulzus momentuma?



4. ábra.

**1.13. Feladat:** Egy  $R = 10$  cm sugarú,  $m = 1$  kg tömegű tömör korong ( $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ ) tisztán legördül egy  $h = 0,3$  m magasságú lejtős pályán. A lejtő alján nekiütközik a 5. ábrán látható fékezőrugónak, amelynek ütközője és a pálya ezen szakasza súrlódásmentes. A  $k = 400$  N/m rugóállandójú rugó nyugalmi hossza  $l_0 = 20$  cm.

- Mekkora a korong sebessége és szögsebessége a lejtő alján?
- Mekkora a korong impulzusmomentuma a rugó összenyomódása után?
- Mennyivel nyomódott össze a rugó?



5. ábra.

**1.14. Feladat:** Egy  $R$  sugarú,  $m$  tömegű homogén tömegeloszlású nem forgó kereket tengelyre merőlegesen  $v_0$  sebességgel meglökünk és a  $\mu$  súrlódási együtthatójú talajra engedjük. A kerék tehetetlenségi nyomatéka  $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ .

- Mennyi idő múlva fog tisztán gördülni a kerék?
- Mekkora utat tesz meg eközben?

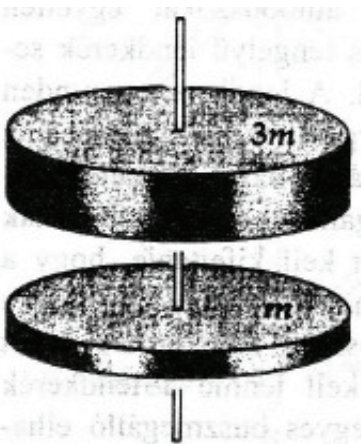
**1.15. Feladat:** \*\* A  $m$  tömegű  $R$  sugarú homogén korongot forgástengelye körül  $\omega_0$  szögsebességgel megforgatunk, majd lapjával – a tengely merőleges a felületre – a sík asztalra helyezzük.

A korong és asztal között  $\mu$  súrlódási tényező van. Feltételezve, hogy korong egyenletesen nyomja az asztalt, mennyi idő múlva áll meg a korong? (A korong tehetetlenségi nyomatéka  $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ .)

## Impulzusmomentum megmaradása

**1.16. Feladat: Órai kidolgozásra 3. feladat** (HN 12B-28) A 6. ábrán látható két tömör tárcsa sugara  $R$ , egyik tömeg  $m$ , a másiké  $3m$ . A bemutatott módon súrlódásmentes csapágyazással közös tengelyre vannak szerelve. A felső tárcsának  $\omega_0$  kezdő szögsebességet adunk, majd nagyon kis magasságból ráejtjük a kezdetben nyugalomban lévő alsó tárcsára. A tárcsák – a közöttük fellépő súrlódás hatására – végül közös  $\omega$  szögsebességgel együtt forognak.

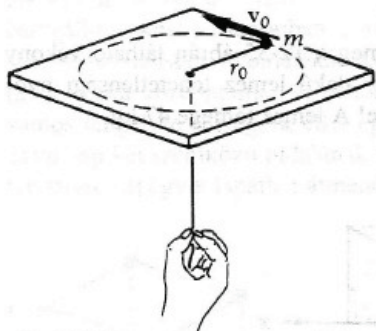
- A megadott mennyiségekkel fejezzük ki a végső  $\omega$  szögsebességet, és
- a tárcsák egymáson való súrlódása közben keletkező hőmennyiséget!
- Mi lenne az egyenesvonalú analogonja ennek a forgási "ütközésnek"?



6. ábra.

**1.17. Feladat:** (HN 12C-50) A 7. ábra egy  $r_0$  sugarú körpályán  $v_0$  sebességgel vízszintes súrlódásmentes felületen mozgó  $m$  tömegű testet mutat. A testre rögzített és kicsiny lyukon átvezetett fonál biztosítja a centripetális erőt. Most a fonalat lassan húzzuk úgy, hogy a test az  $r_0/2$  sugarú körpályára kerüljön. Számítsuk ki az  $m$ , az  $r_0$  és  $v_0$  függvényében

- a test végső sebességét és
- a fonál új helyzetbe húzása során végzett munkát!
- Mutassuk meg, hogy a végzett munka egyenlő a test kinetikus energiájának megváltozásával!



7. ábra.

**1.18. Feladat: Órai kidolgozásra 4. feladat** Az  $L$  hosszúságú  $m$  tömegű rúd függőlegesen áll, az alsó pontja súrlódásmentes csapággal csatlakozik a talajhoz. Az egyensúlyi helyzetből kimozdul és a talajba csapódik. Mekkora a rúd szögsebessége a becsapódás pillanatában? A rúd tehetetlenségi nyomatéka a rúd végére vonatkoztatva  $\theta = \frac{1}{3}mL^2$ .

**1.19. Feladat:** \* Az  $L$  szárhosszúságú, száranként  $m$  tömegű létra egyik lába a falnál áll, míg a másik lába súrlódásmentesen csúszhat a vízszintes talajon. A kezdetben  $2\alpha$  szögre szétnyitott létra szára csúszik, és a létra teljesen szétnyílván a talajba csapódik. Mekkora a létra szárainak szögsebessége a becsapódás pillanatában? (A rúd végpontjára vett tehetetlenségi nyomatéka  $\frac{1}{3}mL^2$ .)

**1.20. Feladat:** \* A  $h$  magasságú toronyugró a palló szélén áll és összegörnyedés nélkül – merev rúdként – a vízbe fordul. (A lába a pallón nem csúszik meg a dőlés során.) Mekkora szögnél válik el a pallótól?

## 2. Feladatok a rezgőmozgás és a mechanikai hullámok tárgyköréből

### Harmonikus rezgőmozgás

**2.1. Feladat:** (HN 15A-1) 20 g tömegű részecske harmonikus rezgőmozgást végez 3 rezgés/másodperc frekvenciával és 5 cm amplitúdóval.

- (a) Mekkora teljes távolságot fut be a részecske egy teljes periódus folyamán?
- (b) Mekkora a legnagyobb sebessége? Hol lép ez fel?
- (c) Határozzuk meg a részecske legnagyobb gyorsulását! Hol lép fel a mozgás során a legnagyobb gyorsulás?

**2.2. Feladat:** Pontszerűnek tekinthető 1 kg tömegű testre  $F = -Dx$  alakú rugalmas erő hat. A rugóállandó  $D = 0,25$  N/cm. A  $t = 0$  pillanatban a kitérés 20 cm, a sebesség 2,83 m/s. Mekkora a rezgés amplitúdója?

**2.3. Feladat:** A 4 N/m rugóállandójú rugóra egy 0,8 kg tömegű testet függesztünk. Nyugalmi helyzetéből 12 cm-t kitérítjük és itt 0,4 m/s kezdősebességgel indítva harmonikus rezgőmozgásba hozzuk. Mézbe merítve megáll a test. Mekkora a súrlódás által disszipált mechanikai energia?

**2.4. Feladat:** Mutassa meg, hogy a  $F = -kx$  rugalmas erejű rugóra akasztott  $m$  tömegű test  $g$  homogén nehézségi erőterében harmonikus rezgőmozgást végez!

**2.5. Feladat:** Egy harmonikus rezgőmozgást végző test legnagyobb gyorsulása  $8\pi$  m/s<sup>2</sup>, legnagyobb sebessége 1,6 m/s.

- (a) Határozza meg a rezgésidőt és az amplitúdót!
- (b) Mennyi a rezgés összenergiája?

**2.6. Feladat: Órai kidolgozásra 5. feladat** Két, azonos amplitúdójú rezgés, melyek frekvenciája  $\nu_1 = 40$  Hz és  $\nu_2 = 60$  Hz, egyszerre kezdi meg rezgését az egyensúlyi helyzetből. Mikor lesz legelőször ismét azonos a kitérésük?

**2.7. Feladat:** (HN 15A-19) Határozzuk meg a 2,3 m hosszú fonálinga

- (a) frekvenciáját és
- (b) lengésidejét a Hold felszínén, ahol a gravitációtól származó nehézségi gyorsulás 1,67 m/s<sup>2</sup>.

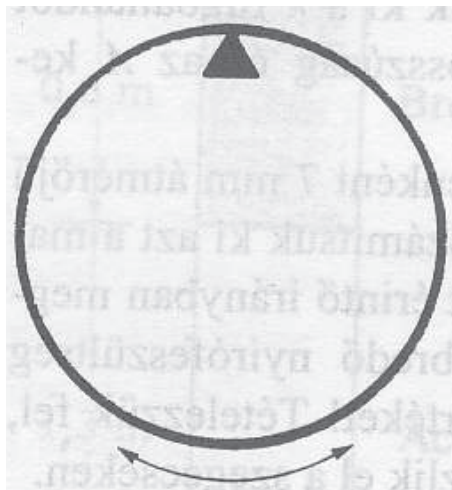
**2.8. Feladat:** A földi Egyenlítőn egy zárt épületben egy fonálinga segítségével hogyan állapítanánk meg, hogy a Hold felettünk vagy a Föld túlsó oldalán van?

**2.9. Feladat:** (HN 15A-20) Egy világítótorony látogatója meg akarja mérni a torony magasságát. Van nála egy orsó cérna, erre kis kavicsot köt, és a torony spirál-lépcsőházának közepén – mint fonálingát – lelógatja. A lengésidő 9,4 s. Milyen magas a torony?

**2.10. Feladat:** Órai kidolgozásra **6. feladat** (HN 15B-26) Vékony, 20 cm sugarú karikát vízszintesen álló késélre helyezünk a 8. ábra szerint úgy, hogy fizikai ingaként a karika síkjában leng.

(a) Határozzuk meg kis amplitúdójú lengéseinek periódusidejét.

(b) Mekkora annak a fonálingának a hossza, amelynek azonos a lengésideje?



8. ábra.

**2.11. Feladat:** (HN 15C-37) Egy meg nem feszített  $l$  hosszúságú,  $k$  rugóállandójú homogén rugót úgy vágunk két részre, hogy az egyik darab kétszer akkora, mint a másik.

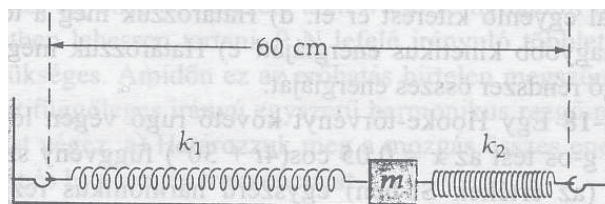
(a) Fejezzük ki rugódarabok  $k_1$  és  $k_2$  rugóállandóját!

(b) Ha mindkét darab egyik végére azonos tömegű testet akasztanánk, mi lenne a frekvenciák aránya?



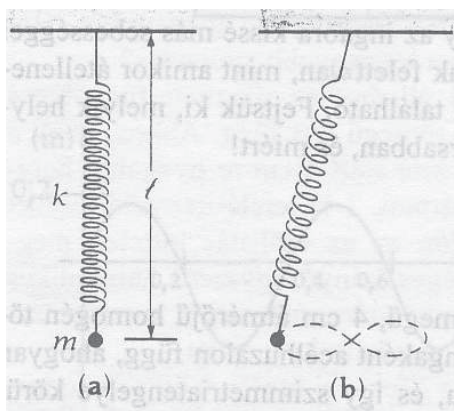
**2.12. Feladat:** (HN 15C-38) Két rugó mindegyike feszítetlen állapotban  $l_0 = 20$  cm hosszú, de rugóállandóik különbözőek:  $k_1 = 40$  N/m és  $k_2 = 80$  N/m. A rugókat vízszintes súrlódásmentes felületen nyugvó  $m = 0,60$  kg tömegű kicsiny testhez rögzítik. A rugókat ellentétes irányban megfeszítik és egymástól  $L = 60$  cm távolságban lévő kampókhöz rögzítik a 9. ábra szerint. Feltéve, hogy a test mérete elhanyagolható.

- (a) A baloldali kampótól milyen távol lesz a test egyensúlyi helyzete?  
 (b) Mekkora a test rugóirányú harmonikus rezgőmozgásának a körfrekvenciája?



9. ábra.

**2.13. Feladat:** (HN 15C-39) Egy  $k$  rugóállandójú rugó végére akasztott  $m$  tömegű test a rugót (nyugalmi állapotban)  $l$  hosszúságúra nyújtja a 10.a ábra szerint. A testet most mozgásba hozzuk úgy, hogy fel-le rezeg és ingaként ide-oda leng. A test a 10.b ábra szerint a függőleges síkban mozogva "nyolcasokat" ír le. Fejezzük ki a  $k$  rugóállandót az  $m$ ,  $l$  és  $g$  függvényében!



10. ábra.

## Csillapodó és gerjesztett rezgések

**2.14. Feladat: Órai kidolgozásra 7. feladat** (HN 15B-28) Egy 2 kg tömegű testet 200 N/m rugóállandójú rugóra függesztünk. Súrlódás miatt a test csillapított harmonikus mozgást végez. A testet nyugalmi helyzetéből 0,20 m-rel kitérítjük, és kezdeti sebesség nélkül elengedjük. Ezt követően 6 másodperc múlva amplitúdója 0,16 m-re csökken.

- (a) Határozzuk meg a súrlódási erőből származó csillapítási együtthatót.
- (b) Határozzuk meg a rendszer rezonanciafrekvenciáját.

**2.15. Feladat:** Egy csillapítatlan rezgő rendszerben mozgó test tömege 0,5 g. A rendszert változtatható frekvenciájú gerjesztő erő hajtja, amplitúdója minden frekvencián  $F_0$ . A test 400 Hz-en 9 mm, 405 Hz-en 5 mm amplitúdóval rezeg.

- (a) Határozzuk meg az oszcillátor  $\omega_0$  sajátfrekvenciáját és
- (b) a rezgés amplitúdóját 395 Hz frekvencián.
- (c) Állapítsuk meg a gerjesztő erő nagyságát. Megoldás:

## Rugalmas közegekben terjedő hullámok

**2.16. Feladat:** Mindkét végén nyitott síp alapfrekvenciája 110 Hz. Milyen hosszú a síp, ha a hang terjedési sebessége 340 m/s?

**2.17. Feladat:** A pozitív  $x$  tengely irányában egy transzverzális harmonikus hullám terjed 2 m/s sebességgel, amely a  $t = 0$  időpillanatban az origóban van. Amplitúdója 10 cm, frekvenciája 0,5 Hz.

- (a) Mennyi a körfrekvencia?
- (b) Mekkora a hullámhossz?
- (c) Mekkora a cirkuláris hullámszám?

**2.18. Feladat:** (HN 18B-8) Kifeszített huzalon haladó transzverzális hullám amplitúdója 0,2 mm, frekvenciája 500 Hz, sebessége 196 m/s.

- (a) Írjuk fel SI egységekkel a hullámfüggvényt  $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$  alakban.
- (b) A huzal lineáris tömegsűrűsége 4,1 g/m. Mekkora a huzalt feszítő erő?

**2.19. Feladat: Órai kidolgozásra 8. feladat** Egy húron csillapítatlan transzverzális harmonikus hullám terjed  $20 \text{ m/s}$  sebességgel pozitív irányba. Amplitúdója  $50 \text{ cm}$ , frekvenciája  $2 \text{ Hz}$ . A  $t_0 = 0$  pillanatban az  $x_0 = 0$  helyen levő részecske kitérése  $25 \text{ cm}$ , és negatív irányban mozog. Mekkora a kitérése az  $x = 5 \text{ m}$  helyen lévő részecskének a  $t = 2 \text{ s}$  pillanatban?