

# Bevezetés a modern fizika fejezeteibe

4. (b)

# Kvantummechanika

Utolsó módosítás: 2015. január 11.

# A legkisebb hatás elve (1)

A legkisebb hatás elve (Hamilton-elv):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \textit{extremum}$$

$S$ : a hatás

$L$ : Lagrange-függvény

## A legkisebb hatás elve (2)

A hatás variációja:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \\ &= \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt\end{aligned}$$

## A legkisebb hatás elve (3)

A mozgásegyenlet (Euler-Lagrange-egyenlet):

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Az általános impulzus:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

## A legkisebb hatás elve (4)

Az impulzust az Euler-Lagrange-egyenletbe helyettesítve:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Képezzük a Lagrange-függvény teljes differenciálját:

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial t} dt + \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} dt + (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i) \end{aligned}$$

## A legkisebb hatás elve (5)

Az alábbi átalakítást figyelembe véve:

$$p_i d\dot{q}_i = d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i$$

Így a teljes differenciál átírható:

$$d(p_i \dot{q}_i - L) = -\frac{\partial L}{\partial t} dt - (\dot{p}_i dq_i - \dot{q}_i dp_i)$$

Az összefüggés segítségével definiálható a Hamilton-függvény  $H(q_i, p_i, t)$ , amely már csak a  $q_i$  általánosított hely és  $p_i$  impulzuskoordináták függvénye:

$$H = p_i \dot{q}_i - L$$

## A legkisebb hatás elve (6)

Képezve a Hamilton-függvény teljes differenciáját:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$$

Az egyenleteket összevetve kapjuk az ún. kanonikus egyenleteket:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

## A legkisebb hatás elve (7)

A  $(p_i, q_i)$  változó párok a kanonikusan konjugált mennyiségek. (Ezek „feszítik ki” a fázisteret.) A Lagrange-függvény „jól bevált” alakja

$$L = T - V$$

ahol  $T$  a kinetikus energia,  $V$  a potenciális energia. A Hamilton-függvény:

$$H = T + V$$



## Felcserélési relációk (1)

Mi kell ahhoz, hogy el lehessen térni a klasszikus pályától?

A felcserélési relációk:

$$[p_k, q_l] = p_k q_l - q_l p_k = \frac{\hbar}{i} \delta_{kl}$$

$$[p_k, p_l] = p_k p_l - p_l p_k = 0$$

$$[q_k, q_l] = q_k q_l - q_l q_k = 0$$

## Felcserélési relációk (2)

Ha az általánosított koordinátának a

$$q = x$$

helykoordináta operátorát, az általánosított impulzusnak a

$$p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$\frac{\hbar}{i}$  -vel szorzott koordináta szerinti differenciálás operátorát választjuk.

## Felcserélési relációk (3)

Ezekkel a felcserélési reláció úgy értelmezhető, hogy ezek egy differenciálható függvényre hatnak. Ekkor a lépésenkénti számolás:

$$\begin{aligned} (p_x x - x p_x) \Psi &= \frac{\hbar}{i} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (x \Psi) - x \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\hbar}{i} \left[ \Psi + x \frac{\partial \Psi}{\partial x} - x \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right] = \frac{\hbar}{i} \Psi \end{aligned}$$

De pl.  $p_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$  és  $p_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}$  esetén:

$$[p_x, p_y] = -\hbar^2 \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x} \right) = 0$$

a két impulzuskomponens felcserélhető.

# A Schrödinger-egyenlet (1)

Konzervatív erőterben mozgó tömegpontra érvényes a mechanikai energia megmaradása:

$$H(= E) = \frac{p^2}{2m} + V(x, y, z)$$

ahol az impulzus komponensek helyére a fenti differenciál-operátorokat, a potenciál helyére a hellyel való szorzás operátorát írjuk. Így az energia operátora:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z)$$

## A Schrödinger-egyenlet (2)

Az energiaoperátorral felírható energia sajátérték egyenlet:

$$H\Psi = E\Psi$$

A differenciáloperátor konkrét alakját beírva a

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z)\Psi = E\Psi$$

Schrödinger-egyenletet kapjuk. A sajátérték egyenlet megoldása szolgáltatja a rendszer lehetséges energiaszintjeit, a sajátfüggvényeknek a megtalálási valószínűségekhez van közüük.

## A Schrödinger-egyenlet (3)

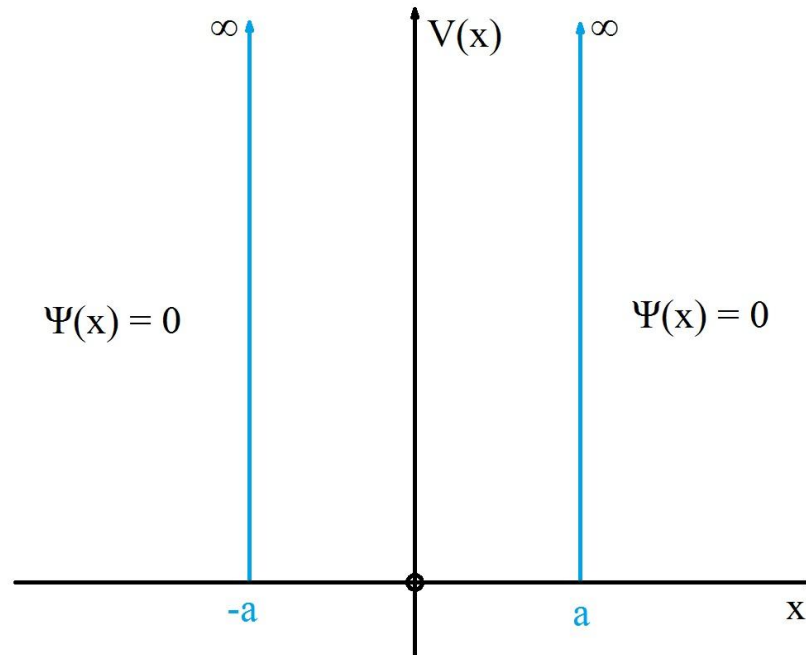
Általában, ha a fizikai mennyiséghez egy operátort rendelünk, jelöljük  $O$ -val, akkor az

$$O\Psi = \lambda\Psi$$

sajátérték egyenlet reguláris megoldásait keressük  $\rightarrow$  sajátértékeket, sajátfüggvényeket. Ennek megfelelően lehetnek pl. impulzus, impulzusmomentum, energia, részecskeszám (!) operátorok, stb.

# Végtelen egydimenziós potenciálgödör (1)

Legyen a potenciál  $V(x)=0$  a  $(-a < x < a)$  intervallumban, míg  $V(x)=\infty$  azon kívül. A külső tartományban  $\Psi(x)\equiv 0$ , az  $x = -a$  és  $x = a$  helyen lévő potenciálugrásnál a hullám-függvény deriváltja határozatlan.



## Végtelen egydimenziós potenciálgödör (2)

A Schrödinger-egyenlet a  $(-a < x < a)$  intervallumra:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi$$

A  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$  helyettesítéssel kapjuk  $\frac{d^2\Psi}{dx^2} = -k^2\Psi$

Ennek az egyenletnek lehet egy  $\sin(kx)$  megoldása a  $k = n \frac{\pi}{a}$  a határfeltételt teljesítő megkötés mellett. Míg létezik egy  $\cos(kx)$  megoldása a

$$k = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{a}$$

feltétellel.



## Végtelen egydimenziós potenciálgödör (3)

A sajátérték sorozat összevonható a

$$k = n \frac{\pi}{2a}$$

kifejezéssel, de emlékezni kell, hogy vagy csak szinuszos vagy koszinuszos hullámfüggvények lehetnek a megoldások! Ezt behelyettesítve és átrendezve az energia sajátértékek

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2}$$

lesznek. (A potenciálgödör  $2a$  széles!)

## Végtelen egydimenziós potenciálgödör (4)

Az eredmény egyszerűen átírható az  $a$  szélességű potenciálgödörre a  $2a \rightarrow a$  helyettesítéssel

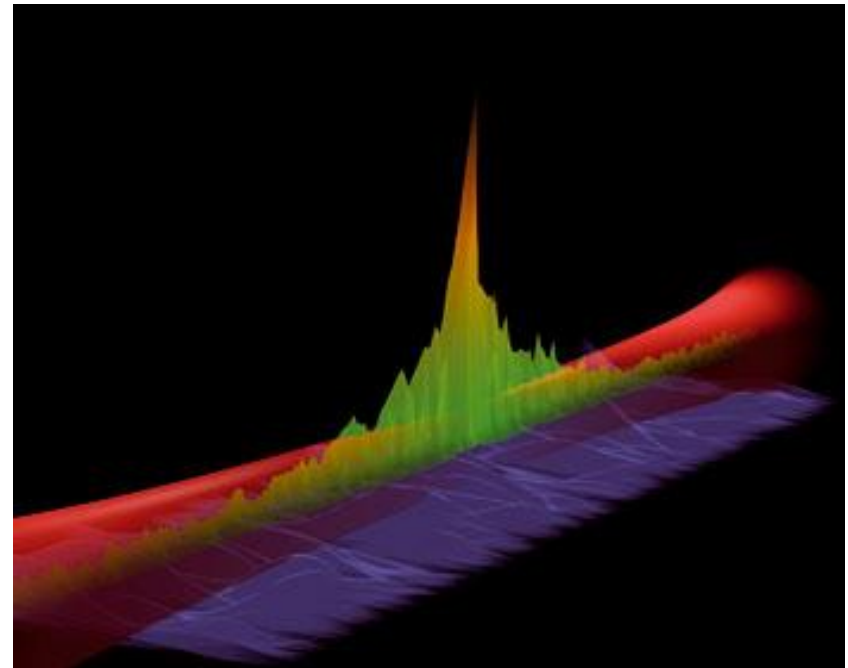
$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}$$

Ezek éppen azok az energiaértékek, mint amelyeket a dobozba zárt – de Broglie-féle állóhullámokként leírt – részecskékre kaptunk!

## Véges potenciálgödör

Egy érdekes jelenség alakul ki 1D-ben, amelynek neve **Anderson-lokalizáció**: a hullámfüggvény nem a gödörben, hanem a gödörhöz lokalizálódik. Akár a legkisebb potenciálgödör esetén is létrejöhet egyetlen kötött állapot. Ennek hullámfüggvénye sokkal kilóg a gödörből.

Lézer hullám vezetőbeli  
rendezetlenségen kialakuló  
anyaghullám lokalizáció



## A harmonikus oszcillátor (1)

A rugalmas erő potenciálja a  $k$  direkciós erővel kifejezve

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

amellyel a tömegpont mechanikai energiája

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2$$

## A harmonikus oszcillátor (2)

A  $k$  helyett az  $m\omega^2$  kifejezést írva, továbbá az operátorformalizmust

$$x \rightarrow x$$

$$p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$$

alkalmazva a harmonikus oszcillátorra vonatkozó Schrödinger-egyenlet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2\Psi = E\Psi$$

## A harmonikus oszcillátor (3)

Az egyenletet célszerű átrendezni a

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right) \Psi = 0$$

alakra. A megoldás az ún. Sommerfeld-féle polinom-módszerrel történik. Az **első lépés az aszimptotikus – nagy  $x$  értékekre érvényes – megoldás** megkeresése. A **második lépésben a imént kapott aszimptotikus eredményt egy véges fokszámú polinommal szorozzuk** és úgy állítjuk elő a probléma teljes megoldását. Ehhez az eljáráshoz érdemes új változókat bevezetni:

$$K = \frac{2E}{\hbar\omega} \qquad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$$

## A harmonikus oszcillátor (4)

Ezek behelyettesítésével a fenti egyenlet átírható a

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + (K - \xi^2)\Psi = 0$$

Amennyiben nagy a  $\xi$  értéke (azaz nagy az  $x$  értéke is  $\rightarrow$  aszimptotikus megoldás), úgy az egyenlet leegyszerűsödik a

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} - \xi^2\Psi = 0 \quad \text{alakra.}$$

## A harmonikus oszcillátor (5)

Az egyenlet megoldása nagy  $\xi$  értékekre

$$\Psi_a \sim e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

A teljes megoldást a

$$\Psi(\xi) = \varphi(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

formában keresessük tovább. Behelyettesítve a nem-aszimptotikus egyenletbe a következő egyenlet adódik:

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d\varphi}{d\xi} + (K - 1)\varphi = 0$$



## A harmonikus oszcillátor (6)

Az egyenlet  $\varphi(\xi)$  megoldását véges fokszámú polinom alakban keressük:

$$\varphi(\xi) = \sum_{r=0}^n c_r \xi^r$$

ahol a  $c_r$  együtthatók konstans értékűek. Képezzük a polinom  $\xi$ -szerinti deriváltjait:

$$\frac{d\varphi(\xi)}{d\xi} = \sum_{r=0}^n r c_r \xi^{r-1} \quad \frac{d^2\varphi(\xi)}{d\xi^2} = \sum_{r=0}^n r(r-1) c_r \xi^{r-2}$$

## A harmonikus oszcillátor (7)

Ezek behelyettesítése és az „átindexelések” után kapjuk:

$$\sum_{r=0}^n [(r+2)(r+1)c_{r+2} - (2r+1-K)c_r] \xi^r = 0$$

Ez csak akkor lehet érvényes, ha a  $\xi^r$  összes együtthatója eltűnik bármely  $r$  értékre. Ez viszont egy kapcsolatot jelent az együtthatók között

$$c_{r+2} = \frac{2r+1-K}{(r+2)(r+1)} c_r$$

## A harmonikus oszcillátor (8)

Ha ez az  $r=n$ -től teljesül, akkor a  $2n+1=K$  összefüggés áll fenn.

Tehát az  $E$  és  $k$  közötti

$$K = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

kapcsolat alapján a harmonikus oszcillátor energiaszintjei:

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

Az  $n=0$  esetben az oszcillátor zérusponthi energiájáról beszélünk:

## A harmonikus oszcillátor (9)

Megjegyzés: a  $\varphi_n(\xi)$  polinomot  $n$ -ed fokú  $H_n(\xi)$  Hermite-polinomnak nevezzük a

$$\frac{d^2 H_n}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH_n}{d\xi} + 2nH_n = 0$$

differentiálegyenlet alapján. Ezt követően az oszcillátor sajátfüggvényei a  $\xi$ -vel kifejezve

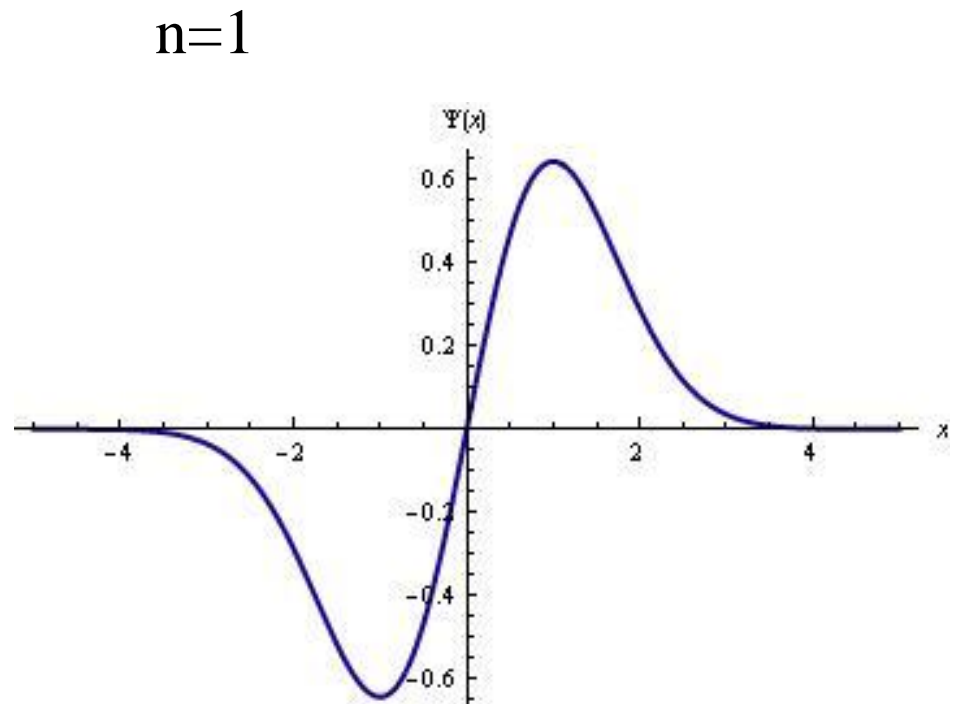
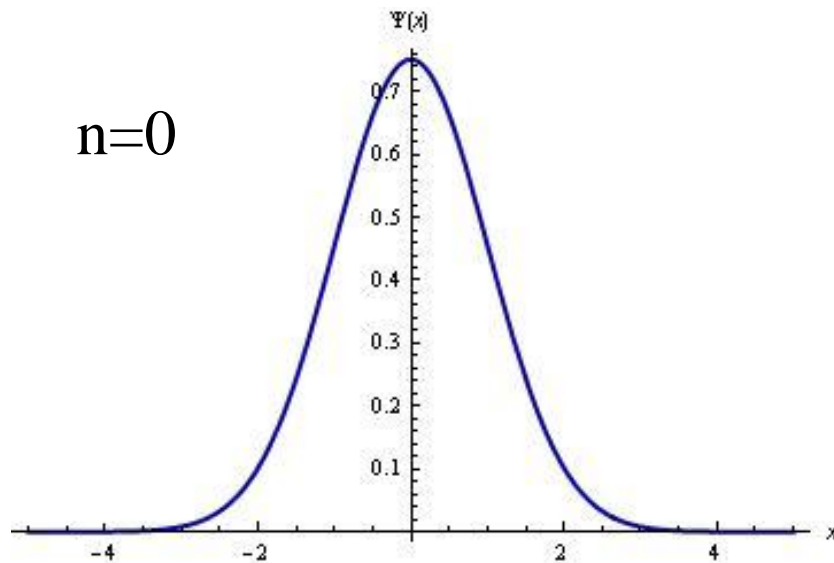
$$\Psi_n(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi)$$

Az első néhány Hermite-polinom:  $H_0(\xi) = 1$   $H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$

$H_1(\xi) = 2\xi$   $H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$

## A harmonikus oszcillátor (10)

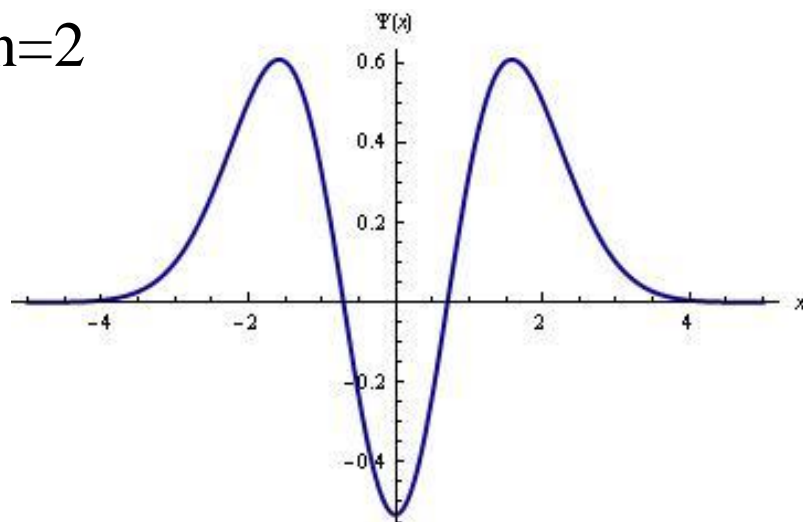
Az tömeget  $m=1$ , körfrekvenciát  $\omega=1$  és a  $\hbar=1$  választással, valamint a normálási tényezőt (!) is figyelembe véve az oszcillátor hullámfüggvényei négy különböző  $n$  értékre:



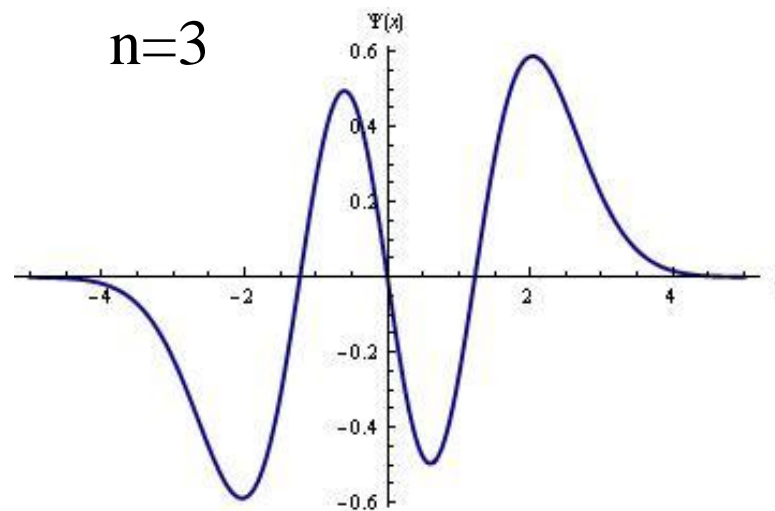
# A harmonikus oszcillátor (11)

Az oszcillátor hullámfüggvényei:

$n=2$

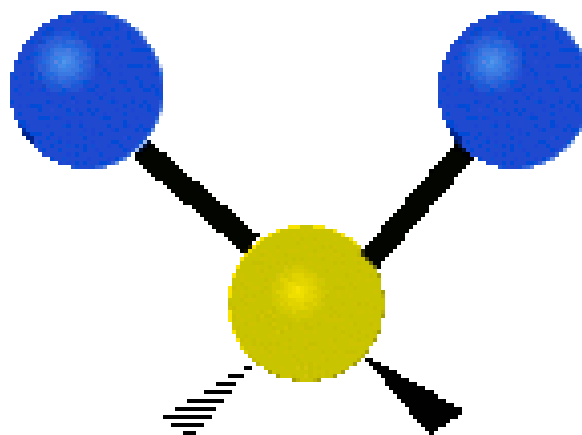


$n=3$



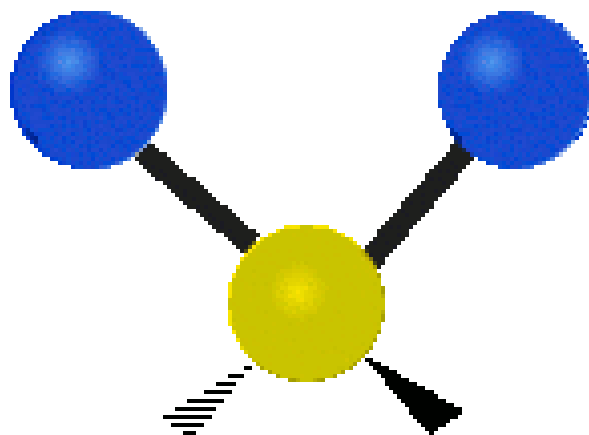
## Molekula-rezgések (1)

A metilén-csoport (- CH<sub>2</sub> -) rezgései: szimmetrikusan nyújtó (symmetrical stretching)



## Molekula-rezgések (2)

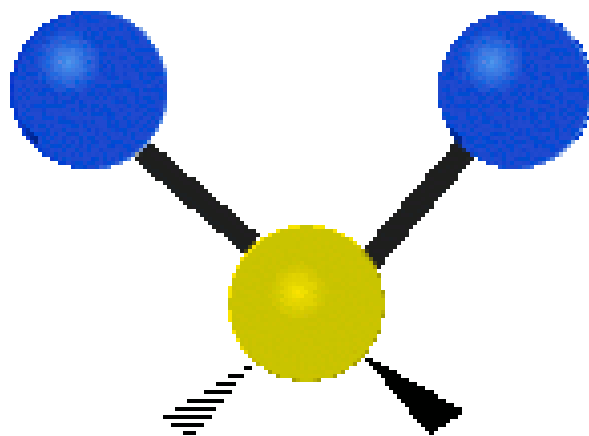
A metilén-csoport (- CH<sub>2</sub> -) rezgései: antiszimmetrikusan nyújtó  
(antisymmetrical stretching)





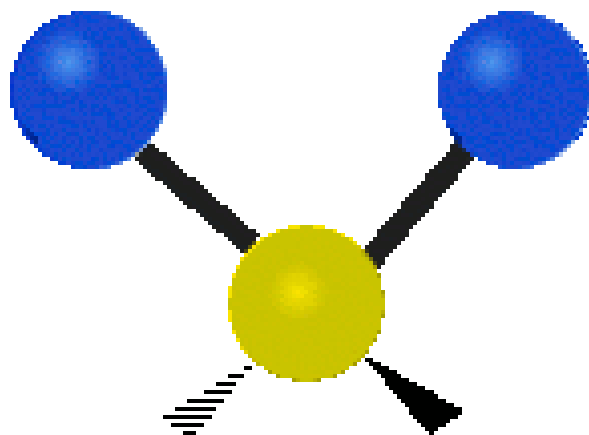
## Molekula-rezgések (3)

A metilén-csoport (- CH<sub>2</sub> -) rezgései: ollózó (scissoring)



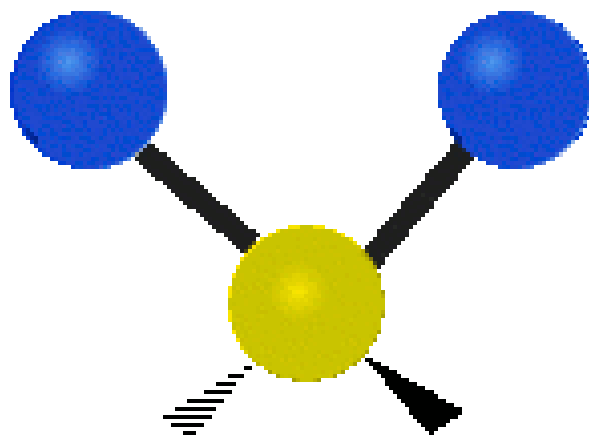
## Molekula-rezgések (4)

A metilén-csoport (- CH<sub>2</sub> -) rezgései: rokkoló (rocking)



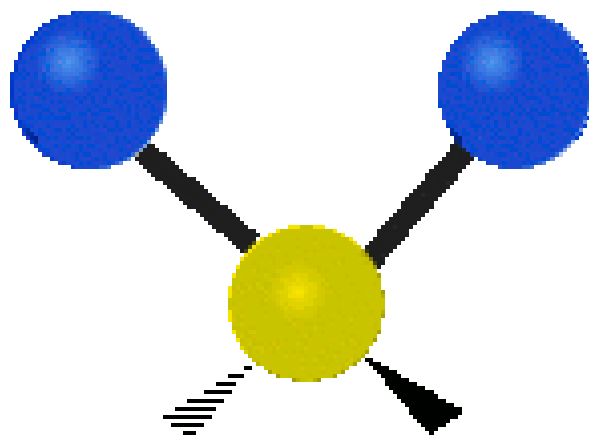
## Molekula-rezgések (5)

A metilén-csoport (- CH<sub>2</sub> -) rezgései: csóváló (wagging)



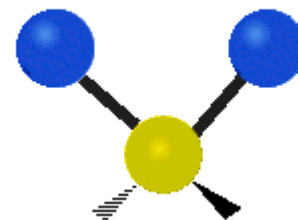
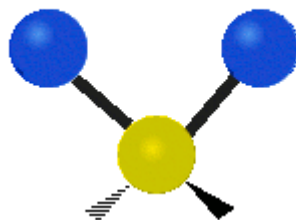
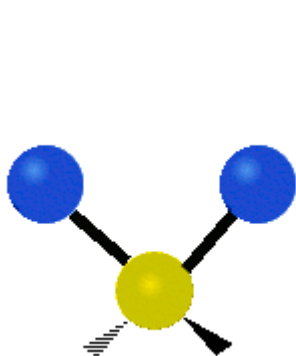
## Molekula-rezgések (6)

A metilén-csoport (- CH<sub>2</sub> -) rezgései: tvisztelő (twisting)

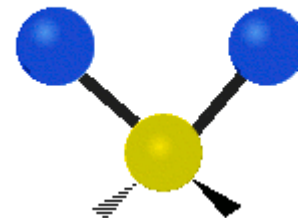
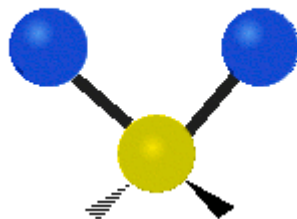
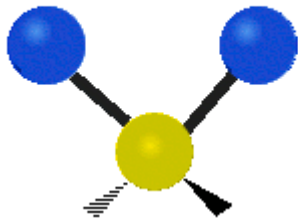


# Molekula-rezgések (7)

Kezdődhet a buli:



$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z) \Psi = E \Psi$$



## A rácsrezgések kvantuma – a fonon (1)

Már láttuk, hogy a harmonikus oszcillátor energiája:

$$E = \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

Az is igaz, hogy ha egy fizikai rendszer energiája ilyen alakra hozható, akkor az egy harmonikus oszcillátornak tekinthető. Az azonos, egymástól  $a$  távolságú atomokból álló lineáris lánc  $n$ -edik atomjának mozgásegyenlete

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_n}{dt^2} &= -k(x_n - x_{n+1}) - k(x_n - x_{n-1}) \\ &= k(x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n) \end{aligned}$$

## A rácsrezgések kvantuma – a fonon (2)

Az  $m$  tömegű pontra ható erőhöz tartozó potenciál

$$V = \frac{1}{2} k \sum_n 2(x_n^2 - x_{n-1}x_n - x_nx_{n+1})$$

Ha láncon egy  $q$  hullámszámú állóhullámot tekintünk

$$x_n = A \sin(nqa) \sin(\omega_q t)$$

Itt a körfrekvencia

$$\omega_q = 2 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{qa}{2}$$

## A rácsrezgések kvantuma – a fonon (3)

A potenciális energia

$$V = \frac{1}{2} mA^2 \omega_q^2 \left( \sum_n \sin^2(nqa) \right) \sin^2(\omega_q t)$$

Ez egy olyan oszcillátor potenciális energiája, amelynek kitérése

$$x = A \sqrt{\sum_n \sin^2(nqa)} \sin(\omega_q t)$$



## A rácsrezgések kvantuma – a fonon (4)

Az ehhez tartozó kinetikus energia

$$T = \frac{1}{2} mA^2 \omega_q^2 \left( \sum_n \sin^2(nqa) \right) \cos^2(\omega_q t)$$

A teljes energia

$$E = \frac{1}{2} mA^2 \omega_q^2 \left( \sum_n \sin^2(nqa) \right)$$

Ha itt egy oszcillátorról beszélünk, akkor a kvantummechanika szerint a lehetséges energia értékei:

$$E_n = \hbar \omega_q \left( n_q + \frac{1}{2} \right) \quad \text{A rácsrezgések kvantuma a fonon.}$$

# Kérdések (1)

Mit állít a legkisebb hatás elve (Hamilton-elv)?

A hatás variációjakor milyen egyenletek állnak elő, és mi ezek fizikai jelentése?

Mi az általánosított impulzus, és mi a fizikai jelentése?

Mi a Hamilton-függvény alakja, milyen mennyiségektől függ, és konzervatív erőter esetén mi a fizikai jelentése?

Mik a kanonikusan konjugált mennyiségek?

Hogyan néznek ki a felcserélési relációk?

Milyen célból és pl. hogy vezetünk be operátorokat?

Mi a sajátértékek jelentése? Milyen mennyiségek lehetnek?

Mi az energiaoperátor (Hamilton-operátor) matematikai alakja?

Hogyan néz ki az időtől független Schrödinger-egyenlet általában?

Hogyan kell megoldani az egydimenziós végtelenfalú potenciálgödörbe zárt részecske problémáját?

## Kérdések (2)

Hogyan néz ki a harmonikus oszcillátorra vonatkozó Schrödinger egyenlet?

Mi a megoldás során követett eljárás alapgondolata?

Mik az oszcillátor sajátértékei?

Mi azoknak a polinomoknak az összefoglaló neve, amelyek a sajátfüggvényeket előállítják?

Nevezzen meg a fizika és kémia területéről jelenségeket, amelyek a magyarázata a kvantált harmonikus oszcillátorra vezethető vissza!

*(folyt. köv.)*

*(Az ilyen színnel írt kérdések a mélyebben érdeklődők részére vannak.)*