

Fizika i, 2023 tavaszi félév, 7. gyakorlat - MEGOLDÁS

Órai munkára javasolt feladatok

F1. A párhuzamos kapcsolás kialakítása után a kezdetben töltetlen kondenzátor töltése

$$Q = 20 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot 50 \text{ V} = 10^{-3} \text{ C}$$

lesz. Az ismeretlen kondenzátor kapacitását jelölje C . Mivel a párhuzamos kapcsolásban ezen a kondenzátoron eső feszültség is 50 V , így a töltése $C \cdot 50 \text{ V}$. A kezdeti töltése $C \cdot 150 \text{ V}$ volt, a töltésmegmaradás miatt:

$$C \cdot 150 \text{ V} = 10^{-3} \text{ C} + C \cdot 50 \text{ V},$$

ahonnan

$$C = \frac{10^{-3} \text{ C}}{100 \text{ V}} = 10^{-5} \text{ F} = 10 \mu\text{F}.$$

F2*. Legyen $U_0 = 12 \text{ V}$. a) Mivel a kondenzátor kapacitása

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d} = \frac{Q}{U_0} \rightarrow Q = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A U_0}{d} \approx 48 \text{ nC}.$$

b) Ha nem lenne a kondenzátorlemezek között dielektrikum, akkor az elektromos térerősség

$$E = \frac{U_0}{d} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 A}$$

lenne, ahol $Q_0 = C_0 U_0$ és $C_0 = \varepsilon A/d$ a dielektrikum nélküli kondenzátor kapacitása.

Dielektrikummal a térerősség ugyanaz, hiszen a feszültség és a lemezek távolsága megegyezik:

$$E = \frac{U_0}{d} = \frac{Q - Q_p}{\varepsilon_0 A}.$$

Az elektromos teret a kondenzátorlemezek Q töltése és a dielektrikum felületén lévő Q_p polarizációs töltések együttesen hozzák létre (szuperpozíció).

Ebből a két egyenletből:

$$Q_p = Q - Q_0 = (C - C_0)U_0 = (\varepsilon_r - 1) \frac{\varepsilon_0 A U_0}{d},$$

ahonnan a felületi polarizált töltéssűrűség:

$$\sigma_p = \frac{Q_p}{A} = (\varepsilon_r - 1) \frac{\varepsilon_0 U_0}{d} = 1,1 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$

c) Mivel a szigetelőréteget úgy húzzuk ki, hogy a kondenzátort lekapcsoltuk a feszültségforrásról, ezért a lemezek töltése megmarad, kapacitása C_0 -ra csökken:

$$U = \frac{Q}{C_0} = \frac{C U_0}{C_0} = \varepsilon_r U_0 = 36 \text{ V}.$$

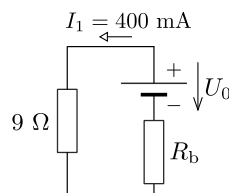
d) A szigetelő lassú kihúzása során a kondenzátor energiája megváltozott, így az általunk végzett munka (feszültségforrás már nincs):

$$W = W_{\text{kond.}}^{\text{vég.}} - W_{\text{kond.}}^{\text{kezd.}} = \frac{1}{2} C_0 U^2 - \frac{1}{2} C U_0^2.$$

Behelyettesítve C , C_0 és U korábbi kifejezéseit:

$$W = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0}{A d} U_0^2 \varepsilon_r (\varepsilon_r - 1) = 5,7 \cdot 10^{-7} \text{ J}.$$

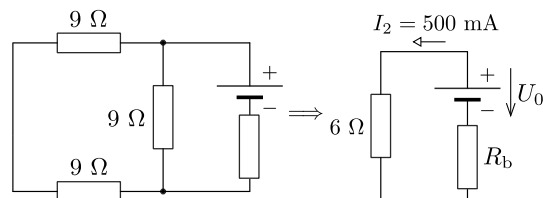
F3. Jelölje R_b a telep belső ellenállását, U_0 a telep üresjárási feszültségét. A kapcsoló nyitott állása esetén az áramkört az alábbi ábra mutatja.



Huroktörvényt felírva:

$$U_0 = (9 \Omega + R_b) \cdot 400 \text{ mA}.$$

Zárt kapcsolóállás esetén két 9Ω -os ellenállás sorba és velük egy 9Ω -os ellenállás van párhuzamosan kapcsolva, azaz a kapcsolás ekvivalens egy olyan kapcsolással, amelyben a telephez egy $18 \cdot 9/(18 + 9) = 6 \Omega$ -os ellenállás van kötve.

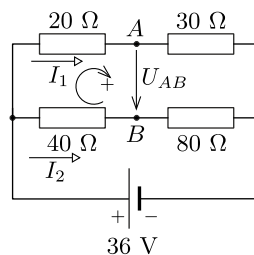


Ismét a huroktörvényt alkalmazva:

$$U_0 = (6 \Omega + R_b) \cdot 500 \text{ mA}.$$

A két egyenlet bal oldala azonos, így a jobb is az, amiből $R_b = 6 \Omega$ adódik.

F4*. a) Használjuk az ábrán látható áram- és feszültségirányokat.



A felső mellékág eredő ellenállása 50Ω , az alsóé 120Ω (az AB pontok közé kötött feszültségmérőn nem folyik áram, mert annak nagyon nagy a belső ellenállása). A két áramerősséget meg lehet határozni:

$$50 \Omega \cdot I_1 = 36 \text{ V} \rightarrow I_1 = 0,72 \text{ A},$$

$$120 \Omega \cdot I_2 = 36 \text{ V} \rightarrow I_2 = 0,30 \text{ A}.$$

A huroktörvény felhasználásával (az ábrán felrajzolt pozitív irányt véve):

$$20 \Omega \cdot I_1 + U_{AB} - 40 \Omega \cdot I_2 = 0 \rightarrow U_{AB} = -2,4 \text{ V}.$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy a feszültség a B felől az A -ba mutat.

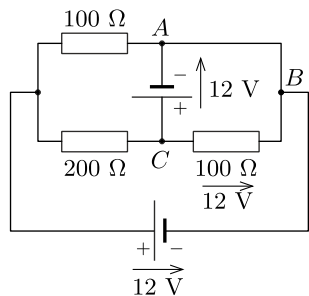
b) Helyettesítsük R -rel a 30Ω -os ellenállást. Ekkor a 20Ω -os és a 40Ω -os ellenálláson azonos feszültség esik, valamint az R és a 80Ω -os ellenállásokon is:

$$20 \Omega \cdot I'_1 = 40 \Omega \cdot I'_2,$$

$$RI'_1 = 80 \Omega \cdot I'_2.$$

Elosztva a két egyenletet egymással az $R = 40 \Omega$ eredményt kapjuk.

F5*. a) Az ábrán látható ABC hurokban lévő 100Ω -os ellenállás feszültsége a huroktörvény miatt 12 V . A legalsó hurokban – amiben a 200Ω -os, az előbbi 100Ω -os és a 12 V -os telep van – emiatt a 200Ω -os ellenálláson 0 V feszültség esik, azaz nem folyik rajta áram.

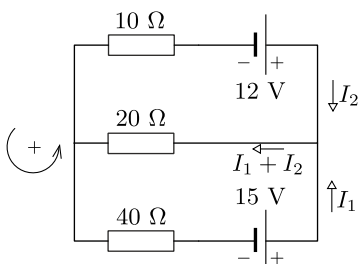


b) A BC pontok közötti ellenálláson $12 \text{ V}/100 \Omega = 0,12 \text{ A}$ erősségű áram folyik. A 200Ω -os ellenállást ki is vehetjük, ekkor a másik 100Ω -os ellenálláson szintén 12 V esik, hiszen az ACB úton a teljes feszültség nulla. Tehát ezen az ellenálláson is $0,12 \text{ A}$ erősségű áram folyik, vagyis a csomóponti törvény miatt az AB ágban nem folyik áram.

c) Mivel áram csak a két 100Ω -os ellenálláson folyik, ezért

$$P = 2 \cdot 100 \Omega \cdot (0,12 \text{ A})^2 = 2,88 \text{ W}.$$

F6*. a) Az ábra irányait és jelöléseit használjuk.



A felső hurokra:

$$12 \text{ V} - 10 \Omega \cdot I_2 - 20 \Omega \cdot (I_1 + I_2) = 0.$$

A nagy hurokra:

$$12 \text{ V} - 10 \Omega \cdot I_2 + 40 \Omega \cdot I_1 - 15 \text{ V} = 0.$$

Egyszerűsítve:

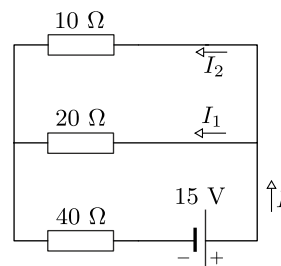
$$10I_1 + 15I_2 = 6,$$

$$40I_1 - 10I_2 = 3.$$

Megszorozva az elsőt 4-gyel, majd a kettőt kivonva egymásból az $I_2 = 0,3 \text{ A}$ áramerősséget kapjuk. Visszahelyettesítve $I_1 = 0,15 \text{ A}$, míg a kettő összege $I_1 + I_2 = 0,45 \text{ A}$.

b) Szuperpozíció elvét úgy használhatjuk fel, hogy az egyik telepet meghagyjuk, a másik helyére vezetőket képzelünk, és kiszámoljuk az áramerősségeket. Ezután ugyanezt végrehajtjuk csak a másik telepet hagyjuk meg.

1. eset. A kapcsolás az ábrán látható.



A kapcsolás eredő ellenállása

$$R_e = 40 \Omega + \frac{10 \Omega \cdot 20 \Omega}{10 \Omega + 20 \Omega} = \frac{140}{3} \Omega.$$

A főágbeli áramerősség

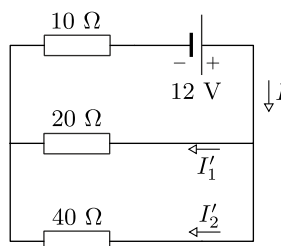
$$I = \frac{15 \text{ V}}{R_e} = \frac{9}{28} \text{ A}.$$

A huroktörvény miatt:

$$20 \Omega \cdot I_1 = 15 \text{ V} - 40 \Omega \cdot I \rightarrow I_1 = \frac{3}{28} \text{ A}.$$

A csomóponti törvény miatt $I_2 = I - I_1 = \frac{3}{14} \text{ A}$.

2. eset. A kapcsolást az alábbi ábrán láthatjuk.



A kapcsolás eredő ellenállása

$$R'_e = 10 \Omega + \frac{20 \Omega \cdot 40 \Omega}{20 \Omega + 40 \Omega} = \frac{70}{3} \Omega.$$

A főágbeli áramerősség

$$I' = \frac{12 \text{ V}}{R'_e} = \frac{18}{35} \text{ A}.$$

A huroktörvény miatt:

$$20 \Omega \cdot I'_1 = 12 \text{ V} - 10 \Omega \cdot I' \rightarrow I'_1 = \frac{12}{35} \text{ A}.$$

A csomóponti törvény miatt $I'_2 = I' - I'_1 = \frac{6}{35} \text{ A}$.

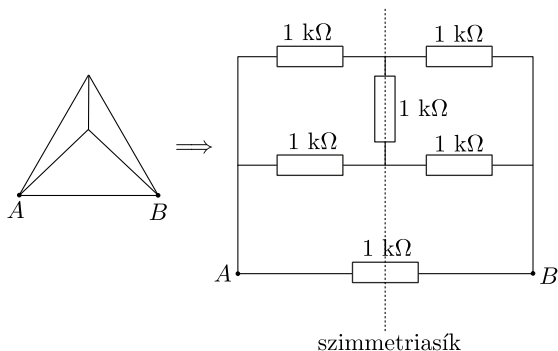
A két esetet egymásra szuperponálva az egyes ellenállásokon átfolyó áramok erőssége (az irányokat figyelembe kell venni):

$$10 \Omega : I' - I'_2 = 0,3 \text{ A},$$

$$20 \Omega : I_1 + I'_1 = 0,45 \text{ A},$$

$$40 \Omega : I - I'_2 = 0,15 \text{ A}.$$

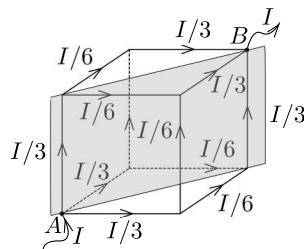
F7*. a) Rajzoljuk át a kapcsolást. A szimmetriasíkban lévő ellenálláson nem folyik áram, hiszen a szimmetria miatt a síkra merőleges ágakban ugyanakkora áram folyik.



Az AB pontok közötti eredő ellenállás:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{2 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{2 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{1 \text{ k}\Omega} \rightarrow R_{AB} = 0,5 \text{ k}\Omega.$$

b)** Vezessünk be I áramot az A pontba és vezessük el a B pontból. A rendszer a testátló irányából nézve szimmetrikus, így az áramok is követik ezt a szimmetriát. Az ábrán a szürke sík a szimmetriasík.

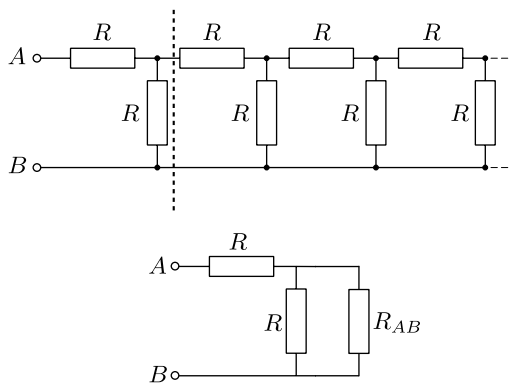


Az A és B pontok közötti éleken végigmenve:

$$1 \text{ k}\Omega \cdot \frac{I}{3} + 1 \text{ k}\Omega \cdot \frac{I}{6} + 1 \text{ k}\Omega \cdot \frac{I}{3} = R_{AB} I.$$

Innen $R_{AB} = 5/6 \text{ k}\Omega$.

F8**. Ha leválasztjuk az első egységet a kapcsolásból, az ellenállás nem változik, hiszen végtelen sok ilyen egységből áll.



Ennek a kapcsolásnak az eredő ellenállása:

$$R_{AB} = R + \frac{RR_{AB}}{R + R_{AB}},$$

amiből R_{AB} -re az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk

$$R_{AB}^2 - RR_{AB} - R^2 = 0.$$

A fizikailag értelmes (pozitív) megoldás:

$$R_{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} R.$$