FIZIKA BSc, III. évfolyam / 1. félév
„Optika” – előadásjegyzet

SKALÁR DIFFRAKCIÓ

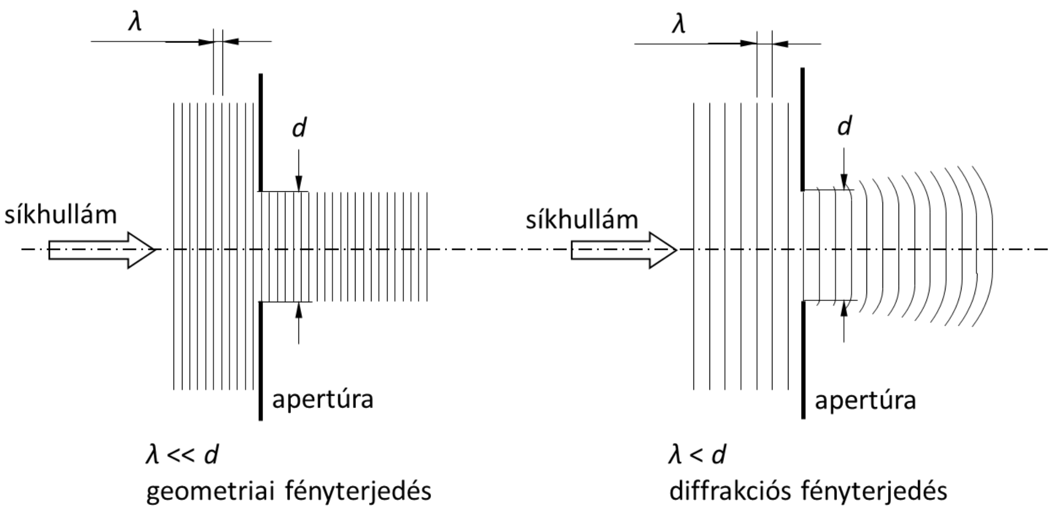
dr. Erdei Gábor, 2019-11-12

Ajánlott irodalom

Klein-Furtak, Optics
Richter, Bevezetés a modern optikába
Born-Wolf, Principles of optics
Goodman, Introduction to Fourier optics

Alapfogalmak

Diffrakció: (magyarul fényelhajlás) az a jelenség, amikor a fény terjedési iránya a geometriailag meghatározható iránytól jelentősen eltér (Sommerfeld). A fényelhajlás általában akkor eredényez észrevehető változást, ha a sugárzás útjába a hullámhosszával összemérhető nagyságú akadály esik, vagy általánosságban a közeg tulajdonságai (n, κ) a hullámhosszal összemérhető távolságon belül változnak meg.



Feladat: Ha adott felületen ismert a komplex térerő eloszlás, hogyan határozható meg a térerősség egy, a felületen kívül eső pontban?

Feltételek:

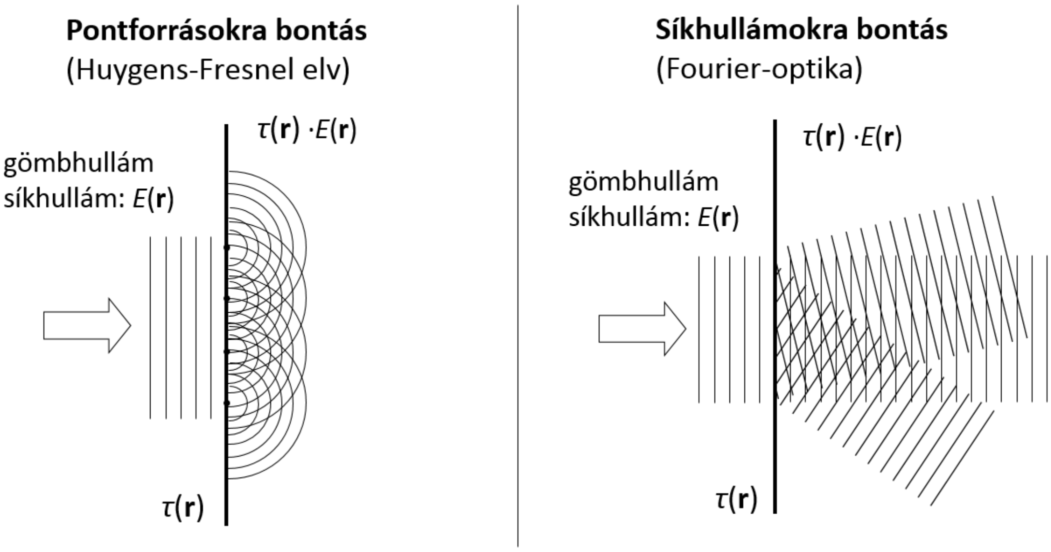
1. a kiindulási téreloszlás sík felületen adott
2. a felület különböző pontjai között időben állandó a fáziskülönbség (térbeli koherencia)
3. a megvilágító nyaláb ω körfrekvenciájú monokromatikus hullám (időbeli koherencia)
4. skalár közelítés: csak egy térerősség vektorkomponenst veszünk figyelembe, melynek iránya a fényterjedés során nem változik meg jelentősen (ha a fő terjedési iránnyal bezárt szög ϑ, akkor $\sin\vartheta < 0{,}6$ és $\cos\vartheta > 0{,}8$); a különböző irányú komponenseket egymástól függetlennek tekintjük
5. a terjedési térben a közegek jellemzőinek változása hullámhossznyi tartományon elhanyagolható (törésmutató, abszorpció) $\rightarrow$ hullámegyenlet használható

Diffrakciós modellek

A diffrakció során kialakuló tereloszlás felfogható végtelen számú, folytonos eloszlású elemi hullámkomponens fázishelyes szuperpozíciójaként. Ehhez olyan elemi hullámokat célszerű választani, amelyek terjedése analitikusan leírható, és kielégítik a hullámegyenletet. Két alapvető, egymással ekvivalens tárgyalásmód létezik:

- pontforrásokra bontás (Huyghens-Fresnel elv) – mi ezzel foglalkozunk
- síkhullámokra bontás (Fourier-optika)

Mi a továbbiakban a pontforrásokra bontással foglalkozunk.



$\tau(\mathbf{r})$ – a felületen értelmezett komplex transzmissziófüggvény

Hullámegyenlet

Az E skalár térerősség komplex mennyiség, próbafüggvényünkben a *pozitív fázisterjedés* módszerét alkalmazzuk (azaz a fázistagot mindenhol megszorozzuk –1-el):

$$E(\mathbf{r},t) \equiv E(\mathbf{r})\mathrm{e}^{-i\omega t}\,. \tag{1}$$

Vizsgálatainkhoz az időfüggetlen, skalár hullámegyenletből (*Helmholtz-egyenlet*) indulunk ki, ennek a megoldását keressük adott peremfeltételek esetén:

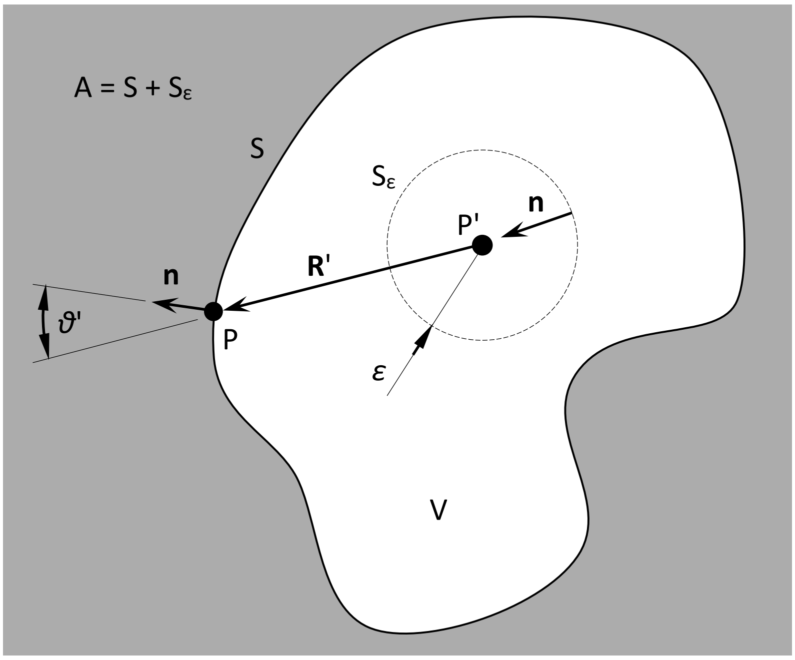
$$\nabla^2\mathbf{E}(t,\mathbf{r}) - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}(t,\mathbf{r})}{\partial t^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla^2 E(\mathbf{r}) + k^2\cdot E(\mathbf{r}) = 0\,. \tag{2}$$

Green-tétel

A levezetés alapja és kiindulási pontja a matematikából ismert *Green-tétel*: ha adott két tetszőleges komplex függvény G és E, amelyek folytonosak, és az első és második parciális deriváltjaik is folytonosak egy „A" zárt felületen és azon belül, akkor igaz a következő összefüggés:

$$\iiint\limits_{\mathrm{V}}\left(G\cdot\nabla^2 E - E\cdot\nabla^2 G\right)\mathrm{d}V = \iint\limits_{\mathrm{A}}\left(G\cdot\mathbf{n}\nabla E - E\cdot\mathbf{n}\nabla G\right)\mathrm{d}A\,, \tag{3}$$

ahol „V" az „A" által bezárt térfogat. A felületi integrál végigtapogatja az „A" felület pontjait, melyeket „P"-vel jelölünk. Ezen pontokban a felületnormális $\mathbf{n}$, melynek irányítottsága a tétel értelmében mindig *kifelé* mutat a vizsgált „V" térfogatból.



Helmholtz és Kirchhoff integráltétele

Amennyiben E(P) az „A” felületen adott és mi egy ezen belüli P' pontban keressük E(P') értékét, akkor a (3) képletet tovább kell alakítani. Az alábbi levezetés a diffrakciós integrál alapja, amelynek bemutatásakor Kirchhoff módszerét követjük. (Korábban Helmholtz hanghullámokra végezte el a számolást). Kirchhoff a G ún. Green-függvényt a következőképpen választotta meg:

$$G(\mathrm{P}) \equiv \frac{1}{R'} \mathrm{e}^{ikR'}, \tag{4}$$

ami nem más, mint egy a P' pontból *kiinduló* gömbhullám, egységnyi amplitudóval (a terjedési irány az exponens előjeléből látszik). Erre természetesen érvényes a Helmholtz-egyenlet:

$$\nabla^2 G + \mathrm{k}^2 \cdot G = 0 \tag{5}$$

Az E-re vonatkozó (2) egyenletet és (5)-öt behelyettesítve (3) bal oldalába:

$$\iiint\limits_{\mathrm{V}} \left(G \cdot \nabla^2 E - E \cdot \nabla^2 G \right) \mathrm{d}V = -\iiint\limits_{\mathrm{V}} \left(GE \cdot k^2 - EG \cdot k^2 \right) \mathrm{d}V \equiv 0 \,. \tag{6}$$

Vagyis a Green-tételből ennyi marad homogén (forrásmentes) hullámegyenletet kielégítő komplex E és G függvények esetén:

$$\iint\limits_{\mathrm{A}} \left(G \cdot \mathbf{n} \nabla E - E \cdot \mathbf{n} \nabla G \right) \mathrm{d}A = 0 \,. \tag{7}$$

A P' pontban G-nek szingularitása van, emiatt ezt ki kell zárni a vizsgálatból. Ennek érdekében az „A” felületet célszerű két részből összeállítani:

$$\mathrm{A} = \mathrm{S} + \mathrm{S}_{\varepsilon}, \tag{8}$$

ahol „S” a térfogatot kívülről bezáró felület, S_{ε} pedig a P' pont köré húzott ε sugarú gömb. (7) ezekkel a következő módon írható át:

$$-\iint\limits_{\mathrm{S}_{\varepsilon}} \left(G \cdot \mathbf{n} \nabla E - E \cdot \mathbf{n} \nabla G \right) \mathrm{d}A = \iint\limits_{\mathrm{S}} \left(G \cdot \mathbf{n} \nabla E - E \cdot \mathbf{n} \nabla G \right) \mathrm{d}A \,. \tag{9}$$

G függvény **n** irányú deriváltja a hányadosderiválás és a láncszabály alkalmazásával:

$$\mathbf{n}\nabla G = \mathbf{n}\cdot grad\left(\frac{e^{ikR'}}{R'}\right) = \mathbf{n}\cdot\frac{\partial}{\partial R'}\left(\frac{e^{ikR'}}{R'}\right)\cdot grad(R') =$$
$$= \cos(\vartheta')\cdot\left(ik\cdot\frac{e^{ikR'}}{R'} - \frac{e^{ikR'}}{R'^2}\right) = \cos(\vartheta')\cdot\left(ik - \frac{1}{R'}\right)\cdot\frac{e^{ikR'}}{R'}. \tag{10}$$

Az S_ε felületen a következő állítások igazak:

$$\cos(\vartheta') = -1 \quad ; \quad G(\mathrm{P}) = \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \quad ; \quad \mathbf{n}\nabla G = \left(\frac{1}{\varepsilon} - ik\right)\cdot\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}. \tag{11}$$

Ezeket figyelembevéve és ha $\varepsilon \to 0$, akkor (9) bal oldalából a következő lesz:

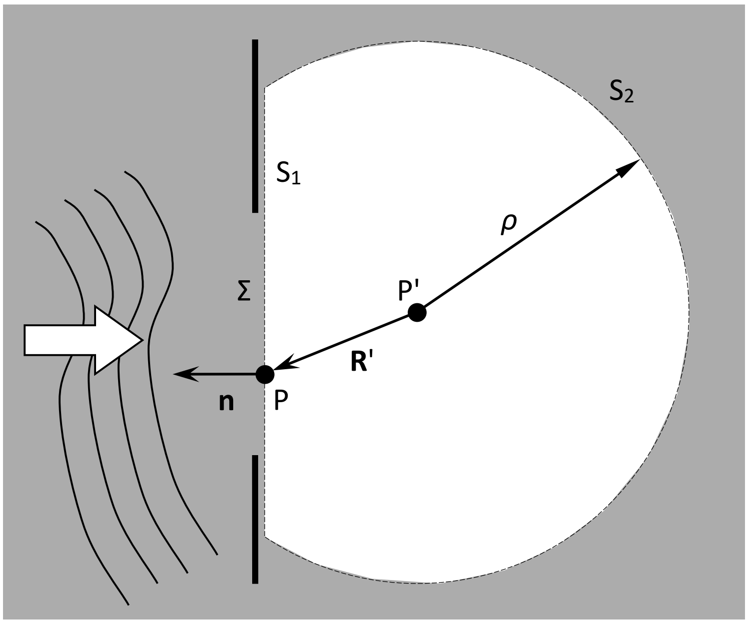
$$\iint_{S_\varepsilon}\left(G\cdot\mathbf{n}\nabla E - E\cdot\mathbf{n}\nabla G\right)\mathrm{d}A = 4\pi\varepsilon^2\left(\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\cdot\mathbf{n}\nabla E - E\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon} - ik\right)\cdot\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\right) \to -4\pi E(\mathrm{P}'). \tag{12}$$

A felületi integrálást azért végezhettük el ilyen egyszerűen, mert *E* és ennek deriváltja folytonosak a vizsgált térfogatban, így P'-nél is, és mivel ε tart nullához, *E* értéke az S_ε felület mentén konstansnak tekinthető. (12)-t behelyettesítve (9)-be megkapjuk Helmholtz és Kirchhoff integráltételét, ami nem más mint a keresett összefüggés *E*(P')-re, ahol *E*(P) az „S” felületen adott:

$$\boxed{E(\mathrm{P}') = \frac{1}{4\pi}\iint_{S}\left(\frac{e^{ikR'}}{R'}\cdot\mathbf{n}\nabla E - E\cdot\mathbf{n}\nabla\left(\frac{e^{ikR'}}{R'}\right)\right)\mathrm{d}A} \tag{13}$$

Fresnel-Kirchhoff diffrakciós integrál

(13) összefüggést az optikában általában az alábbi ábrán látható elrendezésre célszerű meghatározni, amelyben számunkra a Σ-val jelölt nyílás (apertúra) fontos, ui. ennek a sík felületén tekintjük ismertnek az *E*(P) téresősséget, amit a balról érkező megvilágítás okoz.



Az integrálást az „S” zárt felületen végezzük, amely most két részből áll:

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2\,. \tag{14}$$

Megmutatható, hogy ha $\rho \to \infty$, és *E*(P) legalább olyan gyorsan tűnik el S_2-n mint egy gömbhullám (*Sommerfeld-féle sugárzási feltétel*), akkor az integrál S_2-n nullához tart:

$$\iint_{S_2}\left(\frac{e^{ikR'}}{R'}\cdot \mathbf{n}\nabla E - E\cdot \mathbf{n}\nabla\left(\frac{e^{ikR'}}{R'}\right)\right)\mathrm{d}A \to 0\,, \tag{15}$$

vagyis (13)-ből ez marad:

$$E(\mathrm{P}') = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1}\left(\frac{e^{ikR'}}{R'}\cdot \mathbf{n}\nabla E - E\cdot \mathbf{n}\nabla\left(\frac{e^{ikR'}}{R'}\right)\right)\mathrm{d}A\,. \tag{16}$$

Annak érdekében, hogy az integrálást ne kelljen az S_1 végtelen sík felületre elvégezni, Kirchhoff a következő határfeltételeket szabta meg:

1. *Σ apertúrán belül:* *E(P) = változatlan*
2. *Σ apertúrán kívül:* *E(P) = 0 és |grad(E)| = 0*

E feltételeknek köszönhetően az integrálást már csak a Σ apertúrára kell kiszámolni:

$$E(\mathrm{P}') = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left(\frac{e^{ikR'}}{R'}\cdot \mathbf{n}\nabla E - E\cdot \mathbf{n}\nabla\left(\frac{e^{ikR'}}{R'}\right)\right)\mathrm{d}A\,. \tag{17}$$

Egyszerűségük és előnyösségük ellenére mindkettő feltétel alapvető problémákat vet föl. Az hogy a térerősség ugyanakkora Σ-n belül apertúra nélkül mint apertúrával, fizikai képtelenség, ahogy az is, hogy E(P) az apertúrán kívül zérus. Bármiféle abszorbens közeget helyezünk ugyanis egy sugárzó térbe, az mindenképpen módosítja a térerősség eloszlását. A hatás viszont általában elhanyagolható: ha $\Sigma > \lambda$. A másik probléma, hogy matematikailag igazolható, hogy ha egy folytonos függvény értéke és a deriváltja is egy véges intervallumon zérus, akkor a függvény mindenhol konstans nulla. Az említett következetlenségek feloldását az MSc-s Fizikai optika tárgyban fogjuk megkapni, ahol a Green-függvényt nem (4) segítségével definiáljuk, hanem komplexebb módon. Az eredmény a Rayleigh-Sommerfeld diffrakciós integrál lesz, ami nem szignifikánsan pontosabb mint a (17)-ból származtatott, lentebb bemutatásra kerülő diffrakciós integrál, csupán matematikailag korrekt a levezetése.

A (17)-ben szereplő Green-függvénygradienst (10) alapján határozzuk meg, az alábbi egyszerűsítő feltételezéssel élve:

$$\frac{1}{R'} << k \;\Rightarrow\; \frac{\lambda}{2\pi} << R'\,. \tag{18}$$

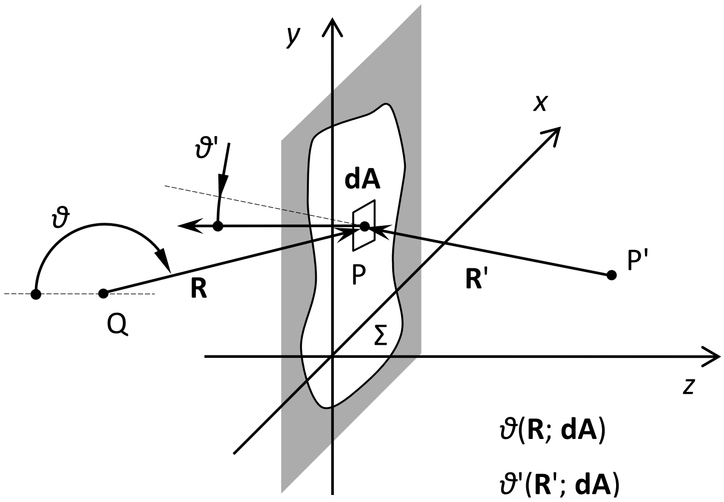
Mivel k értéke igen nagy, és a skalár közelítés miatt már korábban feltettük, hogy $\sin\vartheta' < 0.6$, azaz Σ mérete < R', a (18) feltevés mindenképpen teljesül. Ezzel

$$\mathbf{n}\nabla G = \mathbf{n}\nabla\left(\frac{e^{ikR'}}{R'}\right) = \cos(\vartheta')\cdot\left(ik - \frac{1}{R'}\right)\cdot\frac{e^{ikR'}}{R'} \approx ik\cdot\cos(\vartheta')\cdot\frac{e^{ikR'}}{R'}\,, \tag{19}$$

vagyis a felületi integrálból a következő marad:

$$E(\mathrm{P}') = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\frac{e^{ikR'}}{R'}\cdot\left(\mathbf{n}\nabla E - E\cdot ik\cdot\cos(\vartheta')\right)\mathrm{d}A\,. \tag{20}$$

Ne felejtsük el, hogy ϑ' előjeles mennyiség. Az utolsó lépés, hogy megadjuk a Σ apertúrát megvilágító sugárzást, azaz E(P)-t. Az egyszerűség kedvéért legyen ez egy pontforrás (Q), ami az apertúrától balra helyezkedik el.



A Q pontforrás és az apertúra P pontjai közötti távolság R, a sugárzás amplitúdója E_0:

$$E(\mathrm{P}) \equiv \frac{E_0}{R}\mathrm{e}^{ikR}. \tag{21}$$

A (18) feltételezéssel itt is élhetünk (mivel Σ mérete < R a skalár közelítés miatt), vagyis:

$$\frac{1}{R} << k \;\Rightarrow\; \frac{\lambda}{2\pi} << R\,, \tag{22}$$

amivel az E gradiense:

$$\mathbf{n}\nabla E = \cos(\vartheta)\cdot\left(ik - \frac{1}{R}\right)\cdot\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R} \approx ik\cdot\cos(\vartheta)\cdot\frac{\mathrm{e}^{ikR}}{R}. \tag{23}$$

Ezt behelyettesítve (20)-ba megkapjuk a *Fresnel-Kirchhoff diffrakciós integrált*:

$$\boxed{E(\mathrm{P}') = \frac{i}{\lambda}\iint_{\Sigma} E_0\frac{\mathrm{e}^{ik\cdot R}}{R}\cdot\frac{\mathrm{e}^{ik\cdot R'}}{R'}\cdot\left(\frac{\cos(\vartheta)-\cos(\vartheta')}{2}\right)\cdot \mathrm{d}A}\,. \tag{24}$$

A kifejezés értelmezéséhez először azt kell észrevenni, hogy matematikailag nem különböztethető meg egy olyan pontforrás fázisa, ami a P' pontban van és a P felé terjed attól, ami P-ben van és P' felé terjed. Vagyis (24)-et felfoghatjuk úgy, hogy az elektromos tér a P' pontban felírható elemi gömbhullámok összegeként, hasonlóan a Huyghens-Fresnel elv megállapításához. Annyi a lényegi eltérés, hogy itt az elemi gömbhullámokat koszinuszos iránykarakterisztikával kell figyelembe venni, valamint szerepel egy i/λ konstans szorzó. Érdemes megfigyelni a képlet szimmetriáját: a Q-ba helyezett forrás P'-ben pont akkora térerősséget hoz létre, mint a P'-be helyezett pontforrás Q-ban. Ez a *Helmholtz-féle reciprocitási tétel*. Az említett matematikai inkonzisztenciák ellenére (24) meglepően jól használható, és az esetek többségében igen pontos eredményt szolgáltat.

A (24) integrál még mindig nehezen kiértékelhető (mind analitikusan mind numerikusan). A képlet egyszerűsítése érdekében további közelítéseket vezetünk be. Ezek során az alábbiakban eljutunk a Huyghens-Fresnel elvhez, a Fresnel-, majd a Fraunhofer-közelítéshez.

Közeltéri diffrakció – Huyghens-Fresnel elv

A skalár közelítés miatt már megköveteltük, hogy a Σ apertúra mérete jellemző méreténél R és R' legyen jellemzően nagyobb. Ebből kifolyólag alkalmazhatjuk az alábbi közelítéseket:

$$\cos(\vartheta) \approx -1 \text{ és } \cos(\vartheta') \approx 1\,, \tag{25}$$

ami akkor érvényes ha $\sin\vartheta' < 0{,}5$; $\cos\vartheta' > 0.87$. A Fresnel-Kirchhoff integrálból tehát ez marad:

$$E(\mathrm{P}') = -\frac{i}{\lambda}\iint_{\Sigma} E_0 \frac{\mathrm{e}^{ik\cdot R}}{R}\frac{\mathrm{e}^{ik\cdot R'}}{R'}\cdot \mathrm{d}A = \frac{1}{i\lambda}\iint_{\Sigma} E_0 \frac{\mathrm{e}^{ik\cdot R}}{R}\frac{\mathrm{e}^{ik\cdot R'}}{R'}\cdot \mathrm{d}A \tag{26}$$

Ebben az összefüggésben az apertúrát megvilágító EM sugárzást egyetlen pontforrás (Q) alkotja. Mivel az E(P) téreloszlás felírható számos pontforrásból származó sugárzás szuperpozíciójaként, a fenti képlet egyszerűen általánosítható:

$$\boxed{E(\mathrm{P}') = \frac{1}{i\lambda}\iint_{\Sigma} E(\mathrm{P})\cdot\frac{\mathrm{e}^{ik\cdot R'}}{R'}\cdot \mathrm{d}A}\,. \tag{27}$$

Ennek használatakor csak arra kell figyelni, hogy az E(P) teret alkotó pontforrások mindegyikére teljesüljön a skalár diffrakció által megkövetelt kikötés: Σ < R. A (27) közelítés a komplex konstanst leszámítva a Huyghens-Fresnel elvnek felel meg.

Fresnel-közelítés

Amennyiben annyira távol megyünk P'-vel az apertúrától, hogy $R' \approx z'$, a (27) összefüggés tovább egyszerűsíthető. Az $R' \approx z'$ közelítést a nevezőben közvetlenül alkalmazhatjuk, de az exponensben nem. A fázis ugyanis R' függvényében rendkívül gyorsan változik, emiatt R' Taylor-soros közelítését alkalmazzuk. A következő összefüggés alapján

$$\sqrt{1+b} \approx 1+\frac{1}{2}b-\frac{1}{8}b^2+\ldots \tag{28}$$

R' így írható:

$$\begin{aligned} R' &= \sqrt{z'^2+(x'-x)^2+(y'-y)^2} = z'\sqrt{1+\left(\frac{x'-x}{z'}\right)^2+\left(\frac{y'-y}{z'}\right)^2} \approx \\ &\approx z'\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x'-x}{z'}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{y'-y}{z'}\right)^2\right] = z'+\frac{(x'-x)^2}{2z'}+\frac{(y'-y)^2}{2z'} \end{aligned} \tag{29}$$

Ez a közelítés olyan, mintha a Huyghens-féle gömbhullámok hullámfrontjait z' görbületi sugarú parabolikus felületeknek tekintenénk, ami akkor érvényes, ha a (28) szerinti négyzetes és magasabb rendű tagok által okozott fázistolás elhanyagolható:

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{z'}{8}\left[\left(\frac{x'-x}{z'}\right)^2+\left(\frac{y'-y}{z'}\right)^2\right]^2 << \pi\,[\mathrm{rad}] \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sqrt[3]{4\lambda}}\cdot\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2\right]^{\frac{2}{3}} << z'. \tag{30}$$

Ebben az esetben a diffrakciós integrál *Fresnel-közelítését* kapjuk konvolúciós felírással:

$$\boxed{E(x',y') = \frac{\mathrm{e}^{ikz'}}{i\cdot\lambda z'}\iint_{\Sigma} E(x,y)\cdot\mathrm{e}^{i\frac{k}{2z'}\cdot\left((x'-x)^2+(y'-y)^2\right)}\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\,. \tag{31}$$

(30) feltétel alapján ez akkor használható, ha P' pont egy bizonyos távolságnál messzebb van a Σ apertúrától. Pl. egy Ø1,0 mm átmérőjű 633 nm hullámhosszúságú lézernyalábnál z' >> 2,9 mm. Az integráljel elé az apertúra és a P' pont közötti z' távolságon elszenvedett fázistolás *geometriai optikai közelítésben* kiszámolható értékét emeltük ki egy komplex konstans formájában. Fontos megjegyzés, hogy (31) analitikus megoldása a gyakorlaton bemutatott skalár hullámegyenletnek.

Távoltéri diffrakció (Fraunhofer-közelítés)

A Fresnel-közelítés Fourier-transzformációs felírásmódja (31) átalakításával:

$$E(x',y')=\frac{e^{ikz'}}{i\cdot\lambda z'}\iint_{\Sigma}E(x,y)\cdot e^{i\frac{k}{2z'}\left((x'-x)^2+(y'-y)^2\right)}\cdot dxdy=$$
$$=\frac{e^{ikz'}\cdot e^{i\frac{k}{2z'}\left(x'^2+y'^2\right)}}{i\cdot\lambda z'}\iint_{\Sigma}E(x,y)\cdot e^{i\frac{k}{2z'}\left(x^2+y^2-2x'x-2y'y\right)}\cdot dxdy \tag{32}$$

Az integráljel előtt most már a Σ apertúra középpontjára centrált z' sugarú gömbhullám teljes fázistolása ki van emelve. Amennyiben kellően nagy távolságra vagyunk az apertúrától, az indegrandusz exponensében lévő alábbi tag elhanyagolható:

$$\frac{k}{2z'}\left[x^2+y^2\right]<<\ \pi\,[\mathrm{rad}]\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{\lambda}\left[x^2+y^2\right]<<\ z'. \tag{33}$$

Ezekkel a feltételezésekkel megkapjuk a diffrakciós integrál legegyszerűbb kifejezését:

$$\boxed{E(x',y')=\frac{e^{ikz'}\cdot e^{i\frac{k}{2z'}\left(x'^2+y'^2\right)}}{i\cdot\lambda z'}\iint_{\Sigma}E(x,y)\cdot e^{-i\frac{k}{z'}\left(x'x+y'y\right)}\cdot dxdy}, \tag{34}$$

amit távoltéri, vagy *Fraunhofer-közelítésnek* neveznek. A nagy terjedési távolság miatt ekkor a Huygens-féle elemi gömbhullámok hullámfrontja már síknak tekinthető (ld. exponens).

(34) tulajdonképpen nem más mint 2D Fourier transzformáció f_x és f_y térfrekvenciákkal. Emlékeztetőül az 1D Fourier transzformáció képlete:

$$G(f_x)=\mathcal{F}\left(g(x)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\cdot e^{-i2\pi\cdot f_x\cdot x}dx\quad;\quad f_x=\frac{x'}{\lambda\cdot z'}\quad;\quad f_y=\frac{y'}{\lambda\cdot z'}. \tag{35}$$

Az inverz transzformáció segítségével könnyebben értelmezhetjük (34) kifejezést. Ehhez először átrendezzük (34)-et, hogy az új összefüggés jobb oldala pontosan Fourier-transzformált alakú legyen:

$$\frac{i\cdot\lambda z'}{e^{ikz'}\cdot e^{i\frac{k}{2z'}\left(x'^2+y'^2\right)}}E(x',y')=\iint_{\Sigma}E(x,y)\cdot e^{-i\frac{k}{z'}\left(x'x+y'y\right)}\cdot dxdy\ . \tag{36}$$

A bal oldal inverz Fourier-transzformáltja tehát nem más mint E(P):

$$E(x,y)=i\cdot\lambda z'e^{-ikz'}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\frac{k}{2z'}\left(x'^2+y'^2\right)}\cdot E(x',y')\cdot e^{i2\pi\left(f_x x+f_y y\right)}\cdot df_x df_y\ , \tag{37}$$

ahová behelyettesítve a térfrekvenciák (35) képletét, megkapjuk az inverz Fourier-transzformált kifejezését:

$$E(x,y)=\frac{i\cdot e^{-ikz'}}{\lambda z'}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\frac{k}{2z'}\left(x'^2+y'^2\right)}\cdot E(x',y')\cdot e^{i\frac{k}{z'}\left(x'x+y'y\right)}\cdot dx'dy'\ . \tag{38}$$

(38) integranduszában az exponenciális kifejezés *síkhullámokat* ír le, amit úgy értelmezhetünk, hogy a 2D Fourier-transzformáció harmonikus síkhullámokra bontást jelent. Az analógia mindazonáltan nem tökéletes, mivel az inverz transzformáció képletében megjelenik egy gömbhullám fázistagja is, ami akkor tűnne el, ha a P' pontokat nem egy sík felületen, hanem

egy, a Σ apertúra középpontjára centrált gömbön vennénk fel. A síkhullám-összetevők hullámszámvektor-komponensei a következők:

$$k_x = k \cdot \frac{x'}{z'} \quad ; \quad k_y = k \cdot \frac{y'}{z'} \ . \tag{39}$$

A (33) feltétel értelmezéséhez a Fresnel-közelítésnél bemutatott számpéldával élve most azt kapjuk, hogy z' >> 395 mm, azaz a Fresnel-közelítéshez képest két nagyságrenddel messzebb kell mennünk az apertúrától, hogy a Fraunhofer-közelítés érvényes legyen. A feltétel vizsgálata annyira fontos, hogy a kifejezést átrendezve d átmérőjű kör alakú apertúrára definiálták az ún. *Fresnel-számot*:

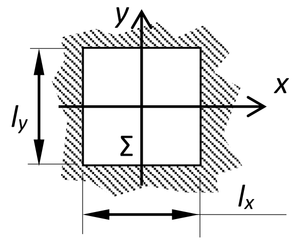
$$\boxed{F \equiv \frac{\left(d/2\right)^2}{\lambda \cdot z'}} \ . \tag{40}$$

Ha $F \ll 1$, akkor Fraunhofer-diffrakcióról, ha $F \geq 1$, akkor Fresnel-diffrakcióról beszélünk.

A (34)-ben szereplő $1/i$ komplex konstans igazából most nyert értelmet: a diffraktáló Σ apertúra és a tőle nagy z' távolságra, a z-tengelyen lévő pont közötti fáziskülönbség nem a geometriai optikailag kiszámolható $k \cdot z'$, hanem egy ehhez képest 90° fokkal *siettetett* érték! (Ne felejtsük el, hogy tárgyalásunkban a fázis a terjedés irányában növekszik, de a valóságban csökken, azaz késik.) A jelenséget *fázisanomáliának* nevezik, mert olyan, mintha a diffrakció miatt kissé megnőne a hullámhossz.

Fraunhofer-diffrakció felhasználása

A Fraunhofer-diffrakciós integrál egyszerűbb esetekben analitikusan is kiértékelhető. Elsőként nézzük meg egy téglalap alakú apertúra távoltéri diffrakciós képét.



Az E(P) térerősség az apertúrán belül legyen konstans 1, azon kívül nulla:

$$E(x,y) = \mathrm{rect}\left(\frac{x}{l_x}\right) \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{y}{l_y}\right) \ , \quad \mathrm{rect}(a) \equiv \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad |a| \leq 1/2 \\ 0 & \text{ha} \quad |a| > 1/2 \end{cases} \tag{41}$$

ami a z-tengely irányába terjedő homogén síkhullámnak felel meg a Σ apertúrán történő áthaladás után. Ezt beírva (34)-be:

$$E(x',y') = \frac{\mathrm{e}^{ikz'} \cdot \mathrm{e}^{i\frac{k}{2z'}\cdot\left(x'^2+y'^2\right)}}{i \cdot \lambda z'} \int_{-l_y/2}^{l_y/2} \int_{-l_x/2}^{l_x/2} \mathrm{e}^{-i\frac{k}{z'}\cdot(x'x+y'y)} \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y \ . \tag{42}$$

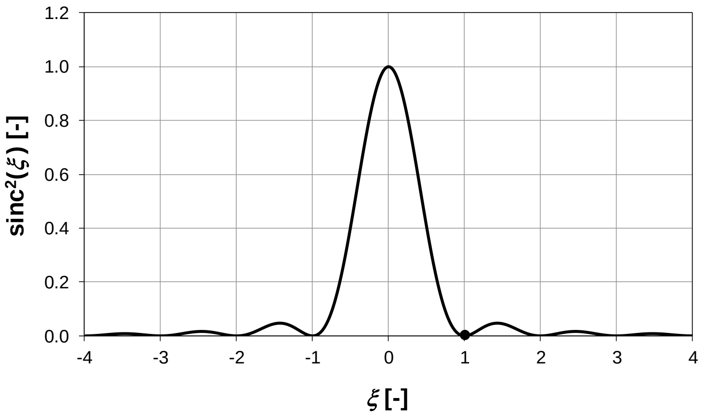
Az integrál analitikusan kiértékelhető:

$$\begin{aligned} E(x',y') &= \frac{\mathrm{e}^{ikz'} \cdot \mathrm{e}^{i\frac{k}{2z'}\cdot\left(x'^2+y'^2\right)}}{i \cdot \lambda z'} \cdot l_x l_y \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{l_x x'}{\lambda z'}\right) \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{l_y y'}{\lambda z'}\right) \\ I(x',y') &= \langle S \rangle = \frac{\mathrm{v}\varepsilon}{2}|E|^2 = \frac{\mathrm{v}\varepsilon}{2} \frac{l_x^2 l_y^2}{\lambda^2 z'^2} \cdot \mathrm{sinc}^2\left(\frac{l_x x'}{\lambda z'}\right) \cdot \mathrm{sinc}^2\left(\frac{l_y y'}{\lambda z'}\right) \end{aligned} \tag{43}$$

ahol a sinc(ξ) függvény definíciója:

$$\mathrm{sinc}(\xi) \equiv \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} \quad , \quad \xi \equiv \frac{l_x x'}{\lambda z'} . \tag{44}$$

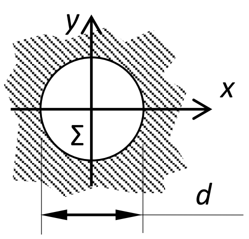
Az intenzitásfüggvény 1-re normált jellegzetes alakja az alábbi ábrán tekinthető meg.



Azt a pontot az *x*- illetve az *y*-tengelyen, ahol az intenzitás első zérushelyét felveszi, *Nyquist-apertúrának* nevezik:

$$\xi = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{\Delta x' = \frac{\lambda z'}{l_x}} . \tag{45}$$

Kör alakú apertúra távoltéri diffrakciós képe a fentiekhez hasonlóan határozható meg, csak a 2D Fourier-transzformáció helyett ennek hengerkoordinátarendszerben felírt megfelelőjét, az ún. *Hankel-transzormációt* kell elvégezni.



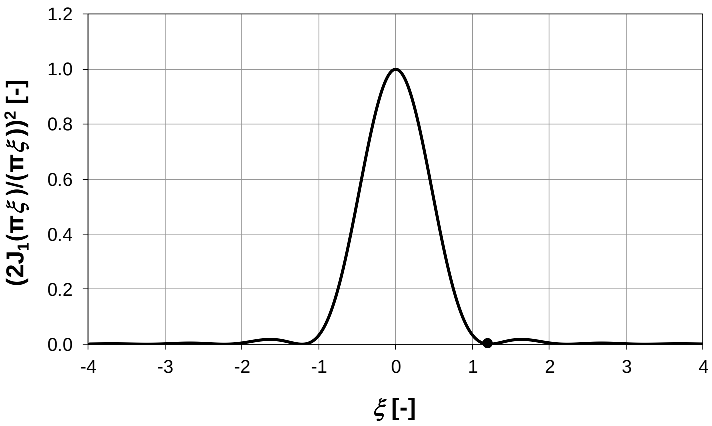
A levezetés mellőzésével az eredmény:

$$I(r') = \langle S \rangle = \frac{\mathrm{v}\varepsilon}{2}|E|^2 = \frac{\mathrm{v}\varepsilon}{2}\left(\frac{k \cdot d^2}{8z'}\right)^2 \cdot \left[2\frac{\mathrm{J}_1(\pi\xi)}{\pi\xi}\right]^2 , \tag{46}$$

ahol $\mathrm{J}_1(\pi\xi)$ az ún. elsőrendű Bessel-függvény, argumentumának definíciója pedig:

$$\pi\xi \equiv \frac{kd \cdot r'}{2z'} \rightarrow \xi \equiv \frac{d \cdot r'}{\lambda z'} \;,\; r'^2 \equiv x'^2 + y'^2 \tag{47}$$

A diffrakciós folt 1-re normált intenzitáseloszlását ebben az esetben *Airy-foltnak* nevezik. A téglalapapertúra diffrakciós képével összevetve megállapíthatjuk, hogy a mellékmaximumok itt sokkal kisebbek.

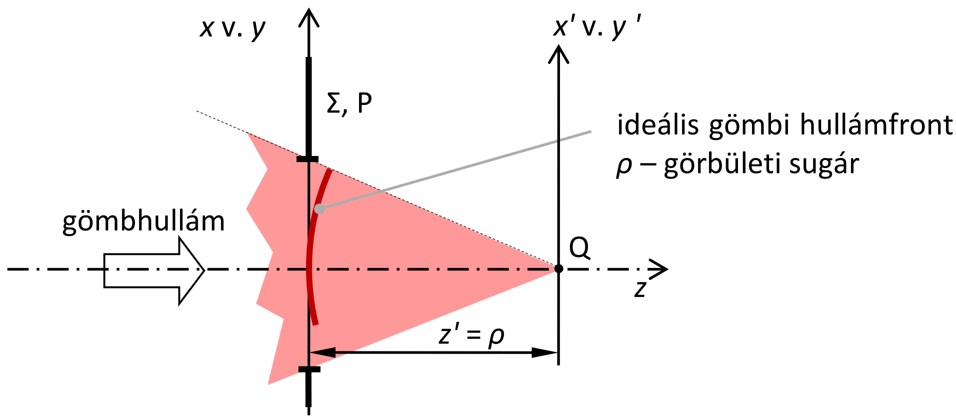


Az első zérushely neve *Airy-rádiusz*, értéke $J_1(\pi\xi) = 0 \Rightarrow \xi = 1{,}22$ alapján:

$$\boxed{\Delta r' = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda z'}{d}}\,. \tag{48}$$

Fresnel-diffrakció felhasználása

A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy miként számolható ki a téreloszlás egy ideális gömbhullám x', y' fókuszsíkjában. A hullám görbületi sugara ρ a Σ apertúrában.



Feltétel: $\rho > \Sigma$ (paraxiális közelítés, hogy a *Fresnel-közelítés* érvényes legyen). A megvilágítás tehát egy Q pontforrás, amely *felé* tart a fény:

$$E(\mathrm{P}) = E_0 \cdot \mathrm{e}^{-ik\cdot\sqrt{x^2+y^2+\rho^2}}\,, \tag{49}$$

ahol a térerősségamplitudót konstansnak tekintjük a Σ apertúrában. Az exponensben ismét másodrendű Taylor-soros közelítést alkalmazunk:

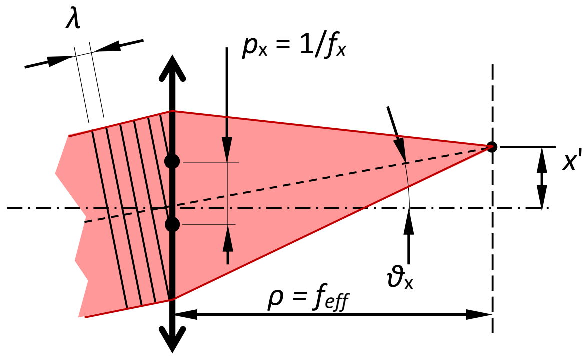
$$E(\mathrm{P}) = E_0 \cdot \mathrm{e}^{-ik\cdot\left(\rho+\frac{x^2}{2\rho}+\frac{y^2}{2\rho}\right)}\,. \tag{50}$$

A *Fresnel-közelítés* Fourier-transzformációs (32) képletébe helyettesítve E(P)-t, amikor $z' = \rho$:

$$\boxed{E(x', y') = \frac{E_0 \cdot \mathrm{e}^{ik\rho} \cdot \mathrm{e}^{i\frac{k}{2\rho}\left(x'^2+y'^2\right)}}{i \cdot \lambda \cdot \rho} \iint_{\Sigma} \mathrm{e}^{-i\frac{k}{\rho}(x'x+y'y)} \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y}\,. \tag{51}$$

Ez *formailag* megegyezik a Fraunhofer-diffrakció (34) képletével, csak z' helyett ρ-szerepel a képletben! Mivel a diffraktáló nyaláb fázisát a Q középpontú gömbhullámához viszonyítottuk, a geometriai optikailag meghatározható $k{\cdot}\rho$ fázistolás kiesik a képletből. A fázisanomália miatt a fázis itt is siet 90°-ot.

Amennyiben a Σ apertúrában egy vékonylencse helyezkedik el ($\rho = f_{eff}$), akkor a balról érkező sugárzás Fourier-transzformáltja a lencse fókuszsíkjában jelenik meg.



A Fraunhofer-diffrakciónál tanultak alapján a fókuszsík pontjainak a következő térfrekvenciák feleltethetők meg:

$$f_x = \frac{x'}{\lambda \cdot \rho} \quad ; \quad f_y = \frac{y'}{\lambda \cdot \rho} \text{ illetve } k_x = 2\pi \cdot f_x = \frac{2\pi \cdot x'}{\lambda \cdot \rho} \quad ; \quad k_y = 2\pi \cdot f_y = \frac{2\pi \cdot y'}{\lambda \cdot \rho} \tag{52}$$

Ha a lencse apertúrájának síkjában a belépő tér egy olyan síkhullám, amely ϑ_x és ϑ_y szöget zár be a *z*-tengellyel, a fókuszsíkban kapott téreloszlás egy olyan fókuszfolt lesz, amelynek a középpontja *x*' ill. *y*' távolságra eltolódik az optikai tengelytől. Tehát a 2D Fourier-transzformált egy adott térfrekvenciájú komponensének fizikailag egy meghatározott szögű síkhullám felel meg. A belépő síkhullám *x*, *y*-irányú hullámhosszaiból:

$$\vartheta_x \approx \frac{\lambda}{p_x} = \lambda \cdot f_x \quad ; \quad \vartheta_y \approx \frac{\lambda}{p_y} = \lambda \cdot f_y \quad , \tag{53}$$

ahol felhasználtuk, hogy paraxiális közelítésben: $\tan\vartheta \approx \vartheta$.

A (51) integrál a Fraunhofer-közelítésnél alkalmazott módon kiértékelhető, amiből kör apertúránál, ideális gömb hullámfront esetén megkapjuk a már bemutatott Airy-foltot. Ezeket az eredményeket felhasználva a „*d*” átmérőjű vékonylencse képsíkban mért Airy-folt sugara a következő:

$$\boxed{\Delta r' = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda\rho}{d}} \, . \tag{54}$$

Általános esetben a hullámfront nem ideális, hanem aberrációkkal terhelt:

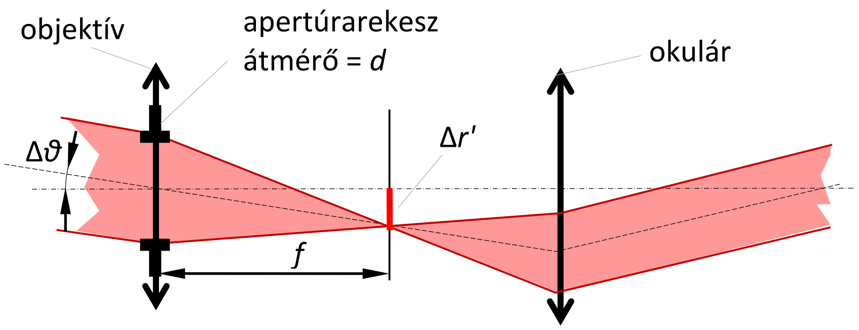
$$E(\mathrm{P}) = E_0 \cdot \mathrm{e}^{ik \cdot OPD(x,y)} \cdot \mathrm{e}^{-ik \cdot \left(\rho + \frac{x^2}{2\rho} + \frac{y^2}{2\rho}\right)} , \tag{55}$$

ahol *OPD*(*x*, *y*) optikai úthossz különbség írja le a hullámfront ideális gömbtől való eltérését. Az elektromos térerősség abszolútérték négyzetéből megkapjuk a számunkra általában leginkább érdekes intenzitáseloszlást:

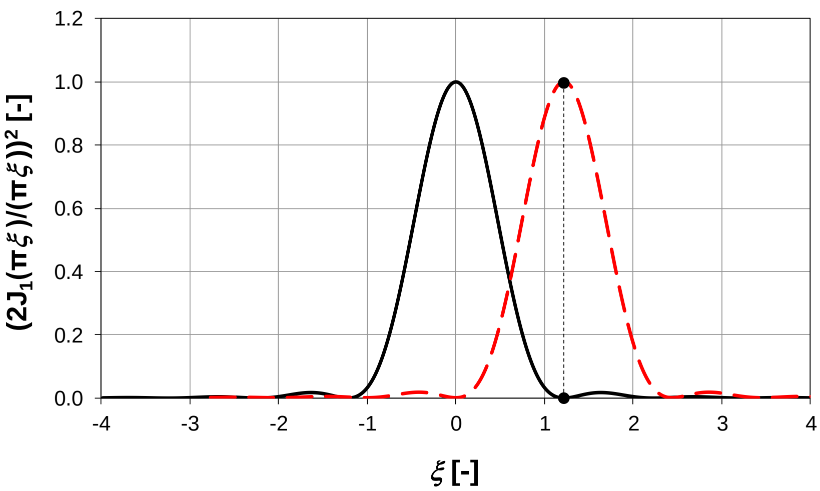
$$I = \langle \mathrm{S} \rangle = \frac{\mathrm{v}\varepsilon}{2} |E|^2 = \frac{\mathrm{v}\varepsilon}{2} \frac{E_0^2}{\lambda^2 \cdot \rho^2} \left| \iint_\Sigma \mathrm{e}^{ik \cdot OPD(x,y)} \cdot \mathrm{e}^{-i\frac{k}{\rho} \cdot (x'x + y'y)} \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right|^2 \tag{56}$$

Ilyen esetekben a (49)-el bevezetett ideális gömbhullámot *Gauss-féle referenciagömbnek* nevezik. Megjegyzendő, hogy megfelelő módszerekkel lehet olyan lencserendszereket tervezni, amelyek nem csak a paraxiális közelítésben Fourier-transzformálnak; ezeket Fourier-transzformációs lencséknek nevezik.

Fraunhofer-diffrakció alkalmazása: távcső felbontóképessége



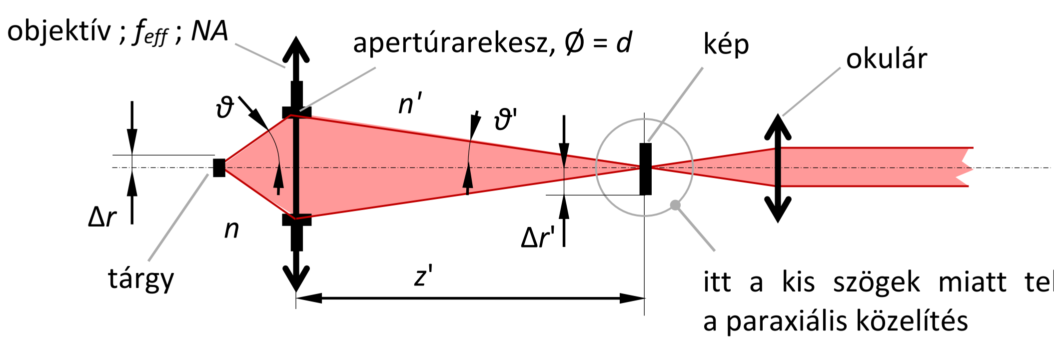
Rayleigh-féle felbontás kritérium: két vizuálisan még felbontható diffrakciós folt egyikének az első minimuma egybeesik a másik maximumával.



Távcsőnél az az apertúra emelyen létrejön a fénydiffrakció, az objektív lencse v. tükör apertúrája. A körapertúra Fraunhofer-diffrakciós modelljéből a távcső szögfelbontása:

$$\Delta\vartheta \approx \mathrm{tg}(\Delta\vartheta) = \frac{\Delta r'}{z'} = 1{,}22\cdot\frac{\lambda}{d} \tag{57}$$

Fresnel-diffrakció alkalmazása: mikroszkóp felbontóképessége (kiegészítő anyag)



Körapertúrás lencse Rayleigh-felbontása a képoldalon ld. (54):

$$\Delta r' = 1{,}22\cdot\frac{\lambda z'}{d} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{tg}(\vartheta') = \frac{d}{2z'} = 0{,}61\frac{\lambda}{\Delta r'} \approx \sin\Theta' \tag{58}$$

A mikroszkópobjektív ún. aplanatikus leképezőrendszer, ebből kifolyólag teljesíti az ún. Abbe-féle szinuszfeltételt:

$$\Delta r \cdot n \cdot \sin(\vartheta) = \Delta r' \cdot n' \cdot \sin(\vartheta') \tag{59}$$

amiből a tárgyoldali felbontás:

$$\boxed{\Delta r = 0{,}61 \frac{\lambda_0}{n' \sin(\vartheta')} = 0{,}61 \frac{\lambda_0}{NA}}\,. \tag{60}$$

(Magyarázat ld. pl. *Born-Wolf: Principles of Optics*.)