<u>Gömbszimmetrikus, *M* tömegű test körüli téridő vákuumban:</u>

(1) Vákuum: $T_{\alpha\beta} = 0$

(2) Ügyes koordinátarendszer-választással ki lehet használni a gömbszimmetriát.

Az Einstein-egyenlet analitikusan is megoldható, a megoldás, Schwarzschild-koordinátákkal felírva:

Schwarzschild-metrika (1916):

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$t = [-\infty, \infty]$
$r = (0, \infty]$ $\quad r \neq 2M$
$\theta = [0, \pi]$
$\varphi = [0, 2\pi]$

$d\tau$: a két közeli esemény téridőbeli "távolsága" (a két eseményt összekötő világvonalon haladó megfigyelő karóráján mért időtartam)

r, t, θ, φ: koordináták (mentális konstrukciók, mérhető fizikai tartalmuk általában nincs)

1

Schwarzschild-metrika, *térszerű* intervallummal elválasztott eseménypárra:

$$d\sigma^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$d\sigma$: a két közeli esemény téridőbeli "távolsága" (a két esemény közötti "méterrúd-távolság") (abban a lokális inerciarendszerben mért távolság a két esemény között, amelyben a két esemény egyidejű)

Kétféle *szingularitást* is észreveszünk:
$r = 0$: téridő-szingularitás (a geometria sajátja, fizikailag létezik)
$r = 2M$: koordináta-szingularitás (a szerencsétlen koordinátaválasztás eredménye)

A Schwarzschild-metrika az "egyenlítői síkban" ($\theta = konst. = 90^0$):

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr^2 - r^2 d\varphi^2$$

2

Painlevé-Gullstrand-metrika (Painlevé: 1921, Gullstrand: 1922):

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dT^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}}dTdr - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$$T = [-\infty, \infty]$$
$$r = (0, \infty]$$
$$\theta = [0, \pi]$$
$$\varphi = [0, 2\pi]$$

Kiküszöbüli a koordináta-szingularitást $r = 2M$-ben!

Painlevé-Gullstrand-metrika az "egyenlítői síkban" ($\theta = konst. = 90^0$):

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dT^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}}dTdr - dr^2 - r^2 d\varphi^2$$

3

A metrika: "VARÁZSKÉPLET". Ebből az egyetlen egyenletből (+ a MÖE-ből) rengeteg információ kinyerhető.

Példák:

1. A gömbszimmetrikus test köré épített gömbhéjak távolsága.
2. Fénykúpdiagramok, eseményhorizont.
3. Az energia (*E/m*) és az impulzusmomentum (*L/m*), mint mozgásállandók.
4. Szabad kő röppályája Schwarzschild-, ill. Painlevé-Gullstrand-"térképen".
5. A Merkúr perihélium-precessziójának számértéke.
6. A GPS-nél fellépő relativisztikus effektusok.
7. Legfeljebb mennyi ideig lehet életben maradni egy fekete lyuk eseményhorizontján belül?
8. Ha beleesünk egy fekete lyukba, mennyi ideig tart az utazás fájdalmas szakasza?
9. Hogy néz ki egy fekete lyuk, ha egy gömbhéjat építünk köré, és onnan nézzük? Hogy néz ki akkor, ha sugárirányban esünk felé?

stb.

4

1. A gömbszimmetrikus test köré épített gömbhéjak távolsága.

$$d\sigma^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

r hivatalos neve: „Schwarzschild-r koordináta“ (r: NEM a sugár!)

Az r-hez társítható szemléletes név (nem minden koordinátához van ilyen!): „redukált kerület“ [építünk egy gömbhéjat, méterrudakkal megmérjük a kerületét, elosztjuk 2π-vel]

Építsünk egy újabb gömbhéjat közvetlenül az első köré. Az új gömbhéj kerülete legyen $2\pi(r+dr)$. Mekkora a két héj távolsága?

$dt = 0$, $d\varphi = 0$ $\rightarrow$

$$d\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}dr$$

példák: Föld, neutroncsillag, fekete lyuk

5

2. Fénykúpdiagramok, eseményhorizont.

Kitérő: sík téridő, fénykúpdiagram a 4D téridő $[x,t]$ „szeletén“.

Metrika: $d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

$[x,t]$ szelet $\rightarrow$ y = konst., z = konst. ($dy = 0$, $dz = 0$)
A két eseményt fénysugár kösse össze $\rightarrow$ $d\tau = 0$

$$0 = dt^2 - dx^2$$

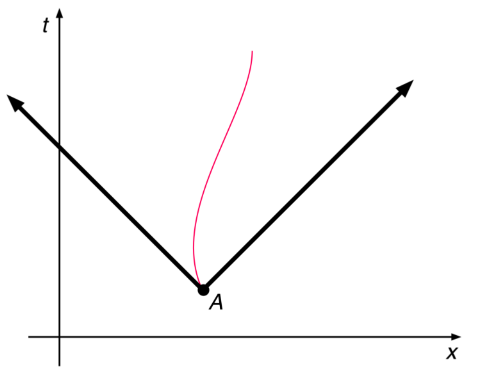
$$\frac{dt}{dx} = \pm 1$$ (differenciálegyenlet, leírja, hogy milyen alakúak a fénysugarak világvonalai ezen a „térképen“)

Megoldás:

$$t - t_A = \pm(x - x_A)$$

6

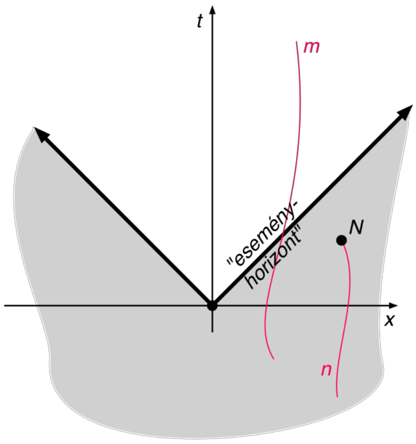
$$t - t_A = \pm(x - x_A)$$



← „fénykúpdiagram“

Az A eseményen jelen levő űrhajós világvonala csakis az A-ból kiinduló fénykúpon <u>belül</u> folytatódhat.

7



Az „eseményhorizont“: fénysugarak által alkotott 3D hiperfelület, amelyet csak egyik irányban léphet át egy anyagi részecske

Az „eseményhorizont“ tulajdonságai:

1. Nem látunk be mögé. Ha az *N* eseményben vagyunk, onnan az eseményhorizont mögötti eseményeket nem láthatjuk. Az eseményhorizonton túlról nem juthat el az *N* eseménybe információ. [Analóg a hétköznapi horizont (=„látóhatár“) fogalmával.]
2. Ha egyszer átlépünk ezen a felületen (pl. *m* világvonal), akkor már nem juthatunk vissza a szürkével jelzett tartományba.

8

Fénykúpdiagram, Schwarzschild-“térkép“, [r,t]-szelet:

$$d\tau^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

[r,t] szelet, fénysugár $\rightarrow$ $d\theta = 0,\ d\varphi = 0,\ d\tau = 0$

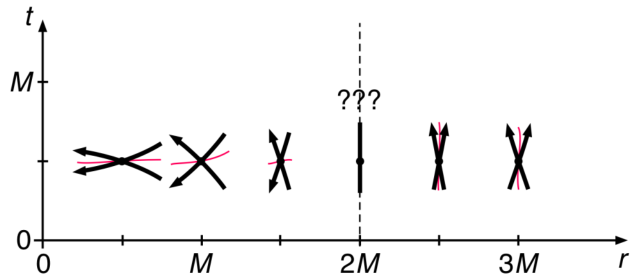
$$0 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}dr^2$$

$$\frac{dt}{dr} = \pm\frac{r}{r-2M}$$

(differenciálegyenlet, leírja, hogy milyen alakúak a fénysugarak világvonalai a Schwarzschild [r,t]-„térképen“)

Megoldás: $$t - t_A = \pm\left(r - r_A + 2M\cdot\ln\left|\frac{r/M - 2}{r_A/M - 2}\right|\right)$$

9



tömegpontok (űrhajósok, kövek, stb.) világvonalai

[1] Miért pont ilyen irányokba rajzoltam a fénykúpokon a nyilakat?

[2] Az $r = 2M$ felé kívülről közeledő kő *végtelen* Schwarzschild-t múlva éri el az $r = 2M$-et. Azaz soha nem éri el?!

[3] Az $r < 2M$ tartományban egy űrhajós úgy is haladhat, hogy a világvonalán $dt < 0$?! Visszafelé halad az időben?!

[4] Az $r < 2M$ tartományban egy űrhajós mozgására $|dr/dt| > 1$ is teljesülhet?! Az ilyen űrhajós gyorsabban halad, mint a fény?!

10

Fénykúpdiagram, Painlevé-Gullstrand-“térkép“, [r,T]-szelet:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dT^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}}dTdr - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

[r,T] szelet, fénysugár $\rightarrow$ $d\theta = 0$, $d\varphi = 0$, $d\tau = 0$

$$0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dT^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}}dTdr - dr^2$$

$$\frac{dr}{dT} = -\sqrt{\frac{2M}{r}} \pm 1$$

(differenciálegyenlet, leírja, hogy milyen alakúak a fénysugarak világvonalai a Painlevé-Gullstrand [r,T]-„térképen“)

11

Megoldás:

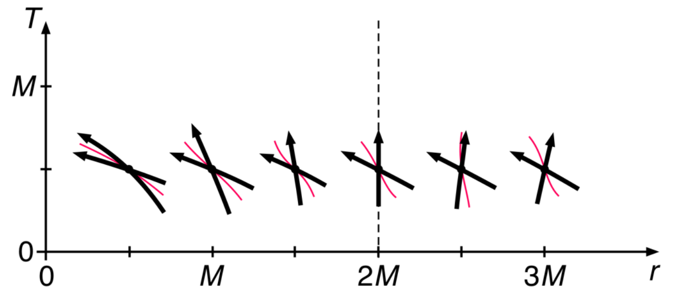
1. (r_A,T_A)-ból befelé haladó fénysugárra:

$$T - T_A = (r_A - r) - 4M\left(\sqrt{\frac{r_A}{2M}} - \sqrt{\frac{r}{2M}}\right) + 4M \cdot \ln\left(\frac{1 + \sqrt{\frac{r_A}{2M}}}{1 + \sqrt{\frac{r}{2M}}}\right)$$

2. (r_B,T_B)-ből „kifelé“ haladó fénysugárra:

$$T - T_B = (r - r_B) + 4M\left(\sqrt{\frac{r}{2M}} - \sqrt{\frac{r_B}{2M}}\right) + 4M \cdot \ln\left(\frac{1 - \sqrt{\frac{r}{2M}}}{1 - \sqrt{\frac{r_B}{2M}}}\right)$$

12



nincs koordináta-szingularitás az $r = 2M$-ben

Az $r = 2M$ különleges hiperfelület:

(1) „Eseményhorizont“, hiszen fénysugarak által alkotott, egyirányú felület.

(2) Ha egyszer r > 2M felől átlépünk rajta, akkor (a) többet soha nem juthatunk el $r = \infty$-be („nincs menekvés“), és (b) a világvonalunk véges sajátidőn belül az $r = 0$-ban végződik („biztos halál“)

Az $r = 2M$ hiperfelület a fekete lyuk ESEMÉNYHORIZONTJA.

(Emlékeztető: az $r = 0$ hiperfelület: téridő-szingularitás.)

13