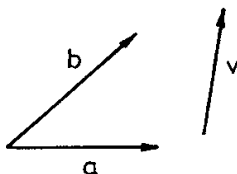


Vektorok

Vektoron irányított szakaszt értünk.

A definíció értelmében tehát a vektort akkor ismerjük, ha ismerjük a hosszát és az irányát. A **vektort** kövér kis betűkkel (**a**, **b** stb.) jelöljük, megkülönböztetve az a , b számoktól, amelyeket **skalároknak** (skaláris mennyiségeknek) nevezünk.

A vektor **abszolút értéke** az irányított szakasz hossza. Az **a** vektor abszolút értékének jelölése: $|\mathbf{a}|$.



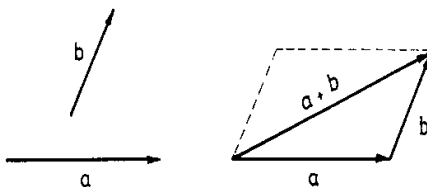
Ha a vektor hossza egységnyi, akkor **egységvektornak** nevezzük. Jelölése: \mathbf{a}^0 , \mathbf{b}^0 .

Nullvektor (zérusvektor) az olyan vektor, amelynek a hossza nulla. Jele: $\mathbf{0}$.

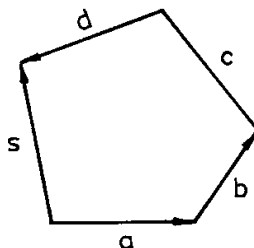
Két vektort **egyenlőnek** tekintünk, ha párhuzamos eltolással egymásba átvihetők (fedésbe hozhatók), azaz, ha az eltolás után kezdőpontjuk és végpontjuk is egybeesik.

Műveletek vektorokkal

Az **a** és **b** vektorok **a + b** összegén a következő vektort értjük: a **b** vektort eltoljuk önmagával párhuzamosan úgy, hogy kezdőpontja az **a** vektor végpontjával essék egybe. Ezután az **a** vektor kezdőpontját az eltolt **b** vektor végpontjával összekötő vektort képezzük. Ez lesz az **a + b** vektor (paralelogramma szabály).



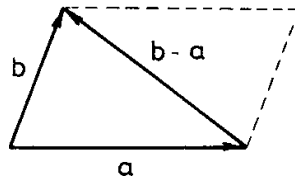
Több vektor összege pl. az ábrán átható módon képezhető: $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} \rightarrow$



Az összeadás kommutatív és asszociatív, azaz

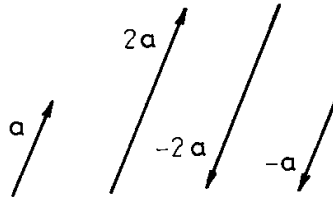
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \text{ és } (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Két vektor $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ különbsége az a vektor, amely az \mathbf{a} végpontjából indul és a \mathbf{b} végpontjába mutat. Tehát az $\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ különbségvektor olyan vektor, amelyre $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$.



Vektor szorzása számmal

Az \mathbf{a} vektor λ -szorosán (λ valós szám) azt a $\lambda\mathbf{a}$ -val jelölt vektort értjük, amelynek abszolút értéke $|\lambda||\mathbf{a}|$, iránya pedig \mathbf{a} irányával egyező, ha λ pozitív, és azzal ellentétes, ha λ negatív.



Ha az $\mathbf{a} (\neq \mathbf{0})$ vektort megszorozzuk a $\lambda = \frac{1}{|\mathbf{a}|}$ számmal, akkor a szorzatvektor hossza egységnyi lesz. Ugyanis

$$\left| \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} \right| = \frac{1}{|\mathbf{a}|} |\mathbf{a}| = 1.$$

Tehát egy **vektor egységvektorát** kapjuk, ha abszolút értékével osztjuk:

$$\mathbf{a}^0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

A skaláris szorzat

Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok \mathbf{ab} -vel jelölt **skaláris szorzata** a két vektor abszolút értékének és az általuk közrezárt szög koszinuszának a szorzata, azaz

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi,$$

ahol φ az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektor által közrezárt szög. Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektor skaláris szorzatának jelölésére használatos az (\mathbf{a}, \mathbf{b}) jelölés is.

Az értelmezésből látható, hogy a skaláris szorzás eredménye egy szám (skalár). Továbbá, ha a két vektor merőleges egymásra ($\varphi = 90^\circ$), akkor skaláris szorzatuk nulla, mert $\cos \varphi = 0$. Ennek fordítottja is igaz. Ha a két vektor skaláris szorzata nulla, akkor a két vektor egymásra merőleges.

A skaláris szorzás kommutatív és (az összeadásra nézve) disztributív:

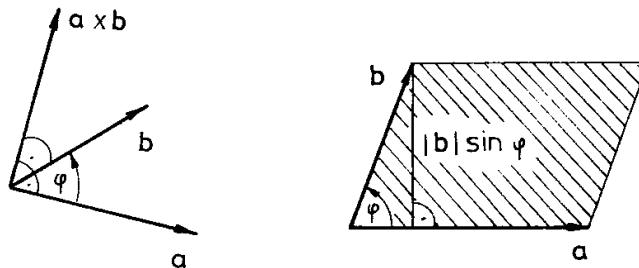
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad \text{és} \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}.$$

A vektoriális szorzás

Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok **vektoriális szorzatán** azt az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektort értjük, amely merőleges mindkét vektorra, hossza

$$|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \varphi,$$

ahol φ a két vektor által közrezárt szög. Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektorok jobbsodrású rendszert alkotnak.



Ha \mathbf{a} és \mathbf{b} párhuzamosak, azaz $\varphi = 0$, akkor $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0$. Ez egyúttal azt jelenti, hogy $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, tehát két párhuzamos vektor vektoriális szorzata nullvektor. A vektoriális szorzás nem kommutatív, mert az áll fenn, hogy

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

A disztributív törvény viszont érvényes, azaz

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

Megjegyzés: Az értelmezésből látszik, hogy $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor hossza az $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok által kifeszített paralelogramma területével egyenlő, ahol $|\mathbf{a}|$ a paralelogramma alapja, $|\mathbf{b}| \sin \varphi$ a magassága.

A vegyes szorzat

Az \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} vektorok **vegyes szorzatán** az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$ szorzatot értjük, és ezt **abc** -vel jelöljük, azaz

$$abc = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

A vegyes szorzat egy skalár (szám), mert $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ is és \mathbf{c} is vektor, és e két vektor skaláris szorzatát kell venni.

Vektorok koordinátás megadása – a vektor, mint számhármas

Vegyünk fel a térben egy O pontot, és e pontból kiinduló, páronként egymásra merőleges három egységvektort. Jelölje ezeket rendre \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , úgy, hogy ebben a sorrendben jobbsodrású rendszert alkossanak, hasonlóan, ahogy a térbeli Descartes-féle koordinátarendszer x , y , z tengelyei. Ezek a vektorok a **bázisvektorok**. Mutasson a \mathbf{v} vektor az O pontból a $P = (v_1, v_2, v_3)$ pontba. Ekkor \mathbf{v} előállítható a $v_1\mathbf{i}$, $v_2\mathbf{j}$, $v_3\mathbf{k}$ vektorok összegeként:

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}.$$

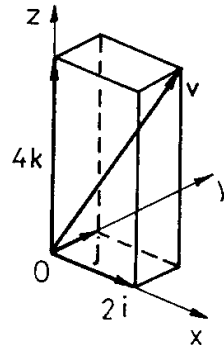
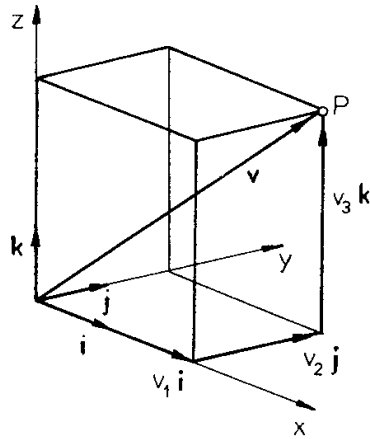
A v_1, v_2, v_3 számokat a **vektor koordinátáinak** nevezzük, pontosabban az \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} bázisra vonatkozó koordinátáinak. Így a vektort megadhatjuk koordinátaival, azaz, ha 3 adott sorrendű valós számot megadunk, akkor ez egy háromdimenziós vektort jelent. Az alábbi jelöléseket használjuk $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. (Az \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} egységvektorokat szokás $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ módon is jelölni.) Pl. A $(2, 1, 4)$ vektor:

VEKTORMŰVELETEK KOORDINÁTÁKKAL

A vektor abszolút értéke

A $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektor **abszolút értéke**:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$



Legyen adott a $\mathbf{v} = (3, 1, -2)$ vektor. Számítsuk ki az abszolút értékét!

Megoldás: $|\mathbf{v}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = 14$.

Vektorok egyenlősége

A koordinátás alakban megadott vektorok egyenlőségét az alábbi módon értelmezzük. Tekintsünk két vektort

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = (a_1, a_2, a_3) \text{ és}$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} = (b_1, b_2, b_3).$$

Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok akkor és csak akkor **egyenlők**, ha

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3,$$

azaz az azonos indexű koordinátáik egyenlők.

Vektorok összege (különbsége)

Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok **összege (különbsége)**:

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3).$$

Két vektor összegét (különbségét) tehát úgy képezzük, hogy a megfelelő koordinátákat összeadjuk (kivonjuk).

Legyen $\mathbf{a} = (2, 3, -1)$ és $\mathbf{b} = (1, -4, 5)$. Számítsuk ki a két vektor összegét!

Megoldás: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3, -1, 4)$.

Skalárral való szorzás

Az \mathbf{a} vektornak a λ számmal való szorzata:

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

A vektort úgy szorozzuk egy számmal, hogy mindhárom koordinátáját megszorozzuk ugyanazzal a számmal.

Legyen $\mathbf{a} = (2, 3, 1)$. Számítsuk ki $4\mathbf{a}$ -t!

Megoldás: $4\mathbf{a} = (4 \cdot 2, 4 \cdot 3, 4 \cdot 1) = (8, 12, 4)$.

Az egységvektor koordinátás alakja

A skalárral való szorzással fel tudjuk írni a \mathbf{v} vektor egységvektorát:

$$\mathbf{v}^0 = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\frac{v_1}{|\mathbf{v}|}, \frac{v_2}{|\mathbf{v}|}, \frac{v_3}{|\mathbf{v}|} \right).$$

Írjuk fel az $\mathbf{a} = (-2, \sqrt{3}, 3)$ vektor egységvektorát.

Megoldás: Mivel $|\mathbf{a}| = \sqrt{4+3+9} = \sqrt{16} = 4$, ezért

$$\mathbf{a}^0 = \frac{1}{4} \mathbf{a} = \frac{1}{4} (-2, \sqrt{3}, 3) = \left(-\frac{2}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4} \right)$$

Skaláris szorzat

Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. A két vektor \mathbf{ab} skaláris szorzata:

$$\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Két vektor skaláris szorzatát tehát úgy számíthatjuk ki, hogy a megfelelő koordináták szorzatát összeadjuk.

Megmutatjuk, hogy ez a geometriai definícióból következik. Ugyanis a skaláris szorzat értelmezése szerint

$$\mathbf{ii} = \mathbf{jj} = \mathbf{kk} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1; \quad \mathbf{ij} = \mathbf{ik} = \mathbf{jk} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Ezeket felhasználva,

$$\mathbf{ab} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Legyen $\mathbf{a} = (6, 2, 1)$ és $\mathbf{b} = (1, -1, 2)$. Számítsuk ki \mathbf{ab} -t!

Megoldás. $\mathbf{ab} = 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 6$.

Megjegyzés. A skaláris szorzat értelmezéséből az is kiolvasható, hogy a két vektor által közrezárt szög koszinusza:

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

Ezt felhasználva, a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektor x tengellyel (így az \mathbf{i} vektorral) közrezárt szögének a koszinusza:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{vi}}{|\mathbf{v}| \cdot 1} = \frac{v_1}{|\mathbf{v}|}.$$

Ugyanígy az y ill. z tengellyel bezárt szög koszinusza:

$$\cos \beta = \frac{v_2}{|\mathbf{v}|} \quad \text{ill.} \quad \cos \gamma = \frac{v_3}{|\mathbf{v}|}.$$

Ezeket az eredményeket összevetve az egységvektor koordinátás alakjával, azt kapjuk, hogy

$\mathbf{v}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Az egységvektor koordinátái tehát az ún. **iránykoszinuszok**.

Mivel $|\mathbf{v}^0| = 1 = |\mathbf{v}^0|^2$, ezért

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

A $\mathbf{v} = (-1, 1, \sqrt{2})$ vektor egységvektora $\mathbf{v}^0 = \frac{1}{2}(-1, 1, \sqrt{2})$. Tehát $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos \beta = \frac{1}{2}$, $\cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Így a \mathbf{v} vektor az x, y, z tengellyel közrezárt szögei rendre: $120^\circ, 60^\circ, 45^\circ$.

Vektoriális szorzat

Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Akkor a két vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ **vektoriális szorzata**:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k},$$

azaz

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Megmutatjuk, hogy a vektoriális szorzatnak ez a kiszámítási módja a geometriai definícióból következik.

A vektoriális szorzat értelmezése szerint:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j},$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}.$$

Ezeket felhasználva,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) = \\ &= a_1 b_2 \mathbf{k} - a_1 b_3 \mathbf{j} - a_2 b_1 \mathbf{k} + a_2 b_3 \mathbf{i} + a_3 b_1 \mathbf{j} - a_3 b_2 \mathbf{i} = \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

A vektoriális szorzat kiszámítása a determináns segítségével

A fenti "képletet" nehéz megjegyezni, ezért az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektoriális szorzatot **determináns** segítségével számítjuk ki.

Másodrendű determináns

Legyen adva az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

alakzat (táblázat, később majd mátrixnak nevezzük). Az indexek azt adják meg, hogy az elem melyik sor (első index) melyik oszlopában (második index) helyezkedik el. A táblázat elemeiből alkotott

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

kifejezéssel a táblázat determinánsát adjuk meg, és ennek jelölése

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Számítsuk ki a

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

determinánst!

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 14.$$

Harmadrendű determináns

A harmadrendű determináns kiszámítását visszavezetjük másodrendű determinánsok kiszámítására a következő módon:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

A megjelenő másodrendű determinánsokat úgy képezzük, hogy a harmadrendű determinánsból töröljük azt a sort és azt az oszlopot, amelyben az előttük álló elem szerepel. (Pl. Az a_{11} melletti determináns úgy jön létre, hogy kihúztuk az első sort és első oszlopot; az a_{12} melletti úgy, hogy kihúztuk az első sort és a második oszlopot – és

negatív előjelet írunk $-$, az a_{13} mellettivel az első sort és a harmadik oszlopot.) Az így kapott másodrendű determinánsokat már ki tudjuk számítani. Lásd:

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

A determináns segítségével a vektoriális szorzat a következőképpen írható fel:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1,3,2)$ és $\mathbf{b} = (2,4,1)$ vektorok vektoriális szorzatát és az általuk kifeszített paralelogramma területét!

Megoldás:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = (-5, 3, -2).$$

A két vektor által kifeszített paralelogramma területe, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, azaz

$$T = \sqrt{38}.$$

Megjegyzés: Az $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ szorzatot **kétszeres vektoriális szorzatnak** nevezzük. Érvényes az ún. **kifejtési tétel:**

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{ab})\mathbf{c}.$$

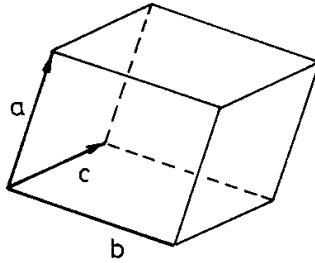
Vegyes szorzat

Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, akkor a három vektor **vegyes szorzata** az alábbi módon számítható ki:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

(Ha elvégezzük koordinátákkal az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ majd az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$ szorzást éppen azt az értéket kapjuk meg, amit a determináns ad.)

Megjegyzés: Az \mathbf{abc} vegyes szorzat abszolút értéke a három vektor által kifeszített paralelepipedon (paralelogramma alapú hasáb) térfogatát adja.



Ha a vegyes szorzat értéke nulla, akkor a három vektor egy síkban van. Az értelmezésből az is következik, hogy $\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab}$, vagyis a tényezők ciklikus cseréje esetén a vegyes szorzat értéke nem változik. Viszont két egymás melletti tényező cseréje előjelváltást eredményez, azaz $\mathbf{bac} = \mathbf{cba} = \mathbf{acb} = -\mathbf{abc}$.

Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (9,8,7)$, $\mathbf{b} = (6,5,4)$ és $\mathbf{c} = (3,2,1)$ vektorok vegyes szorzatát!

Megoldás:

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

A három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogata tehát nulla, ezért a három vektor egy síkban van.