Fizika alapismeretek

Dinamika II.
Megmaradási tételek

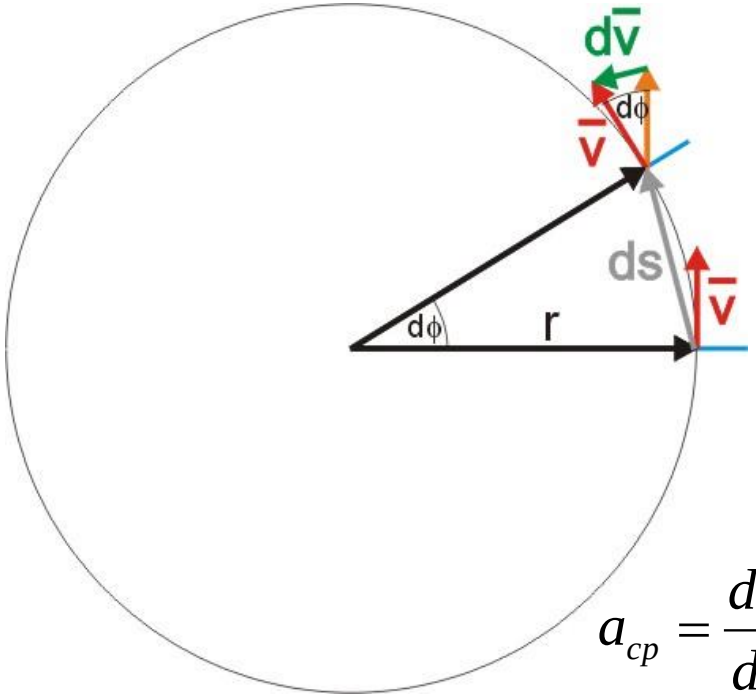
Kornis János
Fizika Tanszék

Erőtörvények

Azokat az összefüggéseket, melyek megadják az erőt (irányát és nagyságát) a környezet és a test fizikai jellemzőinek függvényében, erőtörvényeknek nevezzük.

- gravitációs erő
- nehézségi erő
- súrlódási erő
- rugalmas erő (rugóerő, lineáris erőtörvény)
- súly
- közegellenállás

Egyenletes körmozgás



$$ds = r d\varphi$$

$$dv = v d\varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$$ szögsebesség [rad/s]

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{r d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi} = r\omega$$

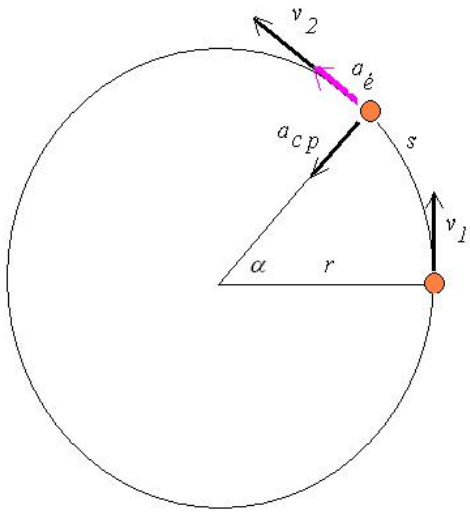
$$a_{cp} = \frac{dv}{dt} = \frac{v d\varphi}{dt} = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$ centripetális gyorsulás [rad/s^2]

F=ma

$$\vec{F}_{cp} = m\vec{a}_{cp}$$

Egyenletesen változó körmozgás

Az érintő irányú sebesség nagysága is változik, van érintő irányú gyorsulás is, amely állandó



szögelfordulás

$$\alpha = \alpha_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

megtett út

$$s = r\alpha = r\alpha_o + r\omega_o t + r\frac{1}{2}\beta t^2$$

szögsebesség

$$\omega = \omega_o + \beta t$$

kerületi sebesség

$$v = r\omega = r\omega_o + r\beta t$$

szöggyorsulás

$$\beta = állandó$$

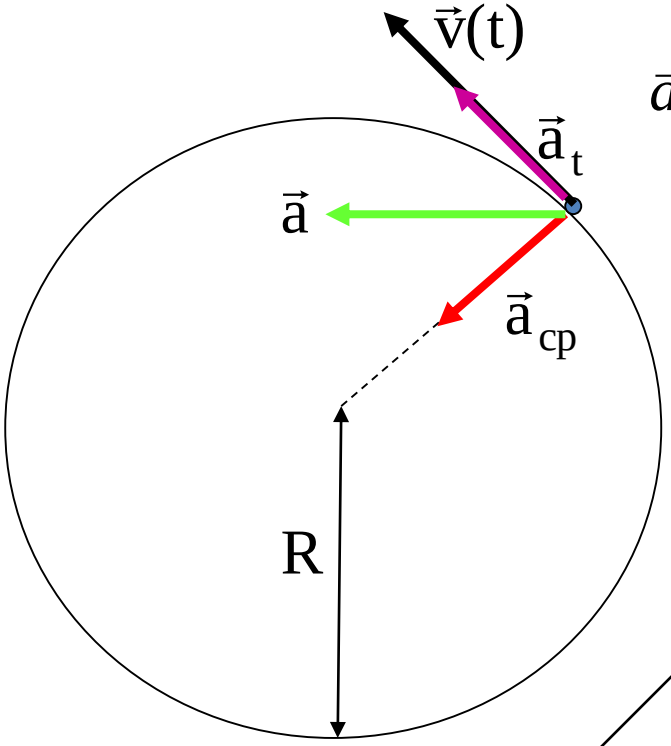
kerületi gyorsulás

$$a_é = r\beta$$

centripetális gyorsulás

$$a_{cp} = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

Gyorsuló körmozgás



$$\vec{a} = \vec{a}_{cp} + \vec{a}_t$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} \qquad \vec{a}_{cp} \perp \vec{a}_t$$

$$\Downarrow$$

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dr\omega}{dt} = r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = r\ddot{\varphi} \qquad \vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

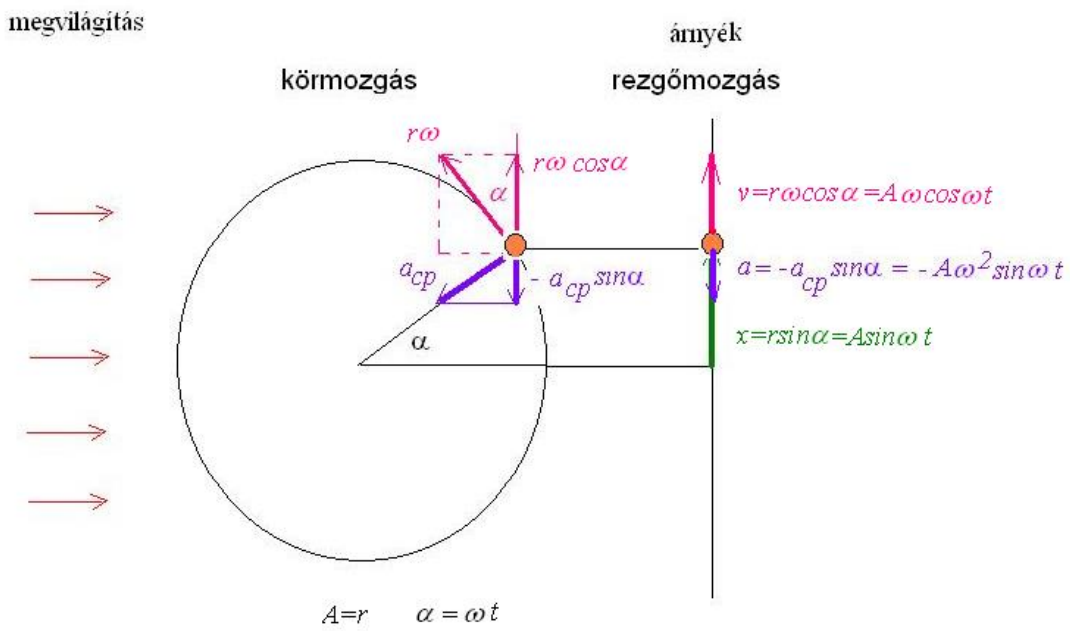
F=ma

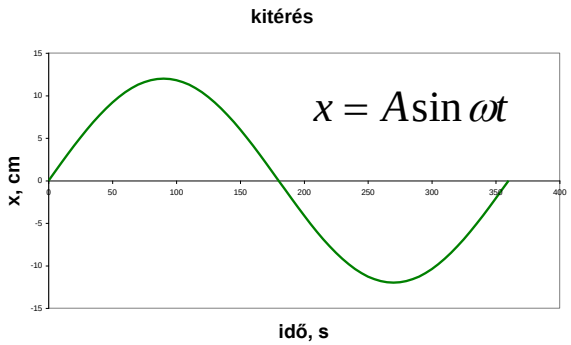
$$\vec{F}_t = m\vec{a}_t$$

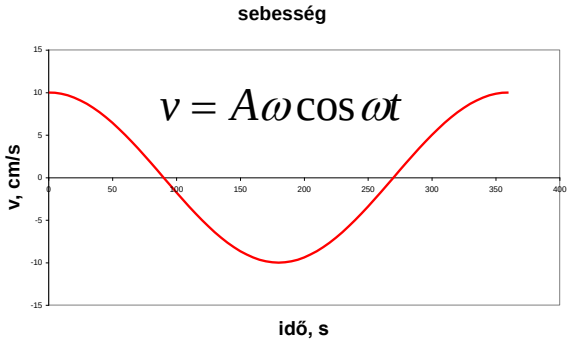
egyenletesen gyorsuló körmozgás

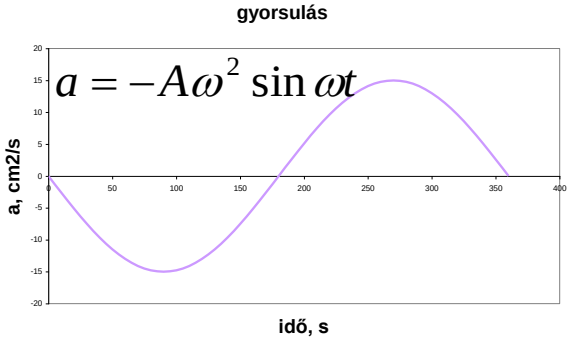
$$\omega = \beta t \qquad \varphi = \frac{1}{2}\beta t^2$$

Harmonikus rezgőmozgás









a maximális kitérés az ***amplitúdó, A***
egy rezgési periódus ideje ***a rezgésidő, T***
a sebesség a kitéréssel egy irányú
a gyorsulás a kitéréssel ellentétes irányú

Fontosabb erőtörvények

Rugalmas erő

Egyenes vonalú harmonikus rezgőmozgás

$$a_x = -\omega^2 x$$

$$\Downarrow$$

$$F_x = -m\omega^2 x$$

Lineáris erőtörvény:

$$F_x = -Dx$$

$$\vec{F} = -D\vec{r}$$ általános alak

A közegellenállás

Gáznemű vagy folyékony közegbe teljesen bemerülő, a közeghez viszonyított állandó sebességgel mozgó testre a sebességgel ellentétes erő, a **közegellenállás** hat.
Kis sebességek esetén, amikor a szilárd test körül kialakuló áramlás lamináris, az ellenállás gyakorlatilag a közeg rétegeinek belső súrlódásából származó súrlódási ellenállás.
A súrlódási ellenállás jó közelítéssel egyenesen arányos a sebességgel:

$$\vec{F} = -b\vec{v}$$

A b együttható a közeg anyagi minőségétől és a test alakjától függ, SI mértékegysége N s / m.

Nagyobb sebességeknél a test mögött erős örvényképződés jön létre, ilyenkor a közegellenállás közelítőleg a közeg ρ sűrűségével és a sebesség négyzetével egyenesen arányos. Az ellenállás túlnyomó része a test mögötti örvényektől származó ún. nyomási ellenállás**.** Ha a test alakja nem túl bonyolult és a relatív sebességre szimmetrikusan helyezkedik el, az erő iránya ellentétes a sebességgel. A teljes ellenállás így jó közelítéssel

$$\vec{F} = -cA\frac{1}{2}\rho\, v^2 \frac{\vec{v}}{v} \qquad v < v_{hang}$$

A a test a haladási irányra merőleges keresztmetszete
c a test alakjától függő, dimenzió nélküli ellenállási tényező

Mercedes E-osztály

$$c_w = 0{,}26 - 0{,}29$$

3. példa

Szabadesés légellenállással

$$ma = mg - F_k$$

$$F_k = \frac{1}{2}\rho v^2 cA$$

$$ma = mg - kv^2$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{k}{m}[v(t)]^2$$ a mozg. diff. egy.

$$v(t) = \sqrt{\frac{2mg}{\rho Ac}}\tanh\left(t\sqrt{\frac{g\rho cA}{2m}}\right)$$ megoldás

$$v_t = \sqrt{\frac{2mg}{\rho Ac}}$$ végsebesség

$$v_t = 90\sqrt{d}$$

- ember (d~0,6m) : 70m/s
- macska (d~0,2m) : 40m/s
- rovar (d~0,01m) : 9m/s

Impulzus (erőlökés)

$$\vec{I} = m\vec{v} \qquad \left[\frac{kgm}{s}\right]$$

„A mozgás megváltozása arányos a külső mozgató erővel, és annak az egyenesnek irányában megy végbe, amelyen ez az erő hat.”

Az anyagi pont úgy mozog, hogy az impulzus idő szerinti differenciálhányadosa egyenlő az anyagi pontra ható erővel

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{F}$$

Newton II. axiómája

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{F}$$

általánosabb kifejezés, mivel *m* függhet az időtől (pl. rakéta mozgása, elemi részecskék relativisztikus sebességű mozgása)

$$\frac{dm\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \qquad m\vec{a} = \vec{F}$$

m nem függhet az időtől!

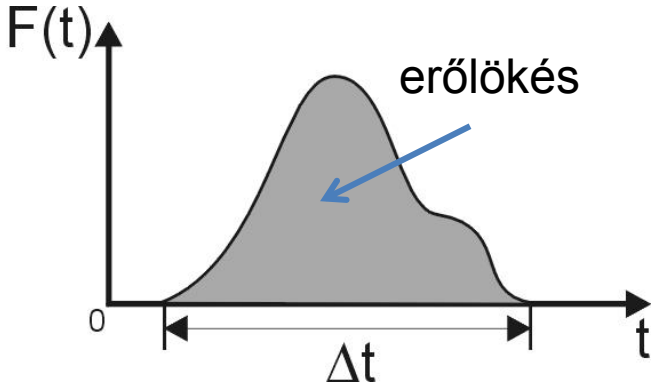
Erőlökés

Ha az **F** erő állandó egy rövid Δt ideig, akkor

az anyagi pont impulzusának megváltozása Δt idő alatt:

$$\Delta\vec{I} = \vec{I}_2 - \vec{I}_1 = \underbrace{\vec{F}\Delta t}_{\text{Erőlökés}}$$

A sebesség megváltozását nem egyedül az erő szabja meg, hanem az erő és az erőhatás idejének szorzata!



$$\int_{t_0}^{t} \vec{F}dt = \int_{p_0}^{p} d\vec{I} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt = \Delta\vec{I}$$

Impulzustétel

Ha az erő az anyagi pontra a t_1 kezdeti és t_2 végső időpontok közötti intervallumban hat, akkor az impulzus megváltozását az **F**(t) erőnek ezen két időpont közötti integrálásával kapjuk:

$$\Delta\vec{I} = \vec{I}_2 - \vec{I}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt$$

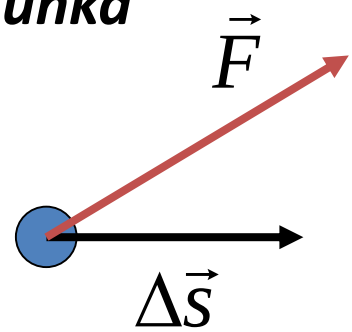
Impulzus megmaradásának tétele

Ha az anyagi pontra nem hat erő vagy a rá ható erők eredője zérus, az anyagi pont impulzusa időben állandó.

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{I} = \text{állandó}$$

Megmaradási törvények

Munka



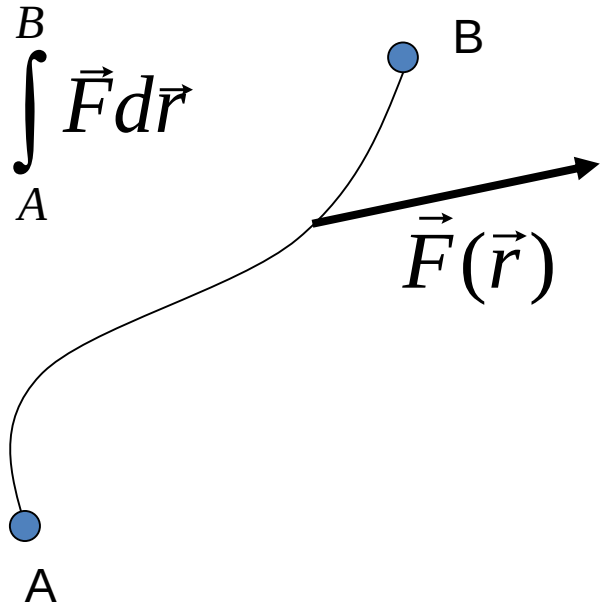
$$\vec{F} = const.$$

$$\Delta W = \vec{F}\Delta\vec{s} = F\Delta s\cos\alpha$$

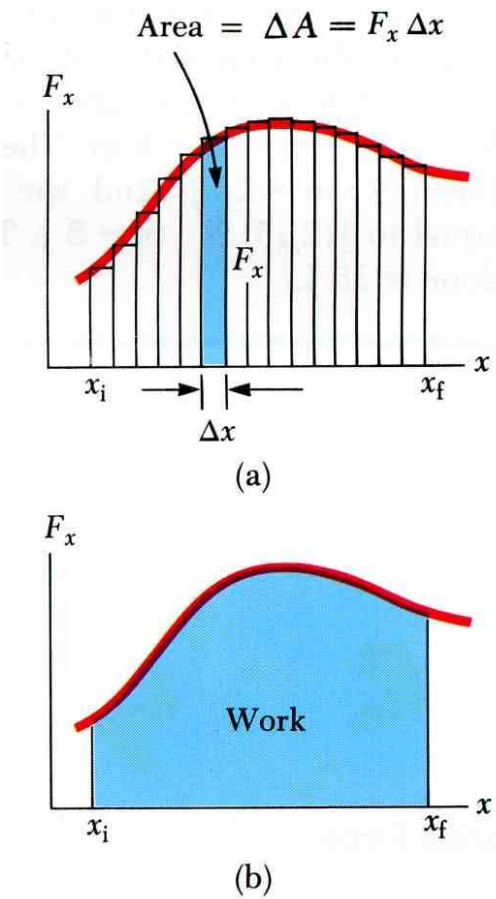
SI mértékegysége: Joule (Nm)

Ha $\vec{F} \neq const.$

$$W = \int_A^B \vec{F}d\vec{r}$$



1D.



Munkatétel

$$W = \int_1^2 \vec{F} d\vec{s}$$

$$W = \int_1^2 m\vec{a} d\vec{s} = m\int_1^2 \frac{d\vec{v}}{dt}(\vec{v}dt) = m\int_1^2 \vec{v} d\vec{v} = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Mozgási energia: $\frac{1}{2}mv^2$

Munkatétel: $W = \Delta E_k$

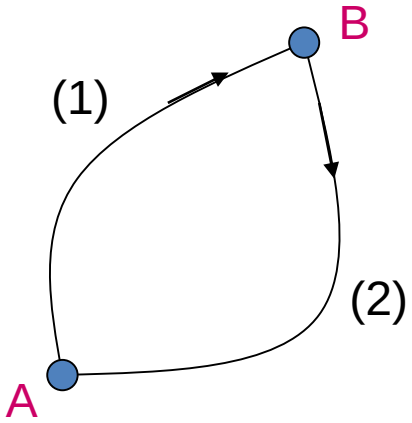
Átlagteljesítmény: $P = \frac{W}{t}$ SI mértékegysége: Watt (J/s)

Pillanatnyi teljesítmény: $P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$

Konzervatív erők

- Ha az F erő munkája *W, akkor –W az F erő ellenében* végzett munka.
- Ha a tömegpontra több erő hat, az eredő erő munkája egyenlő az egyes erők munkáinak algebrai összegével.
- A végzett munka általában függ a pályától.

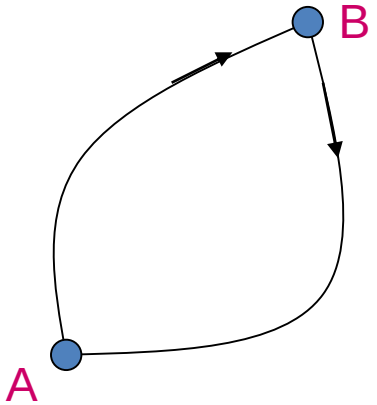
Konzervatív erők:
Olyan erők, melyeknek az anyagi ponton végzett munkája független a kezdő és végpontot összekötő pályától, csak a kezdő és végpont helyétől függ.



$$W_1 = W_2$$

vagy
Olyan erők, melyeknek bármely zárt görbe mentén végzett munkájuk zérus.

$$\oint \vec{F} d\vec{s} = 0$$



A gravitációs erő munkája

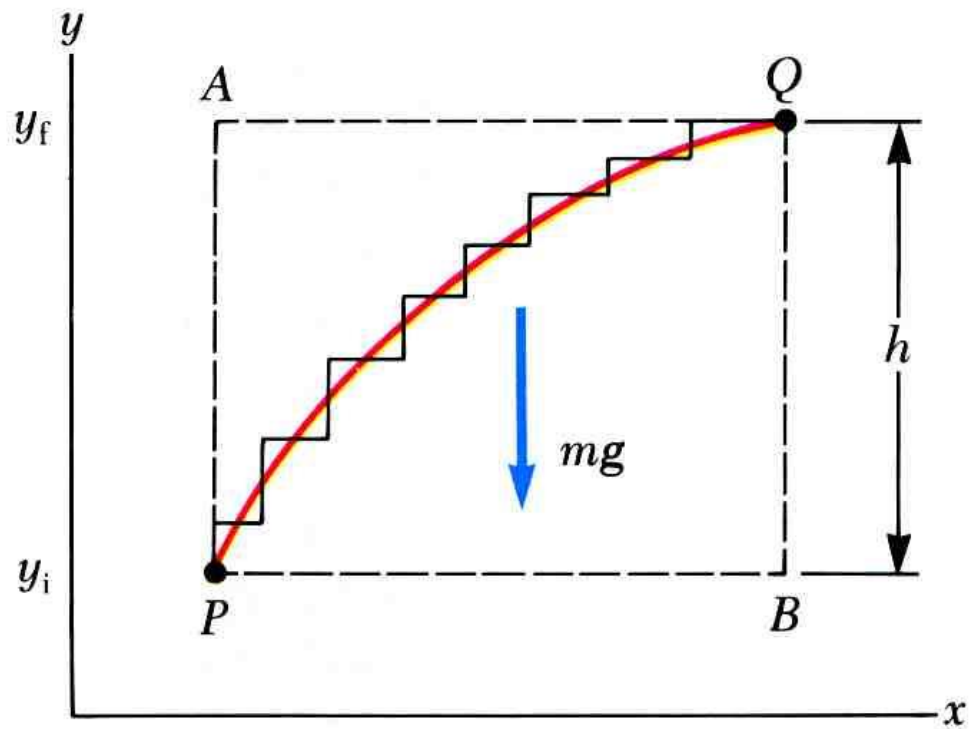
$$F_{gr} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$W_{gr} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{s} = \int_1^2 G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = Gm_1m_2\int_1^2 \frac{1}{r^2}dr = Gm_1m_2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

A Föld felszíne közelében:

$$W = mgh$$

A nehézségi erő konzervatív erő.

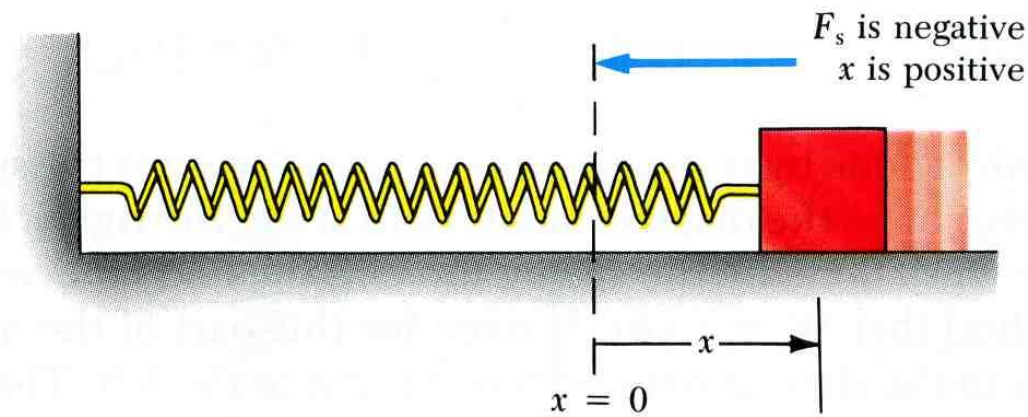


Rugóerő munkája

$$F_r = F(x) = -Dx$$

A rugóerő munkája, ha a kitérés *x_1–ről x_2-re változik:*

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = -\int_{x_1}^{x_2} Dx dx = -\left(\frac{1}{2}Dx_2^2 - \frac{1}{2}Dx_1^2\right)$$



A rugóerő konzervatív erő.

Súrlódási erő munkája

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_s d\vec{r} = -\int_{s_1}^{s_2} F_s ds = -F_s \int_{s_1}^{s_2} ds = -F_s s_{12}$$

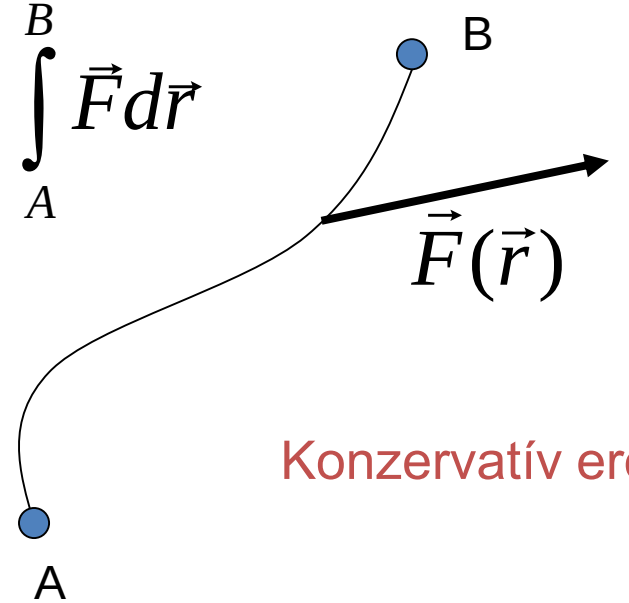
Kényszererők munkája

- A kényszererő merőleges a felületre.
- *Ha a kényszert jelentő felület nyugalomban van az adott vonatkoztatási rendszerben:*
  ekkor a kényszererő merőleges a sebességre, a kényszererő munkája zérus. (pl. rögzített lejtőn lecsúszó anyagi pont, fonálhoz erősített, körpályán mozgó test)
- *Ha a kényszert jelentő felület mozog az adott vonatkoztatási rendszerben:*
  a test sebessége általában nem esik a felület érintőjének irányába, ezért a kényszererő általában nem merőleges a sebességre, és így munkája nem zérus.

Potenciális energia

Láttuk:

$$W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r}$$



Konzervatív erő!!!

A potenciális energia megváltozása:

$$\Delta U = -W$$

$$\boxed{\Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B \vec{F} d\vec{r}}$$

$$\left(U = E_h = E_{pot.}\right)$$

A rugóban tárolt potenciális energia

Láttuk: $$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = -\int_{x_1}^{x_2} Dx dx = -\left(\frac{1}{2}Dx_2^2 - \frac{1}{2}Dx_1^2\right)$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}Dx^2}$$

Tömegpont gravitációs potenciális energiája

Láttuk: $$W_{gr} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{s} = \int_1^2 G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = Gm_1m_2\int_1^2 \frac{1}{r^2}dr = Gm_1m_2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$\boxed{U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}}$$

Ha $F_{gr} = mg$ (A Földfelszín közelében)

Láttuk: $W_{gr} = mgh \longrightarrow \boxed{U = mgh}$

Az energia megmaradása:

Láttuk: munkatétel: $\underbrace{W = \Delta E_k \quad \text{és} \quad \Delta U = -W}$

$$-\Delta U = \Delta E_k$$

$$\Downarrow$$

Csak konzervatív erők hatnak!

$$-U_2 + U_1 = E_{k_2} - E_{k_1}$$

$$\Downarrow$$

Az energia megmaradása:

$$\boxed{\underbrace{E_{k_1} + U_1}_{E_1} = \underbrace{E_{k_2} + U_2}_{E_2}}$$

Ha disszipatív erők is fellépnek: $W = -\Delta U + W_{nemk.}$

$$\boxed{E_{k_1} + U_1 + W_{nemk.} = E_{k_2} + U_2}$$

Egy egyszerű példa:

Legalább mekkora sebességgel kell az űrhajót a Földről elindítani ahhoz, hogy az kijusson a világűrbe (és ne essen vissza)?

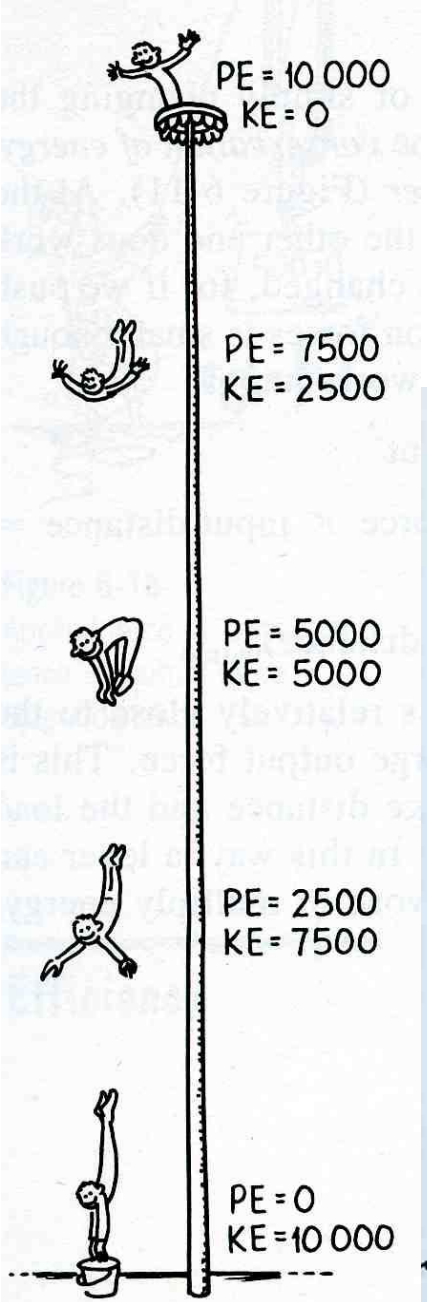
M: a Föld tömege m: rakéta tömege
R: a Föld sugara

$$U_1 = U(r = R) = -G\frac{Mm}{R} \qquad U_2 = U(r >> R) \approx 0$$

$$E_{k_1} + U_1 = E_{k_2} + U_2 \qquad \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = 0$$

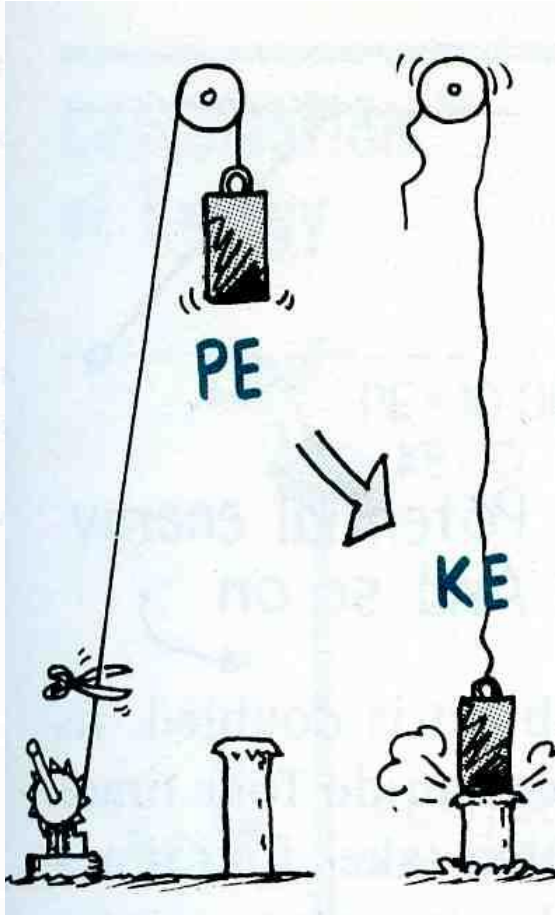
$$v = \sqrt{2G\frac{M}{R}} = \sqrt{2G\frac{M}{R^2}R} = \sqrt{2gR} \approx 11200\ \mathrm{m/s}$$

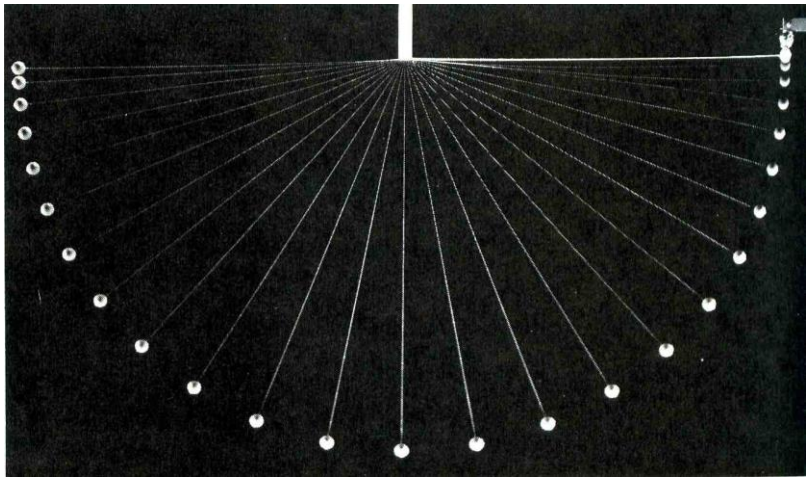
A mechanikai energia megmaradásának tétele



$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = E_{\text{pot max}} = E_{\text{kin max}}$$

$$E = mgh + \frac{1}{2}mv^2 = mgh_{\max} = \frac{1}{2}mv^2_{\max}$$

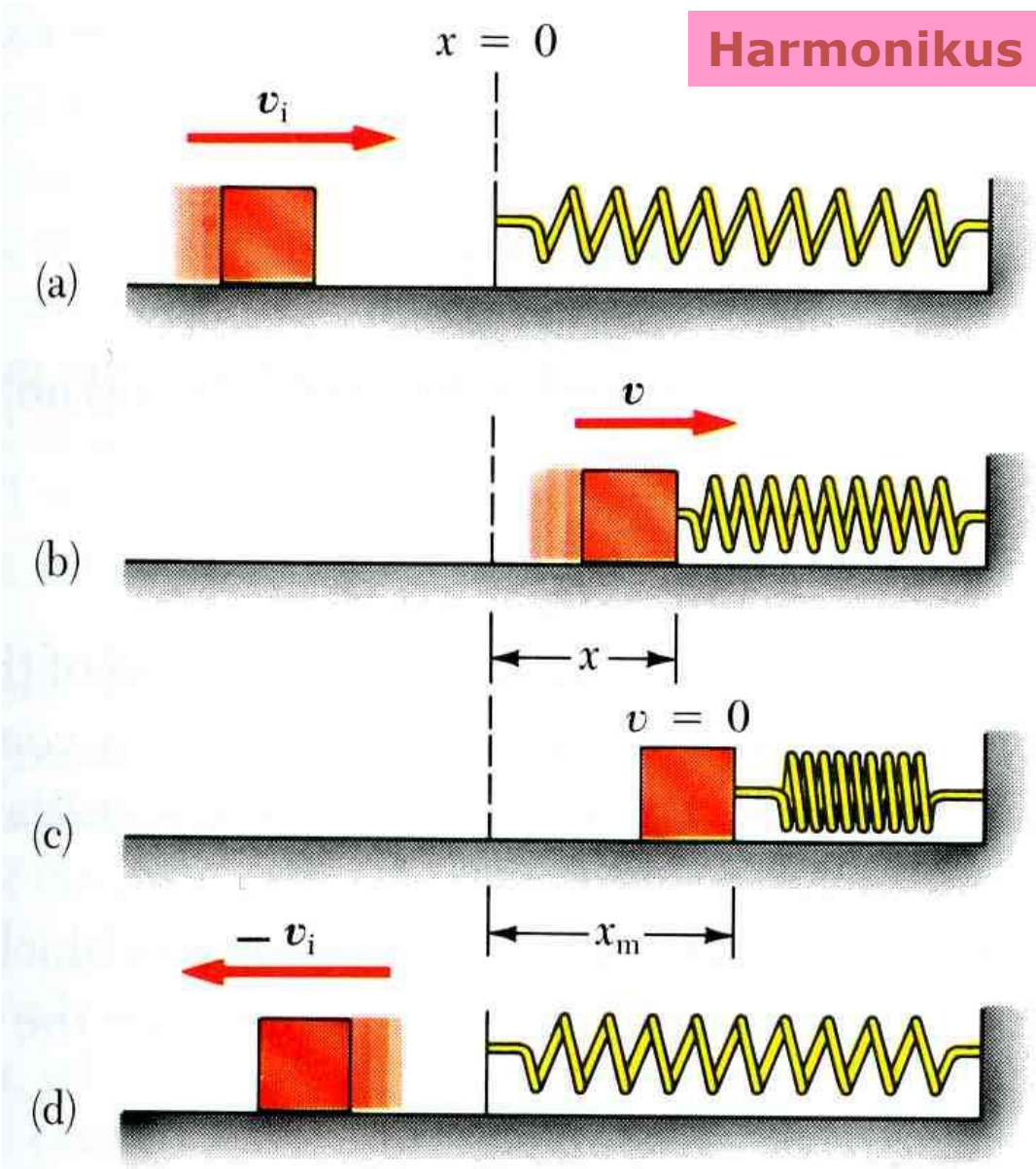




http://techtv.mit.edu/collections/walterlewinvideos/videos/528-work-potential-energy-demo-lecture-11

A mechanikai energia megmaradásának tétele

Harmonikus rezgőmozgás esetén



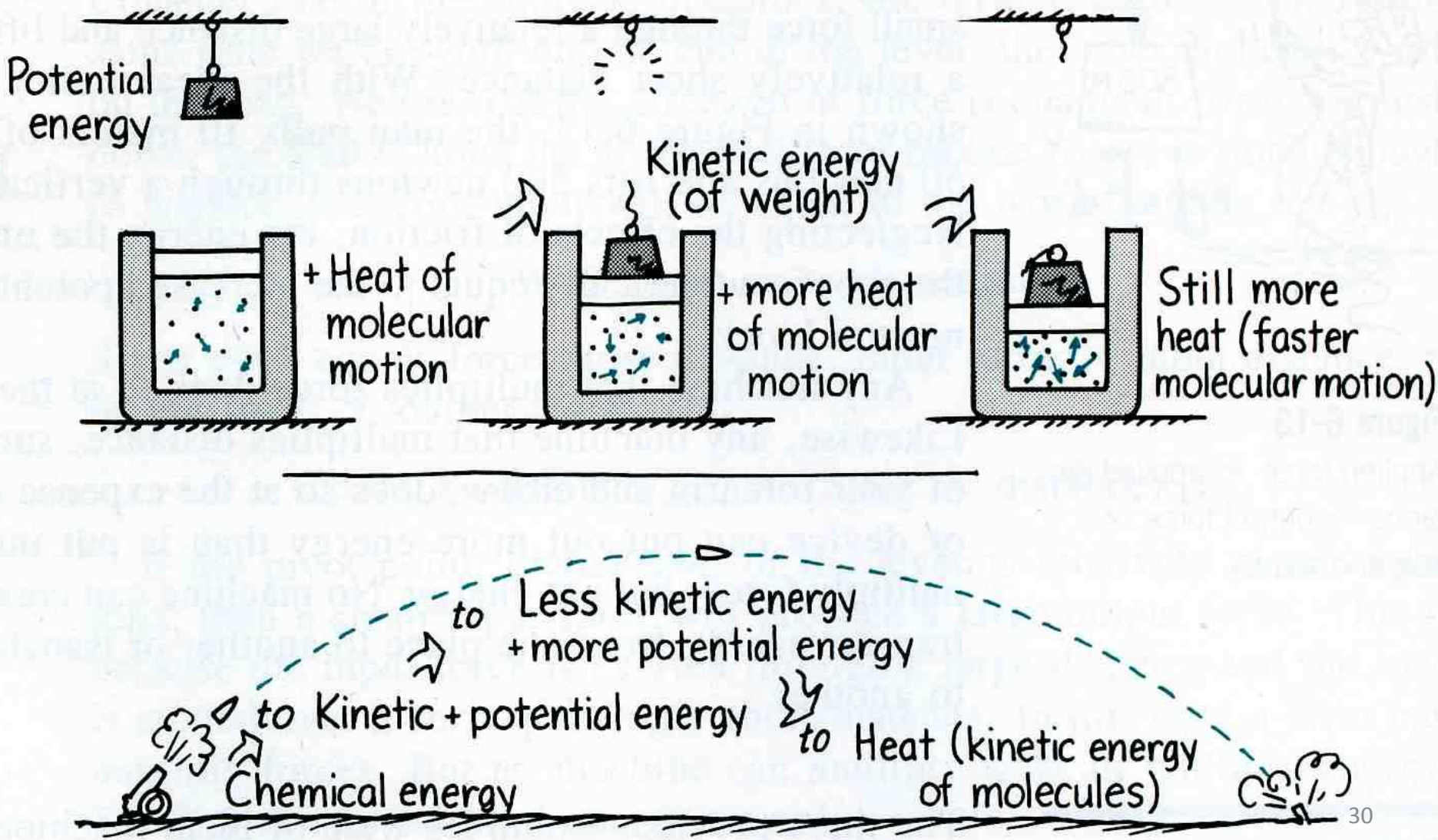
$$E = \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$E = \frac{1}{2} k x_m^2$$

$$E = \frac{1}{2} m v_i^2$$

A nemkonzervatív erők jelenléte esetén is fennáll a mechanikai energia megmaradásának tételénél sokkal átfogóbb <u>általános energia-megmaradás elve</u>, amely valamennyi fajta energia összegének állandóságát fejezi ki.



Kapcsolat a konzervatív erők és a potenciális energia között I.

$$\oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0 \qquad\qquad W = \int_{A}^{B} \vec{F}\, d\vec{r} = U_A - U_B = -\Delta U$$

A fenti összefüggések ún. integrális relációk, amelyek egy kiterjedt tértartományra állítanak valamit a konzervatív erőtereket illetően. Vizsgáljuk meg, hogy lokálisan, a tér egy adott pontjában milyen összefüggés áll fenn a potenciális energia és az erő között!
Minthogy az erő integrálásával kapjuk meg a potenciális energiát, ezért sejthető, hogy a fenti reláció megfordításaként a potenciális energia valamilyen differenciálhányadosaként állíthatjuk majd elő az erőt.

Tekintsük a tér egy tetszőleges $P = (x,y,z)$ pontjának környezetében a potenciális energia függvény egy tetszőleges $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ elmozduláshoz tartozó megváltozását. A többváltozós függvények differenciálszámítása szerint fennáll:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

Másfelől azonban a potenciális energia megváltozását az erőtér ellenében a tömegpontra kifejtett $-\vec{F} = -(F_x, F_y, F_z)$ erő $d\vec{r}$ elmozdulás során végzett munkájával is felírhatjuk, nevezetesen:

$$dU = -\vec{F} d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

Kapcsolat a konzervatív erők és a potenciális energia között II.

$$dE_{\text{pot}} = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$ **és** $$dU = -\vec{F}d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

alapján, a megfelelő elmozdulás-komponensek összevetéséből azt kapjuk, hogy a konzervatív erő egyes komponensei a potenciális energia megfelelő koordináták szerinti negatív parciális deriváltjaival egyeznek meg:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad \Rightarrow$$

Az U "nullszintje" tetszőlegesen választható.

A gradiens differenciál-operátor bevezetésével:

$$\text{grad} = \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)$$ **pl.** $$\text{grad}\,U = \nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

$$\boxed{\vec{F} = -\text{grad}\,U}$$ **vagy** $$\left(\vec{F} = -\nabla U\right)$$

Azaz, konzervatív erőtérben az erő a potenciális energia negatív gradienseként állítható elő.

Kapcsolat a konzer

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y$$

A fenti összefüggésekbő
amelynek alapján egysz
konzervatív-e vagy sem
akkor az első y szerinti,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}$$

é

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_z}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$\partial x \qquad \partial x\,\partial y$

A vegyes parciális deriváltak egyenlősége miatt:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$$

Hasonló módon kaphatunk még két analóg egyenletet:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Ha egy erőtér konzervatív, akkor rotációja szükségképpen zérus, azaz a konzervatív erőtér örvénymentes tér.

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x, y, z) = 0 \quad \text{vagy} \quad (\nabla \times \vec{F} = 0)$$