

2. GYAKORLAT

Dr. Erdei Gábor, 2019-09-13

Komplex törésmutató alkalmazása: hegesztőpajzs-üveg vizsgálata

$\lambda_0 = 313 \text{ nm}$, $T = 0.00002\%$, csak a belső abszorpciót vizsgáljuk (a felületi reflexióval most nem foglalkozunk), merőleges beesés, lineáris polarizáció esetén. $n = 1.5$, mekkora κ ? A z-tengely a felületnormális irányába mutat. Az anyag vastagsága: $z = 6.0 \text{ mm}$.

$$\tilde{n} \equiv n - i \cdot \kappa \quad (1)$$

$$E_x(z) \equiv E_0 \cdot e^{-ik_{re}z} \cdot e^{-k_{im}z} \quad (2)$$

Az intenzitás csökkenését a Lambert-Beer törvény írja le, azaz (2) abszolútérték-négyzete:

$$I(z) = I_0 \cdot e^{-2k_{im}z} \quad (3)$$

Merőleges beesés esetén igaz, hogy:

$$k_{im} = k_0 \cdot \kappa \quad (4)$$

$$I(z) = I_0 \cdot e^{-2k_0\kappa z} = T \cdot I_0 \quad (5)$$

$$-2k_0\kappa z = \ln(T) \quad (6)$$

$$\kappa = -\frac{\ln(T)}{2k_0z} = -\frac{\ln(T)}{4\pi z} \lambda_0 \quad (7)$$

Amiből $\kappa = 6.4 \cdot 10^{-5}$.

Komplex törésmutató alkalmazása: behatolási mélység fémek esetén

$\lambda_0 = 550 \text{ nm}$, merőleges beesés, lineáris polarizáció. $n = 1.0$, $\kappa = 6.6$, mekkora δ ? A z-tengely a felületnormális irányába mutat. (5) alapján:

$$I(z) = I_0 \cdot e^{-2k_0\kappa z} = I_0 \cdot e^{-2\frac{z}{\delta}} \quad (8)$$

$$\delta = \frac{1}{k_0\kappa} = \frac{\lambda_0}{2\pi\kappa} \quad (9)$$

Ebből $\delta = 13 \text{ nm}$.

Paraxiális hullámegyenlet

Az elektromos térerősséget szeparálható alakban keressük:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot e^{i\omega t} \quad (10)$$

Helmholtz-egyenlet:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \varepsilon\mu\omega^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \rightarrow \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{mivel} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} \quad (11)$$

\mathbf{E} komplex, k az ω körfrekvenciájú síkhullám hullámszámvektorának hossza az adott közegben, λ pedig ugyanezen síkhullám hullámhossza ($\lambda = \lambda_0/n$).

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \rightarrow E_x(\mathbf{r}) \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \quad (13)$$

$$E_x(\mathbf{r}) \equiv E_0 \cdot u(x, y, z) \cdot e^{-ikz} \quad (14)$$

$$\frac{1}{E_0} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -k^2 u \cdot e^{-ikz} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} \cdot e^{-ikz} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot e^{-ikz} \approx -k^2 u \cdot e^{-ikz} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} \cdot e^{-ikz} \quad (15)$$

Ha az alábbi feltétel teljesül, paraxiális közelítésben vagyunk:

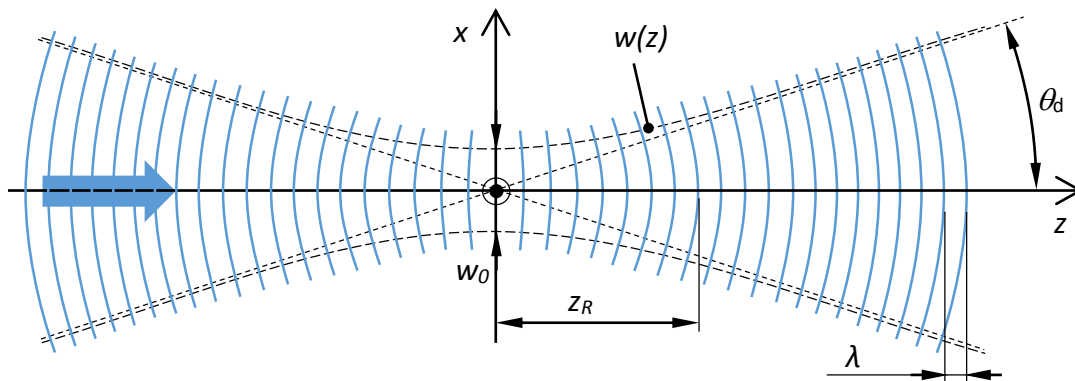
$$2k \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \rightarrow 4\pi \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \lambda \gg \left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \lambda^2 \quad (16)$$

ahol mindkét oldalt osztottuk k^2 -el. Ekkor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

ez a paraxiális, időfüggetlen hullámegyenlet.

Gauss-nyaláb jellemzői



Szabadtéri terjedés esetén (17) analitikus megoldása egy integrálegyenlet: a skalár diffrakció Fresnel-közelítése, amiről később lesz szó. A Fresnel-integrál rendelkezik sajátfüggvényekkel, ezek az ún. Hermite-Gauss-nyalábok, melyek természetesen kielégítik a fenti hullámegyenletet is (ennek igazolása messze túlmutat a gyakorlat keretein). Legegyszerűbb alakjuk a Gauss-nyaláb, amely tengelyszimmetrikus z-re:

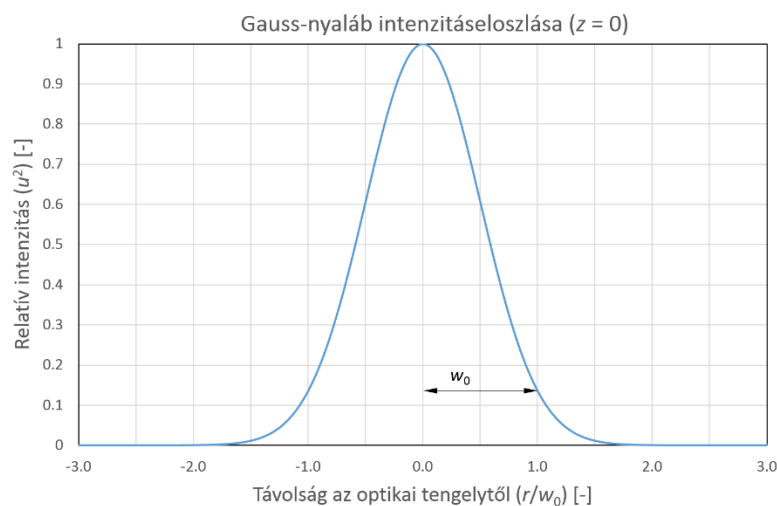
$$u(x, y, z) \equiv \frac{w_0}{w} \cdot e^{-\left(\frac{r}{w}\right)^2} \cdot e^{-ik\frac{r^2}{2R}} \cdot e^{i\varphi} \quad (18)$$

ahol

$$r^2 \equiv x^2 + y^2 \quad (19)$$

Nyalábsugár ($1/e^2$ intenzitású rádiusz) helyfüggése:

$$w^2(z) \equiv w_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right] \quad (20)$$



Origón áthaladó, z-tengelyen lévő középponttal rendelkező, R sugarú gömbhullám hullámfrontja paraxiális közelítésben (ld. múlt óra):

$$z \approx \frac{r^2}{2R}, \quad \text{ahol} \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (21)$$

R előjele akkor pozitív, amikor a középpontja pozitív irányban van eltolva a z-tengely mentén. A hullámfront görbületi sugarának helyfüggése:

$$R(z) \equiv z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] \quad (22)$$

Ha z tart ∞ -hez, akkor $R = z$, azaz a nyaláb átalakul egy origó középpontú gömbhullámmá.

Gouy-féle fáziseltolódás:

$$\varphi(z) \equiv \arctan \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right) \quad (23)$$

φ tart $\pi/2$ -höz, ha z tart $+\infty$ -hez. A fázis siet, azaz olyan, mintha a lokális hullámhossz kicsit nagyobb lenne mint a síkhullámé! Ha $\lambda < w_0$, akkor $z = 0$ helyen a hullámhossz relatív növekedése a következő:

$$\varphi(z)|_{z=0} \approx \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot z \rightarrow \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \approx \frac{\lambda^2}{2\pi^2 w_0^2} \quad (24)$$

Pl.: ha $w_0 = 10\lambda$, akkor a hullámhossznövekedés 5%. Ugyanitt összefoglalva a többi jellemző:

$$R(z) = \infty, \quad \text{ha } z = 0 \quad (25)$$

$$w(z) = w_0, \quad \text{ha } z = 0 \quad (26)$$

$$E_x(z) = E_0, \quad \text{ha } z = 0 \quad (27)$$

A $z = 0$ pozíciót, ahol a legkisebb a nyalábsugár (w_0) nyalábnyaknak nevezik (beam waist).

Lézerrezonátorok csak úgy működnek stabilan (azaz diffrakcióval akkor nem szivárog belőlük a fény), ha bennük épp Hermite-Gauss-nyalábok terjednek – ezeket nevezzük transzverzális rezonátormódusoknak. Ebben a terminológiában a Gauss-nyaláb az ún. TEM₀₀ módus.

A Gauss-nyaláb divergenciája (széttartása)

Divergencia ($z \rightarrow \infty$)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} w(z) = \frac{\lambda z}{\pi w_0} \rightarrow \theta_d \equiv \arctan \left(\frac{w(z)}{z} \right) \approx \frac{w(z)}{z} = \frac{\lambda}{\pi w_0} \text{ [rad]} \quad (28)$$

Ez akkor igaz, ha (ld. (20))

$$\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \gg 1 \rightarrow z \gg \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (29)$$

Nyalábparaméter-szorzat

$$BPP \equiv \theta_d \cdot w_0 \approx \frac{\lambda}{\pi} \quad (30)$$

Igazolható, hogy az összes létező nyaláb közül a Gauss-nyaláb esetén a legkisebb ez az érték (vö. Heisenberg-féle határozatlansági reláció).

Mekkora egy $\lambda_0 = 633$ nm hullámhosszúságú, $w_0 = 0.8$ mm rádiuszú Gauss-nyaláb (ld. He-Ne lézer) divergenciája? (28) alapján $\theta_d = 633 \cdot 10^{-6} / 0.8 / \pi = 0.25$ mrad. Mekkora a folt átmérője 1 km távolságban? $2 \cdot 0.25 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 = 0.5$ m. Vajon tényleg használható itt a távolféle közelítés?

A Gauss-nyaláb minimális görbületi sugarú hullámfrontja

A hullámfront görbületi sugara folyamatosan változik z -függvényében. Hol a legkisebb R ?

$$\frac{d}{dz} \left[z + \frac{1}{z} \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda} \right)^2 \right] = 1 - \frac{1}{z^2} \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda} \right)^2 = 0 \quad (31)$$

Ezt nevezzük Rayleigh-tartománynak:

$$z_R \equiv \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (32)$$

Mekkora itt a nyalábsugár?

$$w(z_R) \equiv w_0 \sqrt{2} \quad (33)$$

Mekkora az előbbi He-Ne lézer Rayleigh-tartománya? $z_R = \pi \cdot 0.8^2 / (633 \cdot 10^{-6}) = 3176$ mm.

Gauss-nyaláb esetén mik a paraxiális közelítés feltételei?

Vizsgáljuk meg a (16) feltételt az optikai tengelyen, azaz $r = 0$. Ebben az esetben (18)-ből ez marad:

$$u(x, y, z) \equiv \frac{w_0}{w} \cdot e^{i\varphi} \quad (34)$$

Az összefüggés egyszeresen és kétszeresen is deriválható kétszeresen. Elvégezve a műveleteket, (16) a következő alakúra egyszerűsödik:

$$z + \frac{z_R^2}{z} \gg 4\lambda \quad (35)$$

A bal oldalnak pont akkor van minimuma, ha $z = z_R$. Ekkor

$$z_R \gg 2\lambda \quad (36)$$

Ide behelyettesítve (32)-t:

$$\frac{\pi w_0^2}{\lambda} \gg 2\lambda \rightarrow w_0 \gg \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda = 0.80\lambda \quad (37)$$

A paraxiális közelítés másik feltétele, hogy E_z és $E_y \ll E_x$, azaz a skalár közelítés legyen érvényesség. A tapasztalat azt mutatja, hogy a vektordifrakció hatásaitól eltekinthetünk olyan nyalábok esetén, ahol a numerikus apertúra (NA) kisebb mint 0.6:

$$NA \equiv n \cdot \sin(\theta_d) < 0.6 \quad (38)$$

Ha $n = 1$, akkor ebből:

$$\theta_d < 0.64 \text{ rad} \quad (39)$$

(28) alapján:

$$\frac{\lambda}{\pi w_0} < 0.64 \rightarrow w_0 > 0.50\lambda \quad (40)$$

(37) és (39) közül az előbbi a szigorúbb. Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy Gauss-nyalábok vizsgálata esetén akkor teljesülnek a paraxiális közelítés feltételei, ha

$$w_0 \geq 8\lambda . \quad (41)$$