Fizika 1i, 2020 őszi félév, 3. gyakorlat - MEGOLDÁS

Órai munkára javasolt feladatok

F1. A csiga tömege nulla és súrlódásmentes, ezért a csiga mindkét oldalán megfeszülő kötélrészben ugyanakkora K erő ébred.

a) Nyugalmi helyzet esetén az egyes testekre ható erők vektori összege nulla. Lejtőirányban:

$$m_1 g \sin 30° = K,$$
$$m_2 g \sin 60° = K.$$

Ezekből a kérdéses arány $m_1/m_2 = \sin 60°/\sin 30° = \sqrt{3} \approx 1{,}7$.

b) Mindkét test ugyankkora a gyorsulással mozog, mivel a kötél nyújthatatlan. A lejtőirányú mozgásegyenletek ($m_1 = 3m_2$):

$$3m_2 g \sin 30° - K = 3m_2 a,$$
$$K - m_2 g \sin 60° = m_2 a.$$

A két egyenlet összeadásával az eredmény $a \approx 0{,}16g = 1{,}6\ \mathrm{m/s^2}$.

c) A b) részben felírt első egyenletből a kötélerő: $K = m_1 g \sin\alpha - m_1 a \approx 0{,}34 m_1 g$.

F2. a) Jelöljük D-vel a rugóállandókat, valamint legyen $\Delta\ell_1$ a felső, $\Delta\ell_2$ az alsó rugó megnyúlása. Az egyes testek egyensúlya miatt:

$$D\Delta\ell_1 = m_1 g + D\Delta\ell_2,$$
$$D\Delta\ell_2 = m_2 g.$$

Tehát a megnyúlások aránya:

$$\frac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} = \frac{3}{2}.$$

b) A felső rugó már nem fejt ki erőt az m_1 testre, de az alsó rugóban ébredő erő az indulás pillanatában még nem változik meg:

$$m_1 a = m_1 g + D\Delta\ell_2.$$

Felhasználva az a) rész második egyenletét:

$$a = \frac{m_1 + m_2}{m_1} g = 3g.$$

c) Most az alsó rugóerő szűnik meg, így:

$$m_1 a = D\Delta\ell_1 - m_1 g.$$

Az a) rész egyenleteivel:

$$a = \frac{m_2}{m_1} g = 2g.$$

F3. a) Ha a tégla és a deszka együtt mozog, egy rendszernek tekinthető (a közöttük ható tapadási súrlódási erő belső erő). A lejtőirányú mozgásegyenlet:

$$(m_1 + m_2) g \sin\alpha - S = (m_1 + m_2) a,$$

ahol $S = \mu N$ a lejtő és a deszka között fellépő csúszási súrlódási erő. Lejtőre merőleges irányban:

$$N = (m_1 + m_2) g \cos\alpha.$$

Ezekből a gyorsulás:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \approx 3{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

b) Ha csak a téglát nézzük, akkor rá a (maximális) tapadási súrlódási erő hat: $S_{\text{tap.}} = \mu_0 N_2$, ahol N_2 a tégla által a deszkára kifejtett nyomóerő. Tehát a lejtőirányú egyenlet:

$$m_2 g \sin\alpha - S_{\text{tap.}} = m_2 a.$$

Lejtőre merőlegesen:

$$N_2 = m_2 g \cos\alpha.$$

Felhasználva a gyorsulásra kapott eredményt, a tapadási súrlódási együttható legkisebb értéke: $\mu_0 = \mu = 0{,}4$.

c) Mivel ebben az esetben a tapadási súrlódási együttható kisebb, mint a b) részben megadott minimális érték, a tégla megcsúszik a deszkán. A talajhoz rögzített rendszerben a téglára felírható egyenletek lejtőirányban, illetve arra merőlegesen:

$$m_2 g \sin\alpha - \mu' N_2 = m_2 a_2,$$
$$N_2 = m_2 g \cos\alpha.$$

Ezekből

$$a_2 = g(\sin\alpha - \mu'\cos\alpha) \approx 4{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

F4. A munkatétel szerint a lövedékre ható erők összes előjeles munkája a lövedék mozgási energiáját változtatja meg.

a) Az állandó F erő által végzett munka $W = -Fd$, mivel az erő iránya és az elmozdulás ellentétes irányú. Tehát

$$-Fd = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2.$$

Innen a kilépési sebesség:

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2Fd}{m}} \approx 14\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b) Mivel az erő a megtett távolságtól függ, így a munka kiszámításához integrálni kell. Azonban ezt megkerülhetjük, úgy, ha felismerjük, hogy a megadott erőtörvény a rugóéval azonos. Így a mozgást úgy foghatjuk fel, mintha a lövedék egy kezdetben nyújtatlan rugónak ütközne. A d-vel összenyomott rugó rugalmas energiája $1/2Dd^2$, vagyis a rugó által végzett munka a lövedék mozgása során $W = -1/2Dd^2$. Ezzel a munkatétel:

$$-\frac{1}{2}Dd^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2,$$

ezzel a végsebesség:

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{Dd^2}{m}} \approx 17\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

F5. Amikor a szánkó h magasságról lecsúszik, a nehézségi erőtér pozitív $W_{\text{neh.}} = mgh$ munkát, a súrlódási erő pedig negatív $W_{\text{súrl.}}$ munkát végez a szánkón. Mivel a szánkó álló helyzetből indult és álló helyzetbe is érkezett, a munkatétel szerint:

$$W_{\text{neh.}} + W_{\text{súrl.}} = 0 \ \rightarrow \ W_{\text{súrl.}} = -mgh.$$

Lassan visszahúzva a szánkót a lecsúszási úton az eredeti helyére, a súrlódási erő munkája ugyanakkora, a nehézségi erő munkája viszont most negatív: $-mgh$. Az általunk végzett munka W, munkatétel miatt:

$$W - mgh - mgh = 0 \ \rightarrow \ W = 2mgh \approx 2{,}4\ \mathrm{kJ}.$$

F6. A lassú felhúzás során a gyermek által kifejtett F erő mindig megegyezik a szánkóra ható csúszási súrlódási erővel és a szánkóra ható nehézségi erő lejtőirányú komponensével:

$$F = \mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha.$$

A lejtő szöge változik, ezért F is változik. Tekintsünk egy kicsiny Δs elmozdulást, ami során az F erő állandónak tekinthető. Eközben végzett elemi munka

$$\Delta W = F\Delta s = \mu mg\cos\alpha \cdot \Delta s + mg\sin\alpha \cdot \Delta s.$$

Mivel Δs kicsiny, egyenes szakasznak fogható fel érintőirányban, ezért az elmozdulás vízszintes irányban $\Delta L = \Delta s \cdot \cos\alpha$, függőlegesen pedig $\Delta h = \Delta s \cdot \sin\alpha$. Ezeket felhasználva, az elemi munkavégzés:

$$\Delta W = \mu mg\Delta L + mg\Delta h.$$

A felhúzás során végzett munka ezen elemi munkák összege, ami könnyen elvégezhető, hiszen vízszintes irányban a teljes elmozdulás L, függőlegesen h:

$$W = mg(\mu L + h).$$

F7. Először határozzuk meg az első kozmikus sebességet. Ekkora sebességnél az m tömegű rakéta R földsugarú körpályán mozog az M tömegű Föld körül:

$$\frac{\gamma mM}{R^2} = \frac{mv_{\mathrm{I}}^2}{R} \ \rightarrow \ v_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}.$$

Függőlegesen kilőve a rakétát, a rakéta teljes energiája állandó marad:

$$-\frac{\gamma mM}{R} + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{I}}^2 = -\frac{\gamma mM}{r},$$

ahol a bal oldal a rakéta Föld felszínén lévő gravitációs potenciális energiájának és mozgási energiájának összege, a jobb oldal pedig a rakéta gravitációs potenciális energiája a legmagasabb pontján (itt a sebessége zérus). Ebbe behelyettesítve az első kozmikus sebesség kifejezését, a rakéta Föld középpontjától mért legnagyobb távolsága $r = 2R \approx 12800$ km.

F8. Miután a testet óvatosan a rugóra helyezzük, a test egyensúlyban marad, tehát

$$mg = Dy_0,$$

ahol $y_0 = 1$ cm.

A golyó elengedése után kialakuló mozgásra érvényes a mechanikai energiamegmaradás törvénye. A test az elengedésekor a nyújtatlan rugó felső végétől mérve mgh helyzeti energiával rendelkezik. Miután a golyó elérte az $y = 8$ cm-rel összenyomódott állapotot, a test helyzeti energiája $-mgy$, a rugó rugalmas energiája $1/2Dy^2$, a test mozgási energiája nulla. Tehát

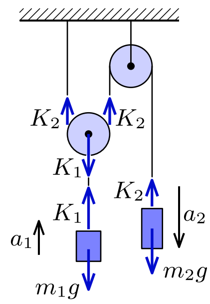
$$mgh = -mgy + \frac{1}{2}Dy^2,$$

vagyis a szükséges a magasság az első egyenlet felhasználásával:

$$h = \frac{Dy^2}{2mg} - y = \frac{y^2}{2y_0} - y = 24\ \mathrm{cm}.$$

Otthoni gyakorlásra szánt feladatok

H7. Az erők az alábbi *ábrán* láthatók, ahol felhasználtuk, hogy ideális fonál minden pontját ugyanakkora erő feszíti.



A gyorsulások iránya a tömegek arányától függ, mi most az ábrán jelölt irányokat tételezzük fel. Az m_1 és m_2 tömegű testek mozgásegyenletei:

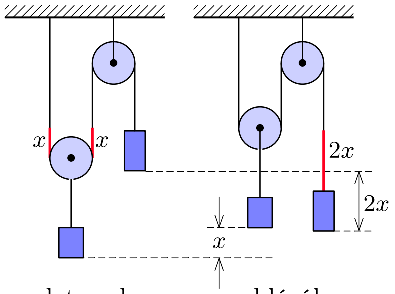
$$(1) \qquad K_1 - m_1g = m_1a_1\,,$$

$$(2) \qquad m_2g - K_2 = m_2a_2\,.$$

Az ideális mozgócsigára is felírhatjuk a dinamika alapegyenletét:

$$(3) \qquad 2K_2 - K_1 = m_{\text{csiga}}a_1 \approx 0\,,$$

ahol felhasználtuk, hogy az ideális csiga tömege elhanyagolható, ezért (bár az 1-es testtel együtt gyorsul) a rá ható erők eredője nulla.



Az egyenletrendszer megoldásához szükségünk van még egy egyenletre. A csigákon átvetett fonál nyújthatatlansága kapcsolatot teremt az a_1 és a_2 gyorsulások között. Ahogy az a 2. ábrán látható, ha a bal oldali test (és ezzel együtt a mozgócsiga) x távolsággal mozdul el felfelé, akkor a fonál a mozgócsiga mindkét oldalán x-szel lesz rövidebb, ezért a maradék fonálrész $2x$-szel lesz hosszabb. A 2-es test elmozdulása tehát minden pillanatban kétszer akkora, mint az 1-es testé, ezért ugyanez az arány a sebességek és a gyorsulások között is, tehát:

(4) $$a_2 = 2a_1\,.$$

Az (1)-(4) egyenletekből végül a következő eredményeket kapjuk:

$$a_1 = g\frac{2m_2 - m_1}{4m_2 + m_1}\,, \quad a_2 = 2g\frac{2m_2 - m_1}{4m_2 + m_1}\,.$$