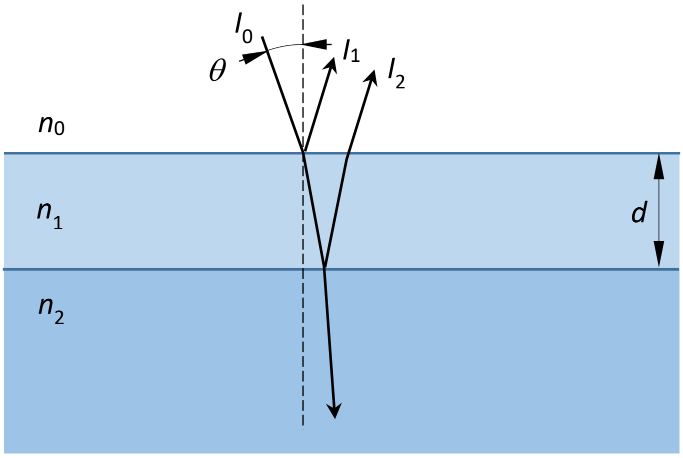
11. GYAKORLAT

Dr. Erdei Gábor, 2019-11-29

Tükrözéscsökkentő vékonyréteg vizsgálata kéthullám interferenciával



$n_2 > n_1 > n_0$; $\lambda_0 = 550$ nm, merőleges beesés esetén ($\theta \approx 0$)

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \tag{1}$$

$$OPD = n_1 \cdot 2d \tag{2}$$

$$\delta = OPD \frac{2\pi}{\lambda_0} + \pi + \pi = n_1 \cdot 2d \cdot \frac{2\pi}{\lambda_0} \tag{3}$$

A tükrözés csökkentéséhez a két hullámnak ellenfázisban kell találkoznia:

$$\delta = \pi + 2\pi \cdot m \quad ; \quad m \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Ha $m = 0$:

$$n_1 \cdot 2d \cdot \frac{2\pi}{\lambda_0} = \pi \quad \rightarrow \quad n_1 \cdot d = \frac{\lambda_0}{4}. \tag{5}$$

A tökéletes kioltáshoz (destruktív interferencia) a két hullám intenzitásának egyenlőnek kell lennie. Feltételezzük, hogy mindkét felület reflexiója kicsi, így a a beeső nyaláb (I_0) és a második felületen reflektálódó nyaláb is közelítőleg gyengülés nélkül halad át az első felületen.

$$I_1 = I_0 \left(\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1}\right)^2 \quad \text{és} \quad I_2 \approx I_0 \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \tag{6}$$

$$I_1 = I_2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1}\right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \tag{7}$$

Mivel mindkét reflexiós tényező azonos előjelű:

$$\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \tag{8}$$

$$n_0 n_1 + n_0 n_2 - n_1 n_1 - n_1 n_2 = n_0 n_1 - n_0 n_2 + n_1 n_1 - n_1 n_2 \tag{9}$$

$$n_0 n_2 - n_1 n_1 = -n_0 n_2 + n_1 n_1 \tag{10}$$

$$2 n_1 n_1 = 2 n_0 n_2 \tag{11}$$

$$n_1 = \sqrt{n_0 n_2}\,. \tag{12}$$

Ha n_0 = 1,0 (levegő), és n_2 = 1,519 (Schott BK7 üveg), akkor n_1 = 1,232. A MgF_2 törésmutatója 1,379. Ezzel d = 99,7 nm (ekkor $\delta = \pi$). A reflektancia:

$$R = \frac{I}{I_0} = \left(\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1}\right)^2 + \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 + 2\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1}\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\cos\delta \tag{13}$$

$$R = \left(\frac{1 - 1{,}379}{1 + 1{,}379}\right)^2 + \left(\frac{1{,}379 - 1{,}519}{1{,}379 + 1{,}519}\right)^2 - 2\frac{1 - 1{,}379}{1 + 1{,}379}\cdot\frac{1{,}379 - 1{,}519}{1{,}379 + 1{,}519} = 1{,}23\%. \tag{14}$$

Azaz a BK7 üveg 4% körüli reflektanciáját kb. a negyedére csökkentettük.

Diffrakciós rács felbontóképességének meghatározása

Ha egy lézerdióda longitudinális módusainak távolsága $\Delta\lambda$ = 0,05 nm, egy módus hullámhossza λ = 635 nm, akkor milyen rácsállandójú (a) diffrakciós rácsot kell választanunk, hogy a módusokat a rács második rendjében (m = 2) a rács fel tudja oldani? A rács mérete legyen D = 5,0 mm.

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta_m \cdot a = m2\pi \tag{15}$$

m = 2:

$$\sin\theta_2 = \frac{2\lambda}{a} \tag{16}$$

$$I(\delta) = I_1\left(\frac{\sin(\delta N/2)}{\sin(\delta/2)}\right)^2 \tag{17}$$

Az első zérushely távolsága valamelyik maximumhelytől:

$$\Delta\delta N/2 = \pi \;\rightarrow\; \Delta\delta = \frac{2\pi}{N} \tag{18}$$

$$\Delta\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta\sin\theta_2 \cdot a = \frac{2\pi}{N} \tag{19}$$

$$\Delta\sin\theta_2 = \frac{\lambda}{a\cdot N} \tag{20}$$

Mennyivel változik meg az m = 2 maximum iránya, ha a hullámhossz $\lambda + \Delta\lambda$?

$$\sin\theta_2 + \Delta\sin\theta_2 = \frac{2(\lambda + \Delta\lambda)}{a} \tag{21}$$

A Rayleigh-kritérium értelmében ez megegyezik az első zérushely előbb kiszámított helyével.

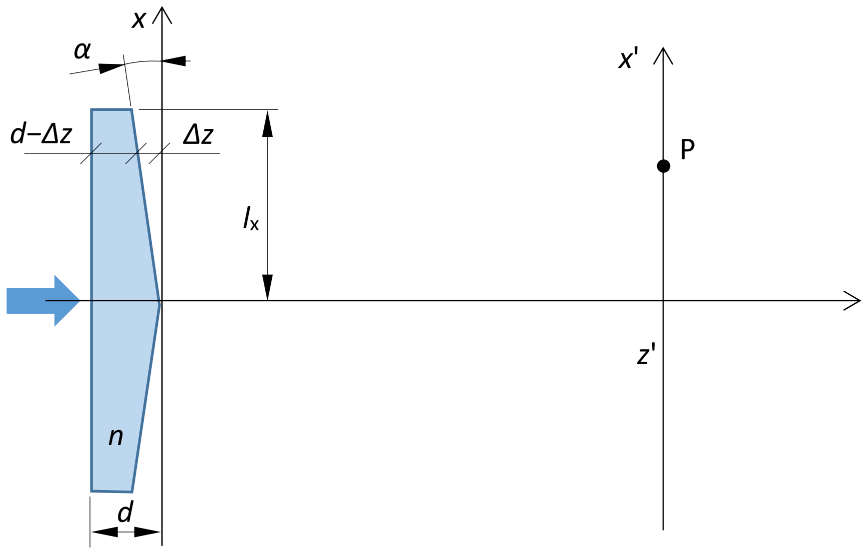
$$\frac{2\lambda}{a} + \frac{\lambda}{a\cdot N} = \frac{2(\lambda + \Delta\lambda)}{a} \tag{22}$$

$$2\lambda + \frac{\lambda}{N} = 2\lambda + 2\Delta\lambda \tag{23}$$

$$\frac{\lambda}{2\Delta\lambda} = N \;\rightarrow\; \frac{\lambda}{2\Delta\lambda} = \frac{D}{a} \;\rightarrow\; a = \frac{2D\Delta\lambda}{\lambda} = 0{,}787\ \mu\text{m}. \tag{24}$$

Azaz $1/a$ = 1270 vp/mm-es rácsot kell használni. A fenti érték ismét közvetlenül megkapható az $\mathcal{R}$ felbontóképesség képletéből (ld. előadás).

Fresnel-biprizma távoltéri diffrakciójának meghatározása



$$OPD = OPL_{prizma} - OPL_{üveg} \tag{25}$$

$$OPL_{üveg} = nd \tag{26}$$

$$OPL_{prizma} = (d - \Delta z)n + \Delta z \tag{27}$$

$$OPD = \Delta z - \Delta z \cdot n = \Delta z(1 - n) = x \tan\alpha \cdot (1 - n) \tag{28}$$

$$E(x) = e^{ik \cdot OPD} = e^{i\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot x \tan\alpha \cdot (1-n)} \quad , \qquad ha\ x \geq 0 \tag{29}$$

$$E(x) = e^{ik \cdot OPD} = e^{-i\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot x \tan\alpha \cdot (1-n)} \quad , \qquad ha\ x < 0 \tag{30}$$

$$b \equiv -\tan\alpha \cdot (1 - n) \tag{31}$$

$$E(x') = \frac{e^{ikz'} \cdot e^{i\frac{kx'^2}{2z'}}}{i \cdot \lambda z'} \int_{\Sigma} E(x) \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}x} dx \tag{32}$$

$$\int_{\Sigma} E(x) \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}x} dx = \int_{0}^{l_x} e^{-ikbx} \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}x} dx + \int_{-l_x}^{0} e^{ikbx} \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}x} dx \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{l_x} e^{-ikbx} \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}x} dx &= \frac{1}{-ikb - i\frac{kx'}{z'}} \left[e^{-ikbx} \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}x} \right]_0^{l_x} = \frac{1}{-ikb - i\frac{kx'}{z'}} \left(e^{-ikbl_x} \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}l_x} - 1 \right) = \\
&= \frac{1}{-ikb - i\frac{kx'}{z'}} e^{-ikb\frac{l_x}{2}} \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}\frac{l_x}{2}} \left(e^{-ikb\frac{l_x}{2}} \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}\frac{l_x}{2}} - e^{ikb\frac{l_x}{2}} \cdot e^{+i\frac{kx'}{z'}\frac{l_x}{2}} \right) = \\
&= \frac{2}{-kb - \frac{kx'}{z'}} e^{-ikb\frac{l_x}{2}} \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}\frac{l_x}{2}} \sin\left(-kb\frac{l_x}{2} - \frac{kx'}{z'}\frac{l_x}{2} \right) = \\
&= \frac{l_x}{\frac{\pi x'}{\lambda_0 z'} l_x + \frac{\pi b}{\lambda_0} l_x} e^{-ikb\frac{l_x}{2}} \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}\frac{l_x}{2}} \sin\left(\frac{\pi x'}{\lambda_0 z'} l_x + \frac{\pi b}{\lambda_0} l_x \right) = \\
&= l_x e^{-ikb\frac{l_x}{2}} \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}\frac{l_x}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{x'}{\lambda_0 z'} l_x + \frac{b}{\lambda_0} l_x \right).
\end{aligned} \tag{34}$$

A csekély konstans fázistag amiatt lép fel, hogy a prizmafelület az $x = l_x/2$ pontban $z = l_x/2 \cdot \tan\alpha$ értéket vesz fel és nem nullát. A lineáris fázistag egy ferde síkhullám hullámfrontja, ami amiatt alakul ki, hogy a prizmafelület $l_x/2$-vel ki van tolva a tengelyből. A sinc eltolása pedig annak felel meg, hogy a kapott diffrakciós folt nem a tengelyben lesz:

$$\frac{x'}{\lambda_0 z'} l_x + \frac{b}{\lambda_0} l_x = 0 \;\; \rightarrow \;\; \frac{x'}{z'} = -\tan\alpha \cdot (n-1) \tag{35}$$

Ami tökéletes összhangban van a törési törvénnyel, ha α annyira kicsi, hogy

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha \;\; [\mathrm{rad}]. \tag{36}$$

Ha a foltok távolsága kisebb mint a Nyquist-apertúra, azaz jelentősen átfednek, akkor interferencia lép fel közöttük.