5.

Gyakorlat

35B-17

Impulzuslézer 4 ns hosszúságú, 2 J energiájú fényimpulzusokat ad le. A fénynyaláb átmérője 3 mm. (a) Számitsuk ki a kibocsátott fénynyaláb hosszát. (b) Számitsuk ki a fénynyaláb energiasűrűségét (J/m^3 egységben). (c) Mekkora a hullám E_o, elektromos térerősség komponensének az amplitúdója?

Megoldás:

Jelölések: $t = 4 \cdot 10^{-9} s$, $\mathcal{E} = 2\,J$, $d = 3 \cdot 10^{-3} m$ és $A = d^2\,pi/4$

(a) A fénnyaláb hossza $\ell = c \cdot t = 1,199m$

(b) Energiasűrűsége $w = \dfrac{\mathcal{E}}{A\,\ell} = \dfrac{4\,\mathcal{E}}{\ell\,d^2\,\pi} = 2.360 \cdot 10^5\,\frac{J}{m^3}$

(c) E amplitudója:

A $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ Pointing vektor megadja a terjedési irányra merőleges egységnyi felületen, időegység alatt átáramló energia mennyiségét. Egy EM hullámban $\mathbf{E}$ és $\mathbf{H}$ egymásra merőlegesek, továbbá $E = c\,B = c\,\mu_o\,H$ ezért $H = \dfrac{E}{c\,\mu_o}$, vagyis

$$S = |\mathbf{S}| = E \cdot H = \frac{E^2}{c\,\mu_o} \tag{5.1}$$

A lézer fényét elektromágneses síkhullámnak tekinhetjük, amiben a nyaláb keresztmetszetén t idő alatt $\mathcal{E}$ energia áramlik át Ez kifejezhető a Pointing vektor periodusidőre vett integráljával, vagy, ekvivalens módon, a Pointing vektor átlagának, a nyaláb keresztmetszetének és az időnek a szorzatával,azaz

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= < S > \frac{d^2\pi}{4} t \\ &= \frac{1}{c\,\mu_o} < E^2 > \frac{d^2\pi}{4} t \\ < E^2 > &= \frac{4\,\mathcal{E}\,c\,\mu_o}{d^2\,\pi\,t} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Ha E harmonikus (színusz, vagy koszinusz) függvény, akkor négyzetének átlaga helytől függetlenül az amplitudójának éppen a fele:

$$< E^2 > = \frac{1}{T}\int_0^T E_o^2\, sin^2(\omega\,t - k\,x)\,dt = \frac{1}{2}E_o^2 \tag{5.3}$$

Tehát (5.2)-ből

$$E_o = \sqrt{\frac{2\cdot 4\cdot \mathcal{E}\,c\,\mu_o}{d^2\,\pi\,t}} \tag{5.4}$$

$$= \sqrt{\frac{8\cdot 2\,J\cdot 1.257\cdot 10^{-6}\frac{V\,s}{A\,m}\cdot 2.998\cdot 10^8\frac{m}{s}}{(3\cdot 10^{-3})^2\,m^2\,3.1415}}$$

$$= 2.309\cdot 10^8\sqrt{\frac{V\cdot \cancel{A}\cdot V\cdot \cancel{s}\cdot \cancel{m}}{\cancel{A}\cdot \cancel{m}\cdot m^2\cdot \cancel{s}}} = 2.309\cdot 10^8\frac{V}{m} \tag{5.5}$$

35B-25

Egy 15 mW teljesitményű hélium-neon lézer kör keresztmetszetű fénynyalábot bocsát ki. A nyaláb átmérője 2 mm, a fény hullámhossza $632,8\,nm$.

(a) Mekkora a nyalábban az elektromos térerösség maximális értéke?

(b) Mekkora energia van a nyaláb 1 méteres szakaszában?

(c) Mekkora impulzusa van a nyaláb 1 méteres szakaszának?

Megoldás:

(a)

Jelöljük P, d, λ, E_o-val rendre a teljesítményt, átmérőt, hullámhosszat és a térerősség amplitudóját!

Első megoldás. Pointing vektorral

Ez a feladat csak annyiban különbözik az előzőtől, hogy most a teljesítmény van megadva és nem a leadott teljes energia és az energialeadás ideje. Vagyis a (5.4) képletbe $\mathcal{E}/t$

helyére kell P-t helyettesíteni és d értéke más:

$$\begin{aligned}
E_o =& \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot P\, c\, \mu_o}{d^2\, \pi}} = \\
=& \sqrt{\frac{8 \cdot 15 \cdot 10^{-3}\, W \cdot 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{V\, s}{A\, m} \cdot 2.998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{(2 \cdot 10^{-3})^2\, m^2\, 3.1415}} \\
=& 1.897 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{V \cdot \cancel{A} \cdot V \cdot \cancel{s} \cdot \cancel{m}}{\cancel{A} \cdot \cancel{m} \cdot m^2 \cdot \cancel{s}}} = \underline{\underline{1.897 \cdot 10^3 \frac{V}{m}}} \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

Második megoldás. Energiasűrűséggel
A $T = \frac{\lambda}{c}$ periódusidő alatt kisugárzott energia $\Delta w = P \cdot T$ és ez az energia egy $V = d^2\, \pi\, \lambda/4$ térfogatban oszlik el. Az átlagos energiasűrűség

$$\begin{aligned}
< w > &= \frac{\Delta w}{V} = \frac{4\, P \cdot T}{d^2\, \pi\, \lambda} = \frac{4\, P \cdot \cancel{\lambda}}{d^2\, \pi\, \cancel{\lambda}\, c} \\
&= \frac{4\, P}{d^2\, \pi\, c} \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

Ugyanakkor vákumban

$$< w > = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_o < E^2 > + \frac{1}{\mu_o} < B^2 > \right) \qquad (5.8)$$

Felhasználva, hogy a lézer által kisugárzott fény egy EM síkhullám, amiben $c\, B = E$ [1] valamint, hogy $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o\, \mu_o}}$, azaz $B = \sqrt{\varepsilon_o\, \mu_o}\, E$

$$\begin{aligned}
< w > &= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_o < E^2 > + \frac{1}{\mu_o} < B^2 > \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\varepsilon_o < E^2 > + \frac{1}{\cancel{\mu_o}} \varepsilon_o\, \cancel{\mu_o} < E^2 > \right) \\
&= \varepsilon_o < E^2 >= \varepsilon_o < E_o^2 \cdot sin^2(k\, x - \omega\, t) > \\
&= \varepsilon_o\, E_o^2 \cdot < sin^2(k\, x - \omega\, t) > \\
&= \frac{1}{2}\, \varepsilon_o\, E_o^2 \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

[1] Ez abból is következik, hogy az elektromos és mágneses energasűrűség, ill. ezek átlaga megegyeznek.

ahonnan

$$E_o = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot P}{d^2\,\pi\,\varepsilon_o\,c}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 15 \cdot 10^{-3}\,W}{(2 \cdot 10^{-3})^2\,m^2\,3.1415\,8,85 \cdot 10^{-12}\,\dfrac{As}{V\,m}\,2,998 \cdot 10^8\,\dfrac{m}{s}}}$$

$$= 1,897 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{V\,\cancel{A}\,V\,\cancel{m}\,\cancel{s}}{m^2\,\cancel{A}\,\cancel{s}\,\cancel{m}}} = \underline{\underline{1,897 \cdot 10^3\,\frac{V}{m}}} \tag{5.10}$$

Vegyük észre, hogy a (5.6) és (5.10) képletek egymásba alak1thatóak, mert $\mu_0\,c = \dfrac{1}{\varepsilon_o\,c}$.

(b) A nyaláb $\ell = 1\,m$ hosszúságú darabjában levő energia:

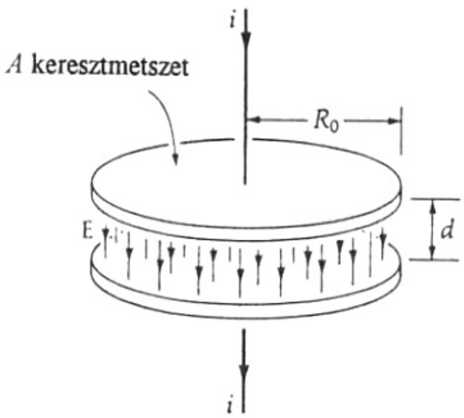
$$\mathcal{E} = P \cdot t_\ell = P \cdot \frac{\ell}{c} = 15 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{2.998 \cdot 10^8} = 5.004 \cdot 10^{-11}\,J \tag{5.11}$$

(c) A fény impulzusa és energiája közötti kapcsolat:

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c} = 1.669 \cdot 10^{-19}\,kg\,m/s \tag{5.12}$$

35C-37

Sikkondenzátort i áramerősséggel töltünk (35-21 ábra). (a) Mutassuk meg, hogy mi-



5.1. ábra. 35-21 ábra

alatt az elektromos térerösség növekszik, az S Poynting-vektor a lemezek közötti térben mindenütt a kondenzátor tengelye felé mutat. (A lemezek szélénél a térerősség inhomogenitásait figyelmen kivül hagyhatjuk.) (b) Ha a Poynting vektort a kondenzátort körbevevő hengerpalást mentén integráljuk, akkor a felület által bezárt térrészbe áramló energia nagyságát kapjuk meg. Mutassuk meg, hogy ez az energiaáram egyenlő a kondenzátor elektromos erőterében tárolt energia növekményével. (Ebben az értelemben, a kondenzátor energiája nem az áramvezető huzalokon keresztül, hanem a környező térből „érkezik".)

Megoldás:

(a)

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_o} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{5.13}$$

Ha $\mathbf{E}$ változik, akkor ennek hatására önmagukba záródó mágneses erővonallakkal jellemezhető tér indukálódik a

$$\oint \mathbf{H}\, d\,\mathbf{s} = \int \varepsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\, d\mathbf{A} \tag{5.14}$$

egyenlet szerint. Az indukált mágneses tér merőleges az elektromos tér változására és egy adott r távolságban a kondenzátor tengelyétől mindenhol ugyanakkora nagyságú. Amennyiben $d\,\mathbf{s}$-et $\mathbf{H}$-val párhuzamosnak választjuk a baloldali integrál:

$$\oint \mathbf{H}\, d\mathbf{s} = 2\, \pi\, r\, H \tag{5.15}$$

A jobboldali integrált egy tetszőleges a baloldali integrálás zárt görbéjére illeszkedő felületre kell venni. Legyen ez a felulet a kondenzátorlemezekkel párhuzamos körlap. Mivel a lemezek között nem csak $\mathbf{E}$ de $\frac{d\,\mathbf{E}}{d\,t}$ is homogén (és lefelé mutat), vagyis párhuzamos a felület normálvektorával, ez az integrál is egyszerűen kiszámítható:

$$\int \varepsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\, d\mathbf{A} = \varepsilon_o \frac{d\,E}{d\,t} \cdot r^2\, \pi \tag{5.16}$$

Behelyettesítve (5.14) -be

$$\begin{aligned} 2\cancel{\pi}\cancel{r}\, H &= \varepsilon_o\, r^{\cancel{2}}\, \cancel{\pi} \frac{d\,E}{d\,t} \\ H &= \frac{1}{2} \varepsilon_o\, r \frac{d\,E}{d\,t} \end{aligned} \tag{5.17}$$

Az $\mathbf{E}$ vonalak az ábrán lefelé mutatnak. Az $\mathbf{E}$ nő, ezért $\Delta\,\mathbf{E}$ változása azonos irányú vele, vagyis a mágneses erővonalak a lemezek síkjával párhuzamos, a pozitív lemez irányából nézve az óramutató járásával megegyező irányú, körök. $\mathbf{S}$ iránya minden pontban mind

E-re, mind **B**-re merőleges és a kondenzátor tengelye felé (befelé) mutat. **S** integrálja a kondenzátort körülvevő hengerpalástra [2] megadja az energiaáramlás fluxusát:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathcal{E}) &= \oint \mathbf{S}\, d\,\mathbf{A} = 2\,\pi\, r\, d \cdot |\mathbf{S}| = 2\,\pi\, r\, d \cdot E \cdot H \\ &= 2\,\pi\, r\, d \cdot E \cdot \frac{1}{2}\varepsilon_o\, r\, \frac{d\,E}{d\,t} \\ &= \varepsilon_o\, r^2\, \pi\, d\, E\, \frac{d\,E}{d\,t} \qquad (5.18)\end{aligned}$$

Mivel ez a kondenzátor belseje felé mutat a kondenzátor energiája időegységenként ennyivel növekszik.

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E}_C(\Delta\, t) &= \Phi(\mathcal{E})\,\Delta\, t \\ &= \varepsilon_o\, r^2\, \pi\, E\, \frac{d\,E}{d\,t}\,\Delta\, t\, d \qquad (5.19)\end{aligned}$$

A kondenzátor energiájának kis $\Delta\, t$ idő alatti növekedését az árammal is kiszámolhatjuk:

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E}_C(\Delta\, t) &= \Delta\, q \cdot U_C = i \cdot \Delta\, t \cdot U_C \qquad (5.20) \\ &= i \cdot \Delta\, t \cdot E \cdot d = i \cdot E \cdot \Delta\, t \cdot d \qquad (5.21)\end{aligned}$$

Az i áram azonban a lemezek között nulla. Ott a helyét a $\varepsilon_o \frac{d\,E}{d\,t}$ eltolási áramsűrűség $i_{elt} = \varepsilon_o \frac{d\,E}{d\,t} \cdot A$ fluxusa veszi át, ahol $A = r^2\,\pi$. Behelyettesítve:

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E}_C(\Delta\, t) &= \varepsilon_o \frac{d\,E}{d\,t} \cdot r^2\,\pi\, E \cdot \Delta\, t \cdot d \\ &= \varepsilon_o\, r^2\, \pi\, E\, \frac{d\,E}{d\,t}\,\Delta\, t\, d \qquad (5.22)\end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy (5.19) és (5.22) valóban megegyeznek. A feladat állítását ezzel igazoltuk.

37B-13

Pontszerű fényforrást, amely minden irányba egyformán világit, tó vizének (n = 1,33) felszine alá helyezünk. Minden fény, ami a felszint eléri, vagy teljesen visszaverődik, vagy teljesen kilép. Adjuk meg, hogy a pontszerű fényforrás által kibocsátott teljes sugárzás hanyad része hagyja el a tó felszinét. (Útmutatás: lapozzuk fel az E függeléket a sztereradián definiciójáért.)

[2] A $d\,A$ felületelem irányát a tengely felé mutató irányba vesszük fel.

Megoldás:

A fényforrás a teljes 4π térszögben sugároz. Azt azonnal tudjuk, hogy a fényforrás által kisugárzott fény fele biztos nem éri el a felszínt. A másik feléből is csak azok léphetnek ki a levegőbe, amelyek a vízfelszínt a teljes visszaverődés határszögénél kisebb szögben érik el. Ezek a fénysugarak egy a pontszerű fényforrásból kiinduló 2β nyílásszögű kúpban helyezkednek el, ahol β a teljes visszaverődés határszöge, amit a $sin\,\beta = 1/1,33$ egyenletből kaphatunk meg. Ennek értéke:

$$\beta = arcsin(1/1,33) = 48.754^o = 0,851(rad) \tag{5.23}$$

A 2β nyílásszögű kúp által meghatározott térszög[3] $\Omega = 2\pi\,(1 - cos\,\beta) = 2,141\,sr$. Tehát a kilépésre képes fénysugarak aránya az összes kibocsátotthoz képest

$$p = \frac{2,141}{4\pi} = 0,17035 = 17,35\% \tag{5.24}$$

37A-15

Nagy üveggömb közepén kis levegőbuborék van. Az üveggömb törésmutatója n és a nagy gömb sugara R. Határozzuk meg, hogy milyen távolinak látszik a buborék a gömb felszinétől!

Megoldás:

1. variáció Ha a buborék mérete elegendően kicsi ahhoz, hogy pontszerűnek tekintsük, akkor minden a felületéről kiinduló fénysugár merőlegesen éri el a gömb felszínét, azaz törés nélül halad tovább, ezért a buborékot továbbra is a gömb középpontjában, tehát a felületétől R távolságban látjuk.

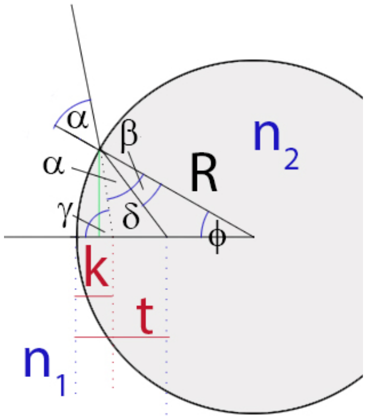
2. variáció Tekintsük a 37A-15 ábrát! Legyen a környező közeg törésmutatója n_1, az üveggömbbé n_2, a tárgy (buborék) szemünkhöz legközelebb eső részének távolsága a gömb felszínétől t, a kép, ahol a tárgyat látjuk ugyaninnen k távolságra! A fénytörési törvény alapján

$$\frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta} = \frac{n_2}{n_1} \tag{5.25}$$

Jelöljük az ábrán szereplő zöld vonal hosszát s-sel. Ekkor

$$\begin{aligned} R \cdot sin\,\phi &= s \\ t \cdot tg\,\delta &= s \\ k \cdot tg\,\gamma &= s \end{aligned}$$

[3] Kiszámításához az egységsugarú gömb azon a gömbsüvegének a felszínét kell meghatározni, amelyik a középpontból 2β nyílásszögü kúpban látszik. (Egy R sugarú gömb esetén Ω =gömbsüveg felülete/sugár négyzete.).



5.2. ábra. 37A-15 ábra

vagyis

$$t \cdot tg\,\delta = R \cdot sin\,\phi \tag{5.26}$$
$$k \cdot tg\,\gamma = R \cdot sin\,\phi \tag{5.27}$$

Egy háromszög külső szöge megegyezik a nem mellete fekvő szögek összegével

$$\delta = \phi + \beta \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \delta - \phi \tag{5.28}$$
$$\gamma = \alpha + \phi \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \gamma - \phi \tag{5.29}$$

Ha a pupillánk mérete kicsi a gömb sugarához képest, akkor az összes ábrán szereplő szög eltúlzott nagyságú és a valóságban mindegyik nagyon kicsi. Kis szögekre viszont mind a szinusz, mind a tangens függvény értéke jó közelítéssel megegyezik magával a (radiánban kifejezett) szöggel, vagyis a fenti képletekben a *sin* és *tg* elhagyható, vagyis

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{n_2}{n_1} \qquad \Rightarrow \qquad n_1 \cdot \alpha = n_2 \cdot \beta$$
$$t\,\delta = R\,\phi \qquad \Rightarrow \qquad \delta = \frac{R\,\phi}{t}$$
$$k\,\gamma = R\,\phi \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = \frac{R\,\phi}{k}$$

ahonnan

$$n_1 \cdot (\gamma - \phi) = n_2(\delta - \phi) \tag{5.30}$$

$$n_1 \cdot \left(\frac{R\,\phi}{t} - \phi\right) = n_2 \cdot \left(\frac{R\,\phi}{t} - \phi\right) \tag{5.31}$$

$$n_1 \cdot \left(\frac{R}{t} - 1\right) = n_2 \cdot \left(\frac{R}{t} - 1\right) \tag{5.32}$$

$$\frac{n_1}{k} - \frac{n_2}{t} = \frac{n_1 - n_2}{R} \tag{5.33}$$

Végtelenül kicsi buborékra ($t \approx R$) innen a várt $k = R$ eredmény adódik a törésmutatók értékétől függetlenül.[4].

3. variáció A könyv 37-13 képletében t jelöli a tárgy távolságát a gömbfelülettől az üveggömbön kívül, és k a kép távolságát ugyancsak a gömbfelülettől a gömbön belül.

$$\frac{n_1}{t} + \frac{n_2}{k} = \frac{n_2 - n_1}{R} \tag{5.37}$$

A mi esetünkre ezt a képletet a következő behelyettesítésekkel írhatjuk át $n_1 \to n_2$, $n_2 n_1 \to n_1$, $t = -R$ és k-t keressük

$$-\frac{n_2}{R} + \frac{n_1}{k} = \frac{n_1 - n_2}{R} \tag{5.38}$$

ahonnan ismét $k = R$ adódik.

$$-\frac{n}{R} + \frac{1}{k} = \frac{1-n}{R}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1-n}{R} + \frac{n}{R} = \frac{1}{R}$$

37C-42

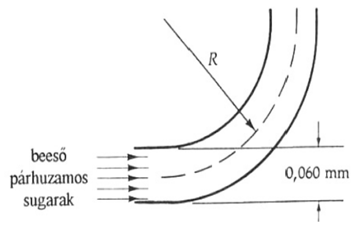
A 37-44 ábrán látható optikai szál üvegből készült (n = 1,63) és 0,060 mm átmérőjű. Adjuk meg annak az R sugárnak a legkisebb értékét, mellyel a szálat még el lehet hajlitani

[4] Ha a buborék sugara r, akkor a képlet bonyolultabb lesz:

$$\frac{n_1}{k} = \frac{n_1 - n_2}{R} + \frac{n_2}{R - r} = \frac{(n_1 - n_2)\,(R - r) + R\,n_2}{R\,(R - r)} \tag{5.34}$$

$$k = \frac{n_1\,R\,(R - r)}{n_1\,R + (n_2 - n_1)\,r} \tag{5.35}$$

$$k \approx R - r \qquad r \ll R \tag{5.36}$$

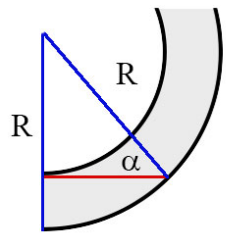


5.3. ábra. 37-44 ábra

úgy, hogy a fonal tengelyével párhuzamosan beeső és a szál egész keresztmetszeti területén eloszló sugarakra még mindig fennálljon a teljes visszaverődes feltétele.

Megoldás:

Először azok a fénysugarak léphetnek ki az optikai szálból, amelyek a belépő felülettől a legtávolabb érik el a szál külső felületét. A 37-44-1 ábráról látható, hogy a legnagyobb szögben az üvegszál tetejéről belépő fénysugár éri el a szál külső felületét ezért elég azzal foglalkozni. A teljes visszaverődés határszöge: $sin\,\alpha = \frac{1}{n}$ és a 37-44-1 ábra alapján



5.4. ábra. 37-44-1 ábra

$$\begin{aligned} R &= R\,sin\,\alpha + d \\ &= \frac{R}{n} + d \\ R\,(1 - \frac{1}{n}) &= d \\ R &= \frac{d\,n}{n-1} = 0,155\,mm \end{aligned}$$