

Modern fizika alkalmazásai a mérnöki gyakorlatban

5. előadás



Planck és Einstein

Kvantummechanika I.



Bohr



De Broglie

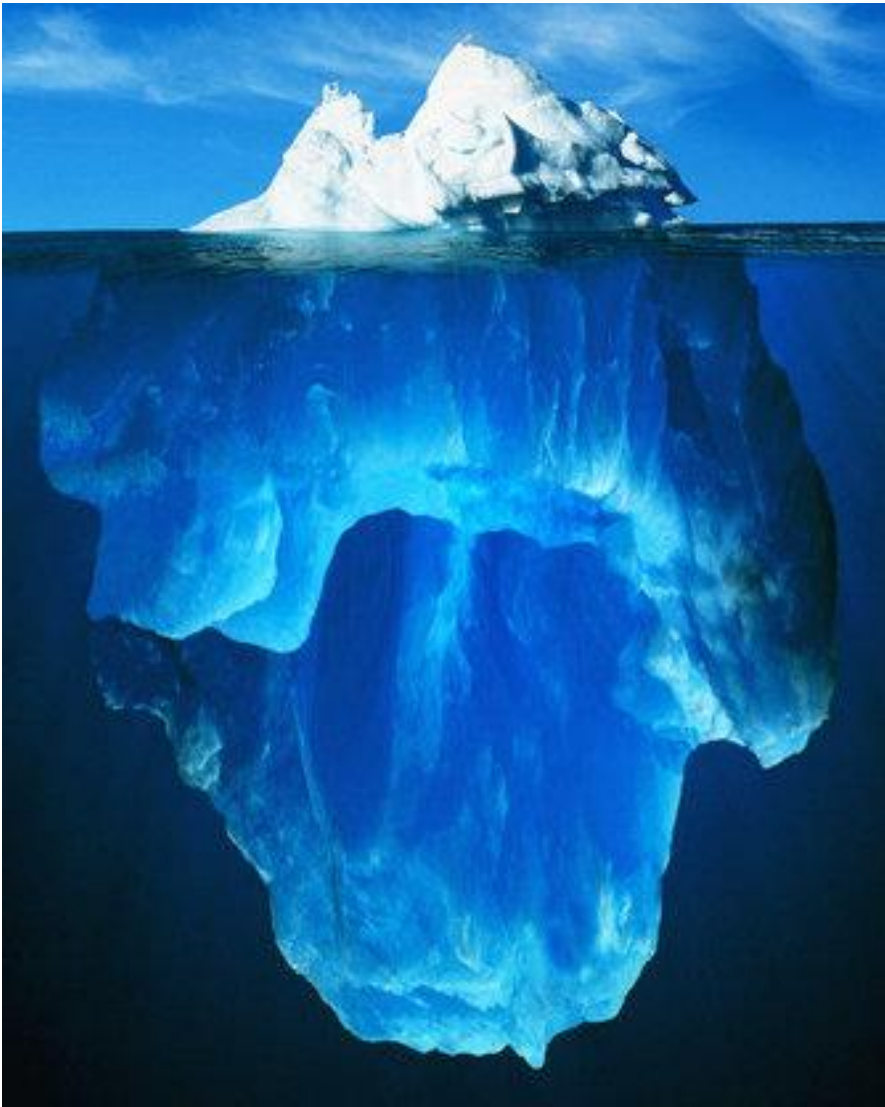


Heisenberg



Pauli

...és még sokan mások...

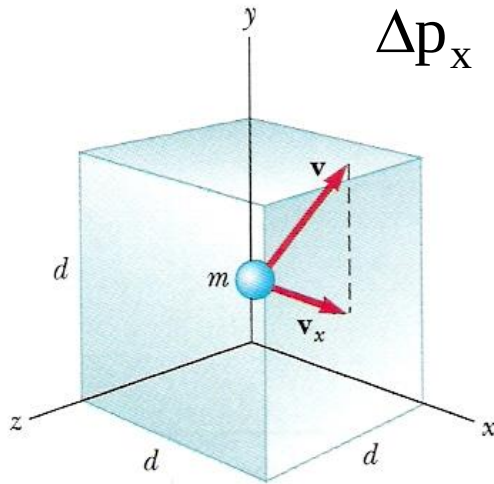


ZH

ELŐADÁS
+
JEGYZET

Termodinamikai előzmények

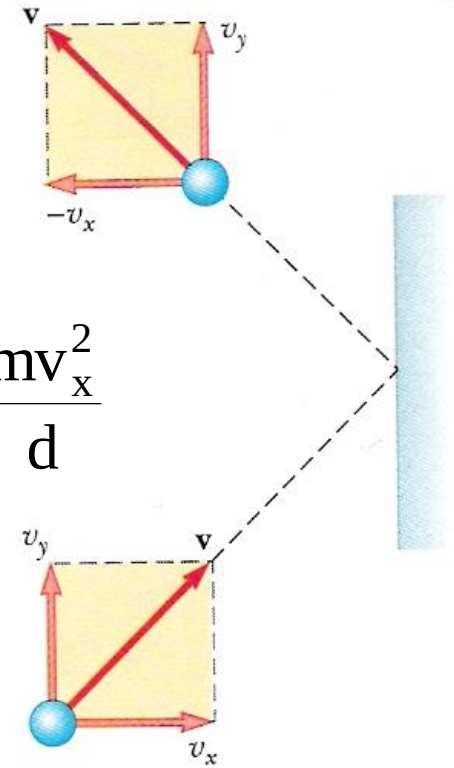
Kinetikus gázelmélet alapjai



$$\Delta p_x = -mv_x - (mv_x) = -2mv_x$$

$$F_x \Delta t = \Delta p_x = 2mv_x$$

$$F_x = \frac{2mv_x}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{2d/v_x} = \frac{mv_x^2}{d}$$



$$F_x = \frac{m}{d} (v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \dots)$$

$$\overline{v_x^2} = \frac{v_{1x}^2 + \dots + v_{Nx}^2}{N}$$

$$F_x = \frac{Nm}{d} \overline{v_x^2}$$

$$\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2} \longrightarrow$$

$$F_x = \frac{N}{3d} m \overline{v^2}$$

$$p = \frac{F}{A} = \frac{F}{d^2}$$

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \left(\frac{1}{2} m \overline{v^2} \right)$$

$$pV = \frac{2}{3}N\left(\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right) = nRT = \frac{N}{N_A}RT = N\left(\frac{R}{N_A}\right)T = Nk_B T$$

$$\left(\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right) = 3 \cdot \frac{1}{2}k_B T \quad f = 3$$

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

belső energia: $E_k = N\left(\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right) = N\frac{3}{2}k_B T = n\frac{3}{2}RT$

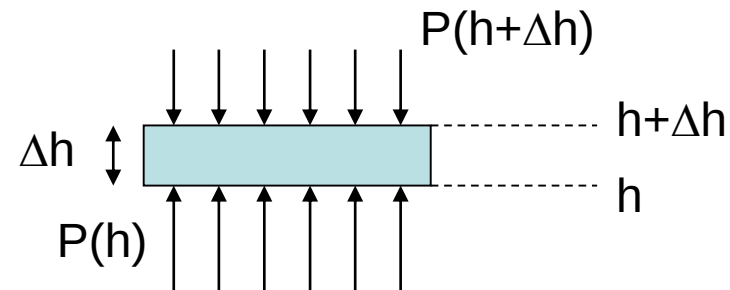
Ekvipartíció elve:

$$\langle E_K \rangle = f \cdot \frac{1}{2}k_B T$$

Maxwell-Boltzmann statisztika

Egy egyszerű példa:

Tegyük fel, hogy a levegő hőmérséklete állandó. Határozzuk meg a molekulák sűrűségét a magasság függvényében!



Tekintsünk egy A alapterületű és Δh vastagságú légréteget. A nyomás különbségből fakadó erő:

$$F = A[P(h) - P(h + \Delta h)] \quad (+)$$

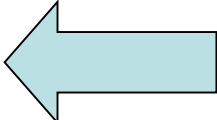
A légréteg egyensúlyban van, mert:

$$F = mgnA\Delta h \quad (++)$$

Ahol m a molekula tömeg, és n a részecskék sűrűsége. Az (+)-ből és az (++)-ből következik, (felhasználva az ideális gáztörvényt: $P = nkT$):

$$\frac{dn}{dh} = -\frac{mg}{kT} n$$

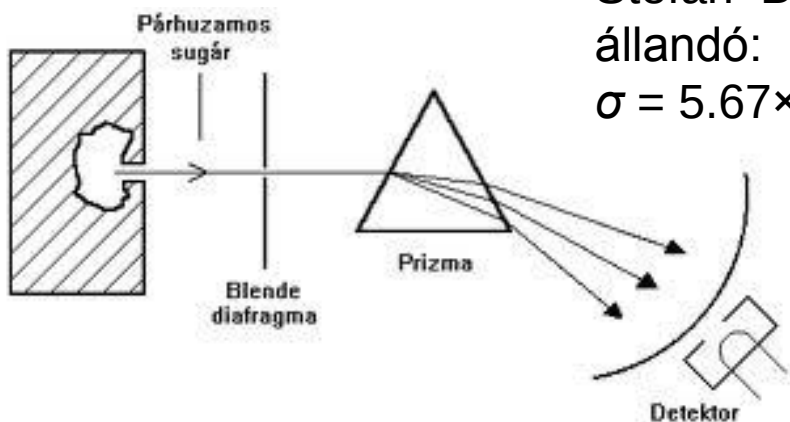
Az általános formula:

$$n = n_0 e^{-E_{\text{pot}} / kT}$$


A megoldás: $n = n_0 e^{-mgh / kT}$

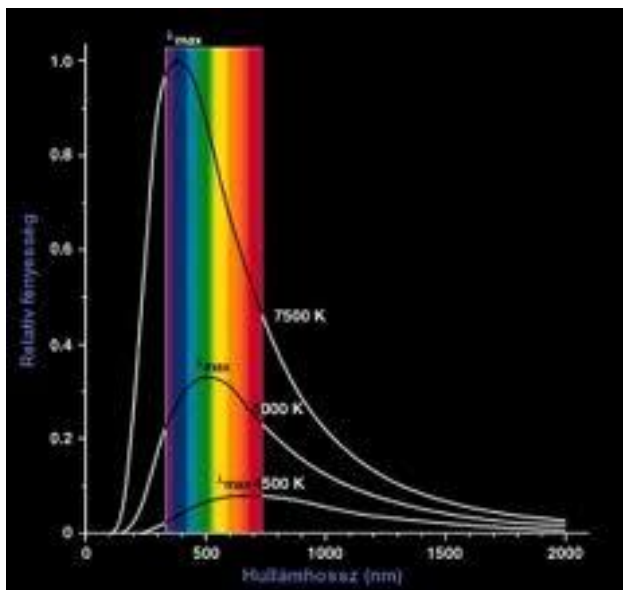
Előzmények I.

Fekete-test sugárzás I.



Stefan–Boltzmann
állandó:
 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$

$$P = \sigma AT^4$$



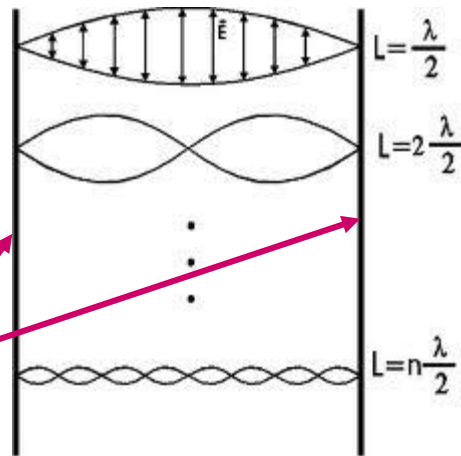
$$\lambda_{\text{max}} = \frac{b}{T}$$

$$(b = 2.8977721 \times 10^{-3} \text{ Km})$$

Fekete-test sugárzás II.

1D rezonátor:

tükrök



$$E(x, t) = 2E_0 \sin(kx) \cos(\omega t)$$

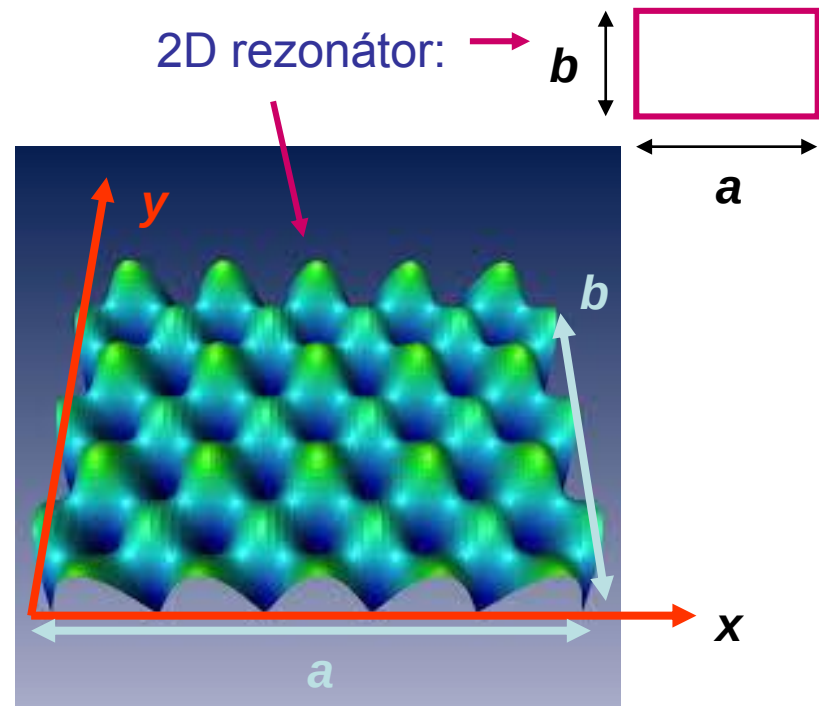
$$k = n \frac{\pi}{a}, \text{ ahol } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$k_x = n_x \frac{\pi}{a} \text{ és } k_y = n_y \frac{\pi}{b}$$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

$$k = \pi \sqrt{\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2}} \text{ ahol } n_x \text{ és } n_y = 1, 2, 3, \dots$$

2D rezonátor:



$$E_x(x, y) = 2E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} n_x x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} n_y y\right)$$

$$E_y(x, y) = 2E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a} n_x x\right) \cos\left(\frac{\pi}{b} n_y y\right)$$

3D rezonátor:

$$k = \pi \sqrt{\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2}}$$

,ahol $n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots$

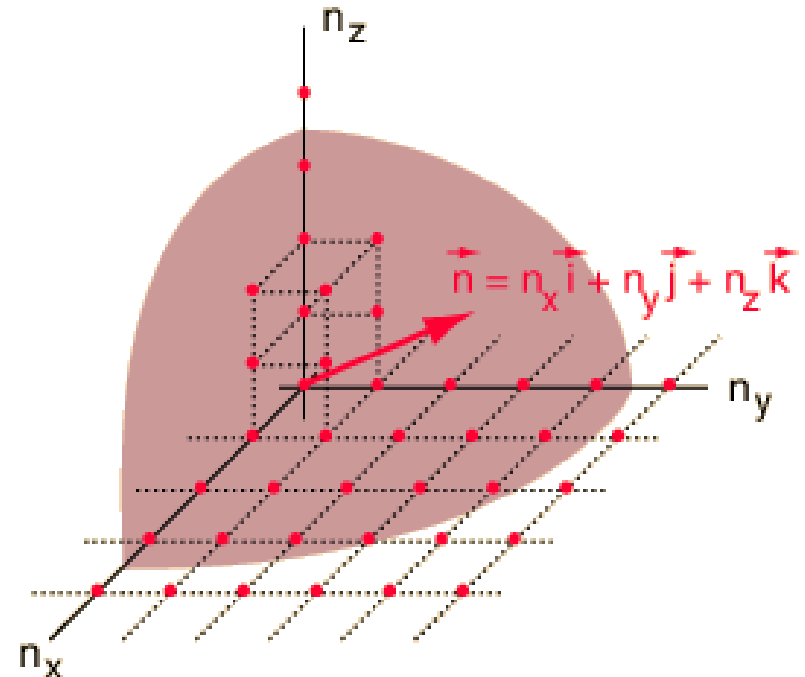
Fekete-test sugárzás III.

$$k = \pi \sqrt{\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2}}$$

$$a=b=c$$

$$k = \frac{\pi}{a} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

$$n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \quad \rightarrow \quad k = \frac{\pi}{a} n$$



$$\frac{\pi}{a} n = \frac{kc}{c} = \frac{2\pi\nu}{c}$$

$$n = \frac{2a\nu}{c}$$

Szabadsági fokok száma:

$$V_n = \frac{1}{8} \frac{4n^3\pi}{3} \bullet 2 = \frac{8a^3\nu^3}{3c^3}$$

Ekvipartíció elve:
 $\frac{1}{2}kT$ (energia/szab.fok)

polarizációs állapotok

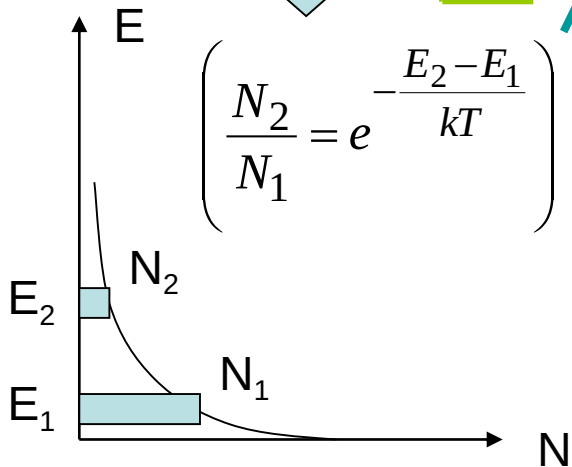
Folytonos változó !!!

$$n \gg 1$$

$$\frac{dn}{V_{\text{térf.}}} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \quad \xrightarrow{\text{ekvipartíció elve}} \quad \frac{dE}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT \quad (++)$$

Fekete-test sugárzás IV.

Láttuk: M-B
statisztika



$$\left(\frac{N_2 / N}{N_1 / N} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}} \right)$$

Energiaszintek betöltöttségének valószínűsége: $P_2 = N_2/N$ & $P_1 = N_1/N$ & $(N_1 + N_2 = N)$

Több szintre:

$$\left(\frac{p_i}{p_j} = e^{-\frac{E_i - E_j}{kT}} \quad \& \quad 1 = \sum_n p_n \right)$$

Tfh.: az EMH egy módusának energiája:

$$E = n\varepsilon_o(\nu) \quad \text{where : } n = 1, 2, 3, \dots$$

Az EMH egy módusának átlagos energiája:

Mértani sor:

$$\sum_n e^{-n \frac{\varepsilon_o}{kT}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\varepsilon_o}{kT}}}$$

$$\overline{\varepsilon(\nu)} = \frac{\sum_n \varepsilon_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}}{\sum_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}} = \frac{\sum_n n \varepsilon_o e^{-n \frac{\varepsilon_o}{kT}}}{\sum_n e^{-n \frac{\varepsilon_o}{kT}}}$$

Fekete-test sugárzás V.

$$\sum_n n \varepsilon_0 e^{-n \frac{\varepsilon_0}{kT}} = \frac{d}{d(-1/kT)} \left(\sum_n e^{-n \frac{\varepsilon_0}{kT}} \right) = \frac{\varepsilon_0 e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}}}{\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}} \right)^2}$$

$$\overline{\varepsilon(\nu)} = \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/kT} - 1}$$

$$\lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} \overline{\varepsilon(\nu)} = \lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/kT} - 1} = kT$$

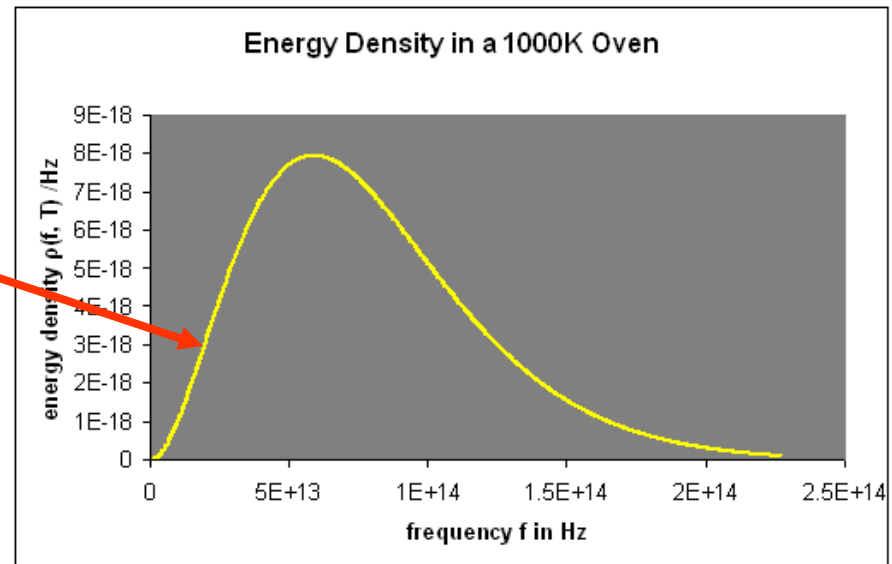
klasszikus fizika

$$\frac{dE}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT \quad (++) : \text{egység térf.})$$

$$dE = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \nu d\nu$$

Stefan-Boltzmann törvény

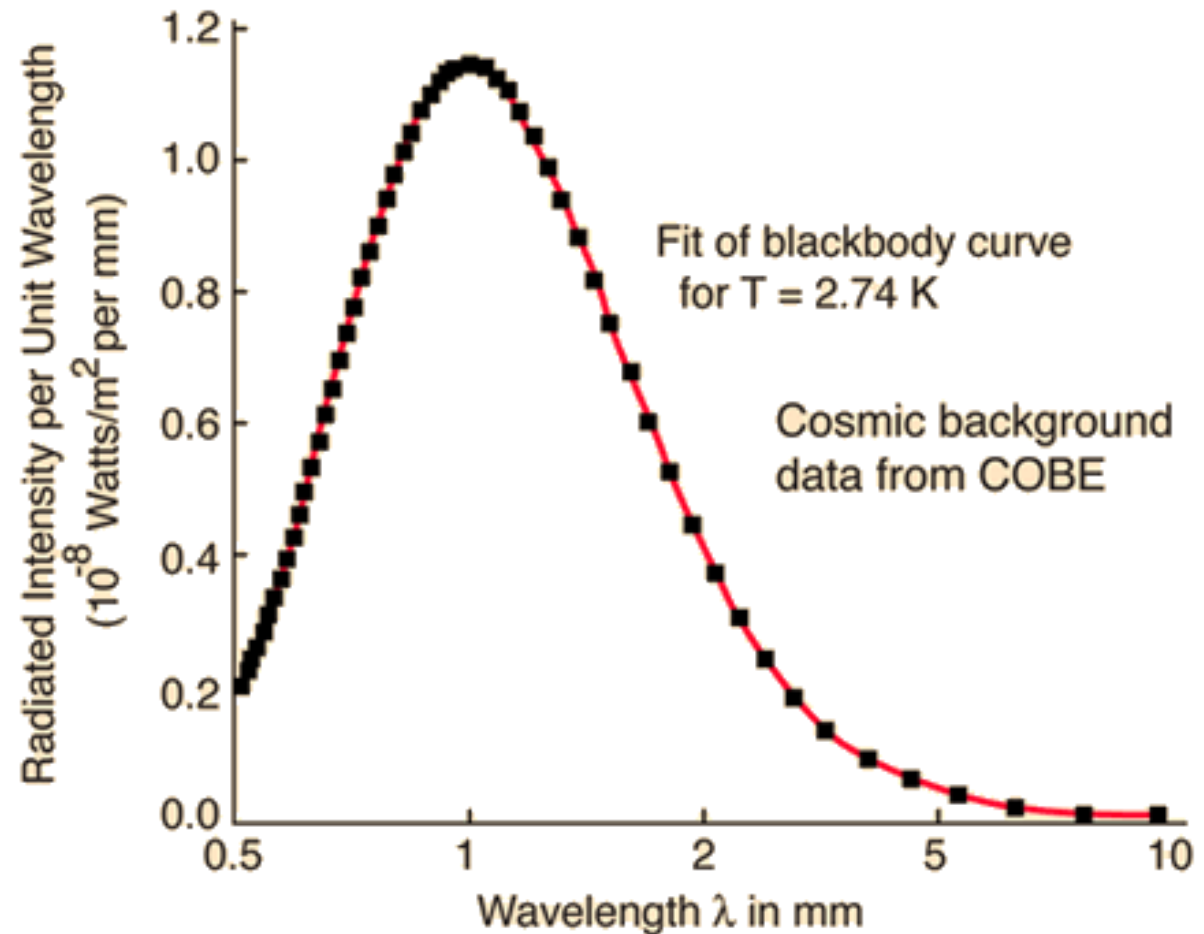
Wien törvény



Fekete-test sugárzás VI.



Max Planck
(Nobel díj, 1918)



Előzmények II.

H-atom

Hydrogen Absorption Spectrum



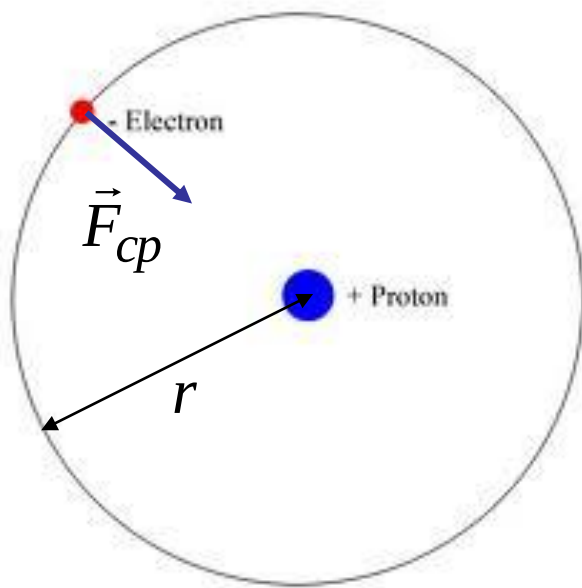
Hydrogen Emission Spectrum



400nm

700nm

H Alpha Line
656nm
Transition N=3 to N=2



$$v_{mn} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

?

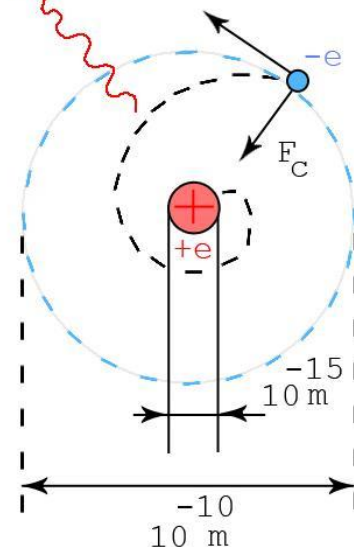
$$m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

$$n = m + 1, m + 2, m + 3, \dots$$

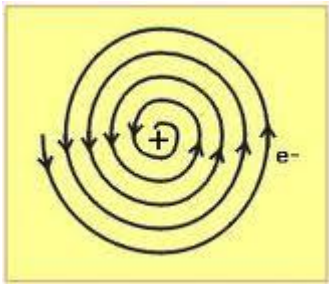
$$F_{cp} = m \frac{v^2}{r} = k \frac{q^2}{r^2} \rightarrow mv^2 = k \frac{q^2}{r}$$

$$E = \frac{1}{2} mv^2 - k \frac{q^2}{r} = -\frac{kq^2}{2r} = -\frac{\alpha}{2r}$$

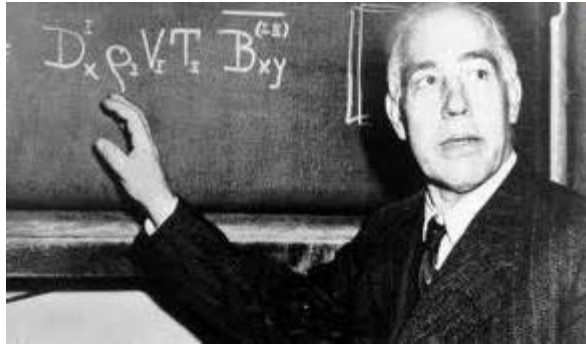
Körpályán mozgó elektron sugároz, tehát energiája csökken; így a körpálya sugara is csökken ...



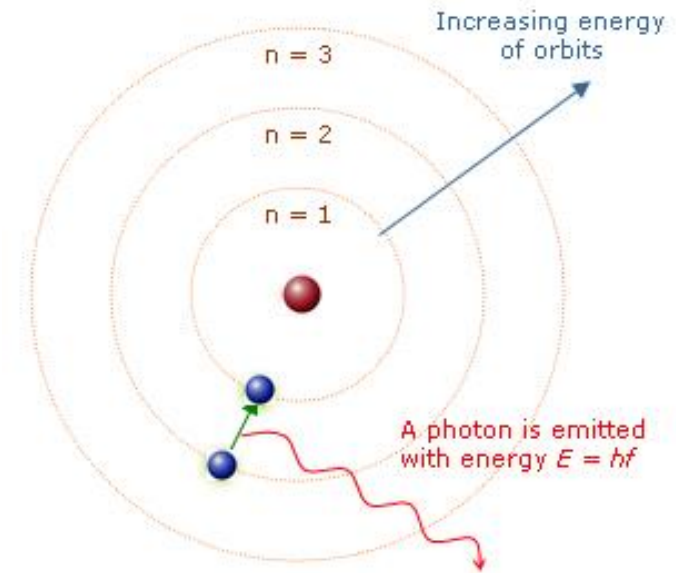
A Bohr-féle H-atom modell



???



Niels Bohr
(Nobel díj, 1922)



Bohr postulátumai:

1.)posztulátum:

Az elektron a hidrogén atomban a proton által kifejtett Coulomb erő hatására körpályán mozog.
De meghatározott energiájú körpályákon sugárzás nélkül tud keringeni.
Így ezek a pályák stabilak. („Stacionárius” mozgási állapotok)

3.)posztulátum:

Csak azok a (kör)pályák stabilak, amelyen az elektron pályamozgásból adódó **perdülete**: $L_n = n \cdot \hbar$

2.)posztulátum:

A Hidrogén akkor bocsát ki fényt, ha az elektronja egy magasabb energiájú pályáról egy alacsonyabb energiájú pályára "ugrik".
Ekkor a kibocsátott fény frekvenciája a következő

$$\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h}$$

A Bohr-féle H-atom modell

Láttuk: $\longrightarrow L_n = n \cdot \hbar = m v_n r_n \longrightarrow v_n = \frac{n \hbar}{m r_n}$

$F_{cp} = m \frac{v^2}{r} = k \frac{q^2}{r^2} \rightarrow m v^2 = k \frac{q^2}{r}$

$r_n = \frac{\hbar^2}{m \alpha} n^2$

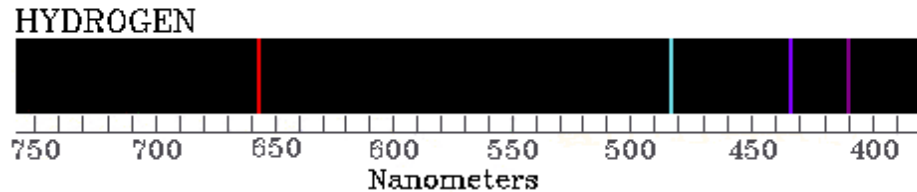
Azt is láttuk, hogy:

$E = \frac{1}{2} m v^2 - k \frac{q^2}{r} = -\frac{k q^2}{2r} = -\frac{\alpha}{2r}$

$E_n = -R \frac{1}{n^2}$

$E_n = -\frac{m \alpha^2}{2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}$

A Bohr-féle H-atom modell

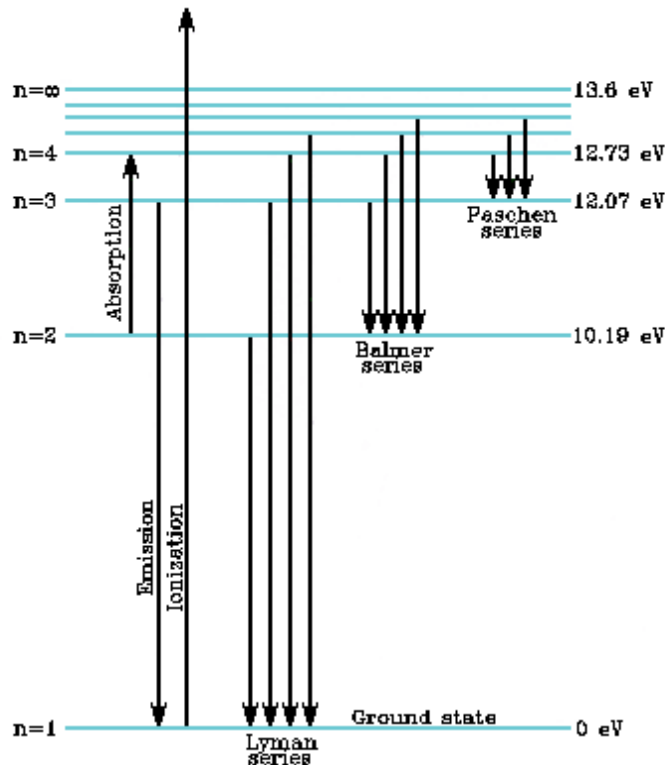


$$E_n = -R \frac{1}{n^2}$$

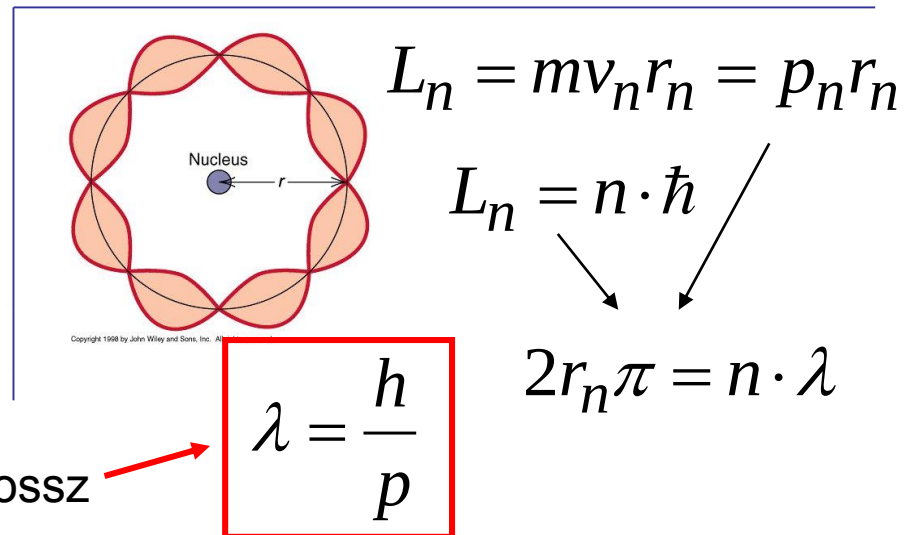
$$E_n = -\frac{E_o}{n^2} \rightarrow E_o = 13.6 \text{ eV}$$

$$h\nu_{nm} = E_n - E_m$$

$$\nu_{nm} = \frac{E_n - E_m}{h}$$



De Broglie
(Nobel díj, 1929)

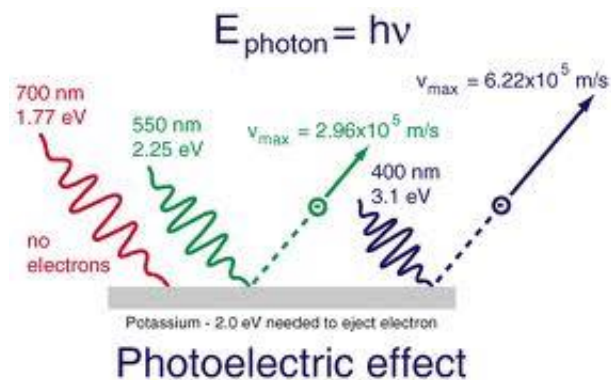
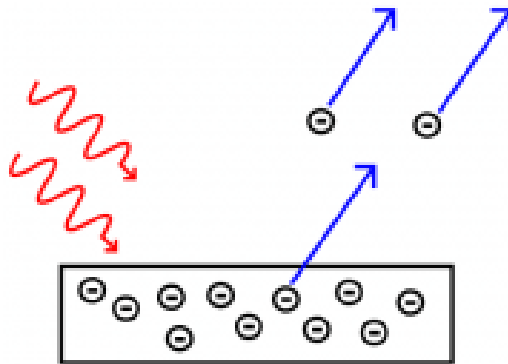
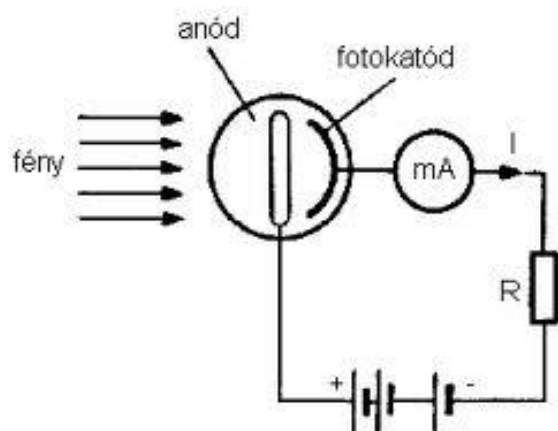


de Broglie hullámhossz

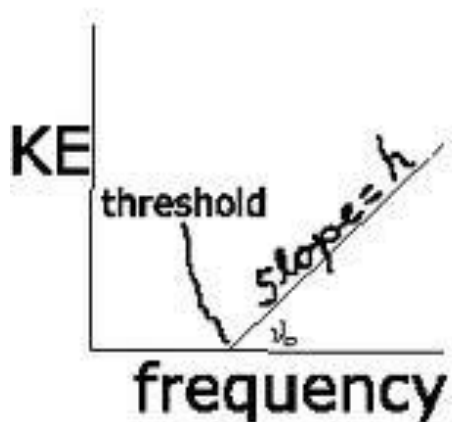
Előzmények III.

Foto-effektus

H.R. Hertz (1887), W.L.F.Hallwachs (1888), J.J.Thomson (1897)

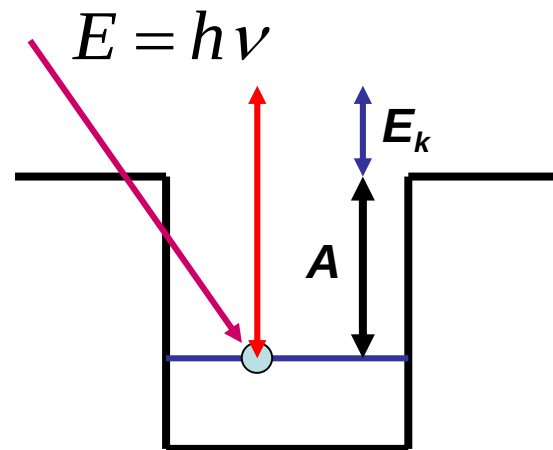


Einstein → foton (Nobel díj, 1921)



$$E_{k_{\max}} = h\nu - A$$

Kilépési munka



Előzmények IV.

Compton - effektus

Energia-megmaradás:

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

Impulzus-megmaradás: $\vec{p}_f = \vec{p}'_f + \vec{p}'_e$

Láttuk (rel. elm.): $E(p) = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2}$

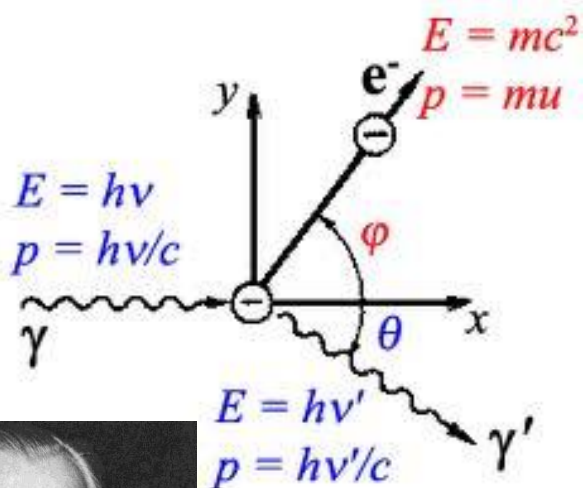
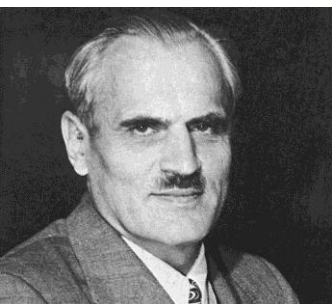
Fotonra: $m_0 = 0 \rightarrow E = cp \rightarrow p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \varphi + \frac{m_e u \cos \Theta}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \quad \text{és} \quad 0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \varphi - \frac{m_e u \sin \Theta}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

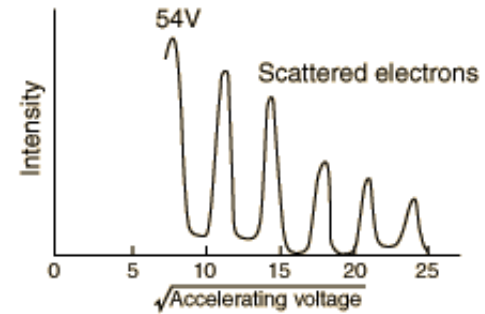
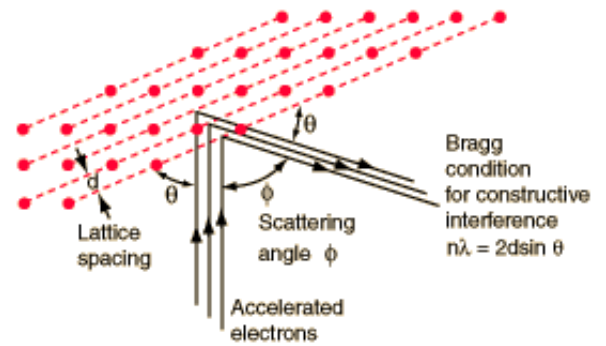
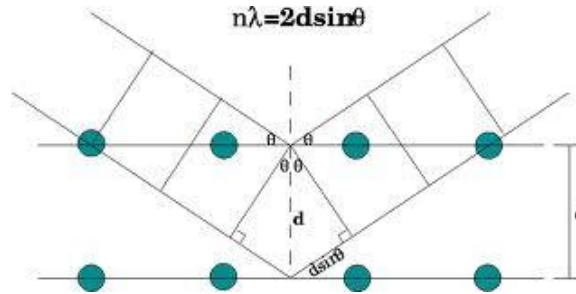
A. H. Compton
1892-1962
(Nobel díj, 1927)

$$\Delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \Lambda \cdot (1 - \cos \Theta)$$

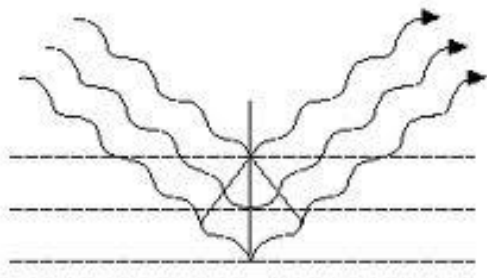
$$\Lambda \equiv \frac{h}{m_e c}$$



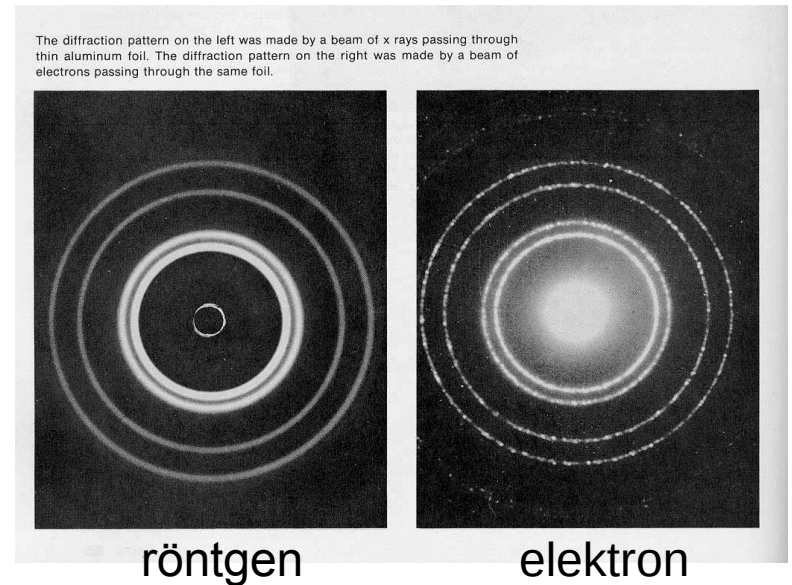
Előzmények V.



Davisson & Germer kísérlet



1937-es fizikai Nobel-díj



Felmerülő kérdések:

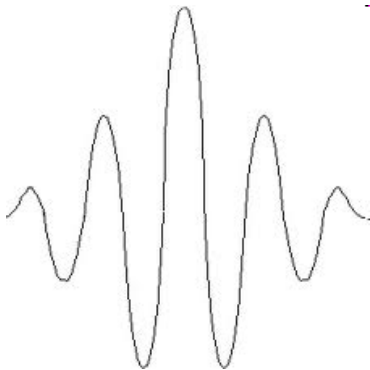
- 1.) Milyen dinamika szerint (azaz milyen hullámegyenlet szerint)) hullámzik az ami hullámzik
- 2.) Mi az a mi hullámzik?

Karinty Frigyes így tette volna fel a kérdést:

„Mi az a valami, ami valamit, valahogyan csinál?”

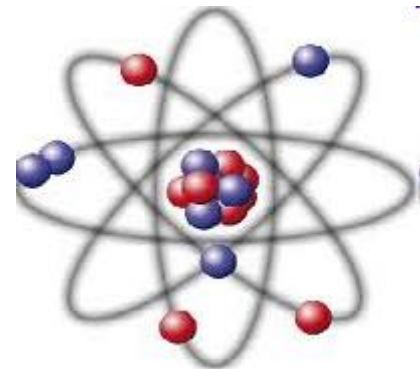
Foton: részecske vagy hullám?

Elektron: részecske vagy hullám?

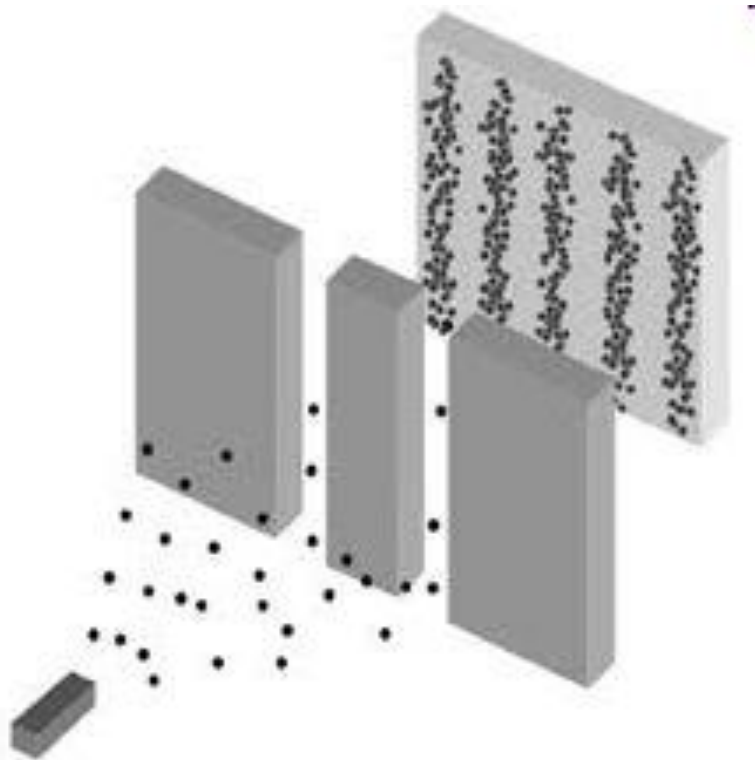


Mi az "igazság"?

Mi a fizikai realitás?



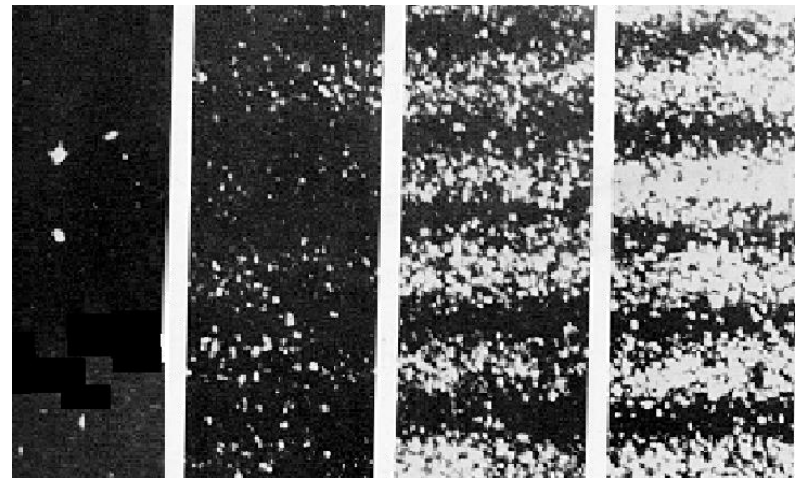
Kétréses kísérlet elektronokkal:



Interferencia
hullám-tulajdonság

Becsapódás, detektálás (elnyelés)
részecske-tulajdonság

?



A Schrödinger-egyenlet I.

$$L = \frac{\lambda}{2} n \quad \text{ahol } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lambda = \frac{2L}{n} \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{L} n$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow p = \hbar k$$

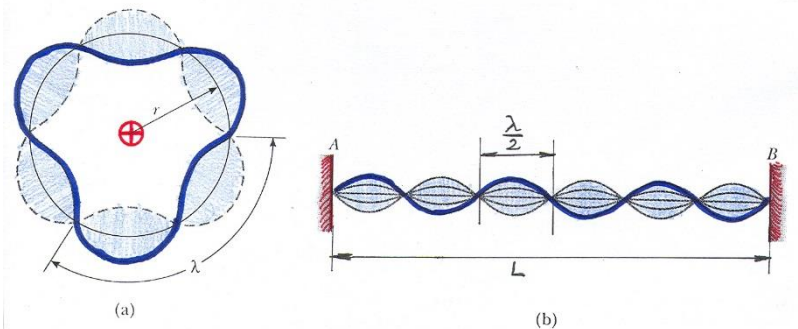
$$p = \hbar k = \frac{\hbar \pi}{L} n$$

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2$$

Tehát a „dobozba zárt” részecske energiája kvantált lesz!!!

de Broglie-féle állóhullám: $\psi_o(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) = A \sin(kx)$

Feladatunk, hogy kitaláljuk azt az egyenletet, amelynek megoldása éppen ez a függvény.



A Schrödinger-egyenlet II.

$$\frac{p^2}{2m} + V_o = E \quad \xrightarrow[V_o = 0]{p = \hbar k} \quad \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_o = E$$

Állóhullámra: $\frac{d^2}{dx^2} \psi_o = -k^2 \psi_o \rightarrow k^2 = -\frac{1}{\psi_o} \frac{d^2}{dx^2} \psi_o$



Erwin Schrödinger
(Nobel-díj 1933)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_o + V_o \cdot \psi_o = E \cdot \psi_o$$

Általánosítás 3D-re:

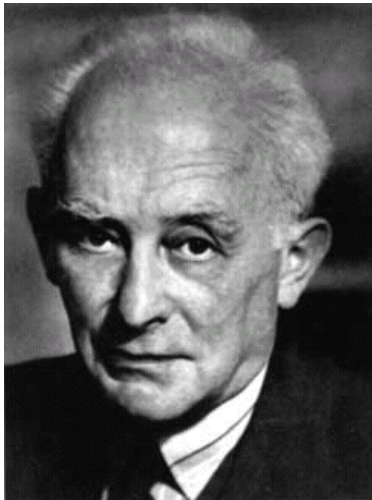
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \cdot \psi(\vec{r}) = E \cdot \psi(\vec{r})$$

*** Időfüggetlen Schrödinger egyenlet ***

Born-féle értelmezés



Max Born
(1882-1970)



(Nobel-díj 1954)

1954

$$|\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)$$

$$P_{\Delta V} = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \Delta V$$

$$P = \int_V |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV \rightarrow P = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1$$

Pontszerű részecskék vannak és a Kvantummechanika ezen pontszerű részecskék megtalálási valószínűségét határozza meg a Schrödinger egyenlet segítségével.