Szabad kő röppályája Schwarzschild-, ill. Painlevé-Gullstrand-“térképen“.

$x^{\alpha}(\tau) = ?$ [$T(\tau)$, $r(\tau)$, $\theta(\tau)$, $\varphi(\tau)$ = ?] [másik lehetőség: $r(\varphi)$ = ? stb.]

$$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} (= konst)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{mr^2} \qquad [1]$$

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dT}{d\tau} - \sqrt{\frac{2M}{r}}\frac{dr}{d\tau} (= konst)$$

$$\frac{dT}{d\tau} = \left[\frac{E}{m} + \sqrt{\frac{2M}{r}}\frac{dr}{d\tau}\right] \cdot \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \qquad [2]$$

1

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dT^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}}dTdr - dr^2 - r^2 d\varphi^2$$

$$1 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dT}{d\tau}\right)^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}}\left(\frac{dT}{d\tau}\right)\left(\frac{dr}{d\tau}\right) - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \qquad [3]$$

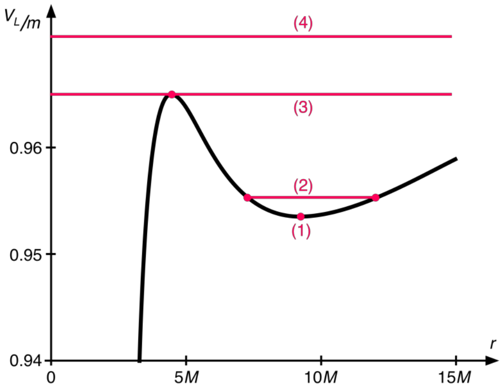
[1], [2] és [3] alapján:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{m^2 r^2}\right)$$

$$\left[\frac{V_L(r)}{m}\right]^2 \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{m^2 r^2}\right) \qquad \text{“effektív potenciál“}$$

2

pl. $L/m = 3.7M$:



$$\left[\frac{V_L(r)}{m}\right]^2 \equiv \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{L^2}{m^2 r^2}\right)$$

(1) stabil körpálya

(2) ellipszis-<u>szerű</u> pálya (ld. Merkúr pályája a Nap körül)

(3) instabil („borotvaél"-) körpálya

(4) „fejesugrás" a fekete lyukba

3

Hasonlítsuk össze a newtoni és az einsteini számolást!

Newton:

$$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\varphi}{dt} (= konst)$$

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}$$ (sebességkomponensek polárkoordinátarendszerben)

$$\frac{1}{2}mv^2 = E - \left(-\frac{Mm}{r}\right)$$ (kin. energia = összenergia – pot. energia)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{E}{m} - \left[-\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2m^2 r^2}\right]$$ [NEP]

4

Newton:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{E}{m} - \left[-\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2m^2r^2}\right]$$ [NEP]

$$\frac{V_{LN}(r)}{m} \equiv -\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2m^2r^2}$$ Newtoni effektív potenciál

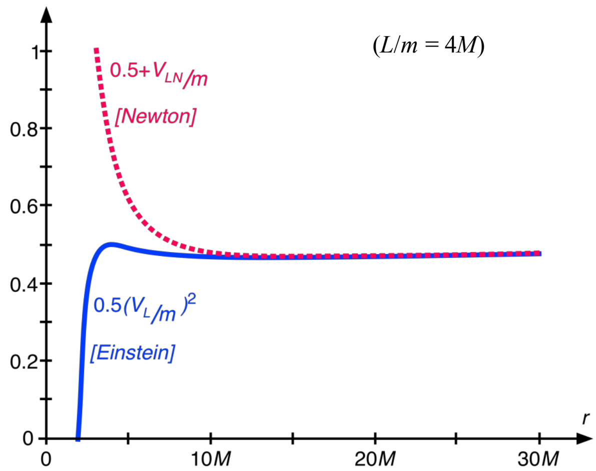
Einstein:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{V_L(r)}{m}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{L^2}{m^2r^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left[\frac{1}{2} - \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2m^2r^2} - \frac{ML^2}{m^2r^3}\right]$$ [GREP]

5

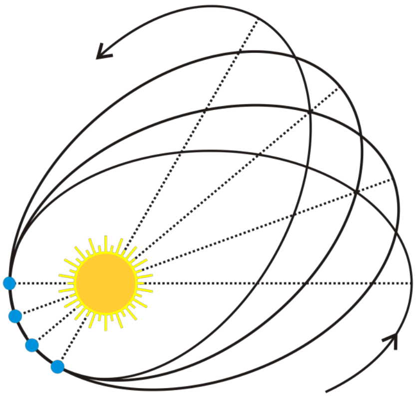


A newtoni effektív potenciálból hiányzik az $\sim 1/r^3$-ös vonzó tag $\rightarrow$
a newtoni számolás szerint nem lehet beleesni egy pontszerű tömegbe, kivéve ha sugárirányban esünk felé.

Einstein szerint bele lehet esni.

6

A Merkúr perihélium-precessziójának számértéke.



Kérdés: a ki-be oszcillálás periódusideje (T_r) ugyanannyi-e, mint a körüljárás periódusideje (T_φ)?

7

Kitérő: harmonikus oszcillátor (rugóhoz rögzített test)

$x(t) = A \sin \omega t$ ahol $\omega = \sqrt{k/m}$

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$\frac{V(x)}{m} = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$$

$$\frac{d(V/m)}{dx} = \omega^2 x$$

$$\frac{d^2(V/m)}{dx^2} = \omega^2$$

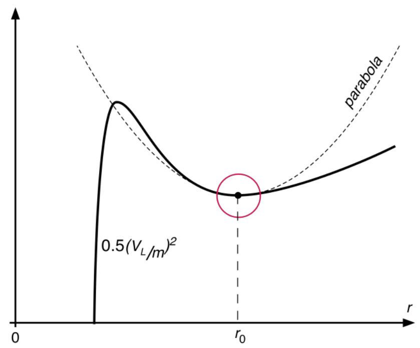
A potenciális energia függvényből közvetlenül megkapható a rezgés körfrekvenciája.

8

Vissza a Merkúrhoz:

Newton: $\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{E}{m} - \left[-\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2m^2r^2}\right] = \frac{E}{m} - \frac{V_{LN}}{m}$ [NEP]

Einstein: $\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left[\frac{1}{2} - \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2m^2r^2} - \frac{ML^2}{m^2r^3}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{V_L}{m}\right)^2$ [GREP]



A ki-be oszcillálás körfrekvenciája:

$$\omega_r^2 = \left[\frac{d^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{V_L}{m}\right)^2\right]}{dr^2}\right]_{r=r_0} = \ldots = \frac{M(r_0 - 6M)}{r_0^3(r_0 - 3M)}$$

[Newtonnál: $\omega_{rN}^2 = \ldots = \frac{M}{r_0^3}$]

9

A körüljárás (átlagos) szögsebessége:

$$\frac{L}{m} = r^2\frac{d\varphi}{d\tau} = r^2\omega_\varphi = r_0^2\overline{\omega}_\varphi$$

$$\overline{\omega}_\varphi^2 = \frac{L^2}{m^2r_0^4} = \ldots = \frac{Mr_0}{r_0^3(r_0 - 3M)}$$

[Newtonnál: $\overline{\omega}_{\varphi N}^2 = \ldots = \frac{M}{r_0^3}$]

Tehát:

$\omega_r < \overline{\omega}_\varphi$ → **a perihélium előrehalad**

[Newtonnál: $\omega_{rN} = \overline{\omega}_{\varphi N}$ → a Merkúr pályája zárt ellipszis]

10

A ki-be oszcillálás periódusideje: $T_r = \dfrac{2\pi}{\omega_r}$

A szögelfordulás ezalatt: $T_r \cdot \overline{\omega}_\varphi$

A <u>szög-excesszus</u> ezalatt (azaz egy periódus alatt):

$$\Delta\varphi_1 = T_r \cdot \overline{\omega}_\varphi - 2\pi = T_r \cdot \left(\overline{\omega}_\varphi - \omega_r\right)$$

Egyrészt: $\overline{\omega}_\varphi^2 - \omega_r^2 = \dfrac{Mr_0}{r_0^3\left(r_0 - 3M\right)} - \dfrac{M\left(r_0 - 6M\right)}{r_0^3\left(r_0 - 3M\right)} = \dfrac{6M^2}{r_0^3\left(r_0 - 3M\right)} = \dfrac{6M}{r_0}\overline{\omega}_\varphi^2$

Másrészt: $\overline{\omega}_\varphi^2 - \omega_r^2 = \left(\overline{\omega}_\varphi - \omega_r\right)\left(\overline{\omega}_\varphi + \omega_r\right) \approx \left(\overline{\omega}_\varphi - \omega_r\right) \cdot 2\overline{\omega}_\varphi$

Tehát: $\overline{\omega}_\varphi - \omega_r \approx \dfrac{3M}{r_0} \cdot \overline{\omega}_\varphi$

$\Delta\varphi_1 = T_r \cdot \overline{\omega}_\varphi - 2\pi = T_r \cdot \left(\overline{\omega}_\varphi - \omega_r\right)$ $\qquad$ $\overline{\omega}_\varphi - \omega_r \approx \dfrac{3M}{r_0} \cdot \overline{\omega}_\varphi$

$M = 1.477 \cdot 10^3$m; $r_0 = 5.8 \cdot 10^{10}$m; 1 évszázad alatt 417 körbefordulás

<u>A teljes precesszió egy évszázad alatt:</u>

$$\frac{\Delta\varphi}{\textit{évszázad}} = \Delta\varphi_1 \cdot 417 \frac{\textit{ford.}}{\textit{évsz.}} = \left[T_r \cdot \left(\overline{\omega}_\varphi - \omega_r\right)\right] \cdot 417 \approx \left[T_r \cdot \frac{3M}{r_0}\overline{\omega}_\varphi\right] \cdot 417$$

$$\frac{\Delta\varphi}{\textit{évszázad}} \approx 2\pi \frac{3M}{r_0} \cdot 417 \approx 2 \cdot 10^{-4} / \textit{évsz.} \approx 41'' / \textit{évsz.}$$

(Pontosabb elméleti számolással: ≈43"/*évsz.*)

Megj.: A <u>**teljes**</u> mért precesszió egy évszázad alatt: ~ 575"/*évsz.* Ebből 532"-et a többi bolygó perturbáló hatása okozza – ezeket newtoni mechanikával is lehet számolni –, a maradék 43" pedig a Nap által begörbített téridő következménye.