A1.

Adott teljesítményű számítógép-processzor méretének elvi felső korlátja

Tegyük fel, hogy egy számítógép-processzor számítási teljesítménye 10 gigaflops = 10^{10} flops. Ez azt jelenti, hogy a processzor egy másodperc alatt 10^{10} matematikai művelet kiszámítására képes, azaz egy másodperc alatt 10^{10}-szer tudja a következő műveletet végrehajtani: a magtól L távolságra levő cache memóriából kiolvas egy adatot, azzal a mag elvégez egy műveletet, majd az adatot visszaírja a cache memóriába.

Milyen felső korlátot ad a relativitáselmélet az L távolságra – és ezzel a processzor fizikai méretére – vonatkozóan egy ilyen számítógépben (Segítség: mi az információközlési sebességre vonatkozó elvi felső korlát)? Hány nagyságrenddel kisebb méretű egy tipikus számítógép-processzor ennél a felső korlátnál?

A2.

Idődilatáció

Vezesse le az idődilatáció $\Delta t = \Delta\tau \big/ \sqrt{1 - v^2/c^2}$ képletét *grafikusan, téridő-diagram segítségével*. Az idődilatációs képlethez egy rövid történetet is találjon ki illusztrálásul.

(A levezetéshez segédlet: http://fizipedia.bme.hu/images/d/d3/1_specrel_geo_magyar.pdf, 8-9. ábra).

A3.

Hosszkontrakció

Vezesse le a hosszkontrakció $l_{mozg} = l_{nyug}\sqrt{1 - v^2/c^2}$ képletét *grafikusan, téridő-diagram segítségével*.

(Segédlet: http://fizipedia.bme.hu/images/d/d3/1_specrel_geo_magyar.pdf, 8-12. ábra).

A4.

Idődilatáció

Vezesse le az idődilatáció $\Delta t = \Delta\tau \big/ \sqrt{1 - v^2/c^2}$ képletét *algebrai úton, a Lorentz-transzformációból*. Az idődilatációs képlethez egy rövid történetet is találjon ki illusztrálásul.

A5.

Hosszkontrakció

Vezesse le a hosszkontrakció $l_{mozg} = l_{nyug}\sqrt{1 - v^2/c^2}$ képletét *algebrai úton, a Lorentz-transzformációból*.

A6.

Szögek transzformációja

Egy x-irányban v sebességgel mozgó vonat (K' vonatkoztatási rendszer) utasa ferdén tart egy méterrudat az (x',y')-síkban úgy, hogy a méterrúd iránya ϕ' szöget zár be az x'-tengellyel. Mekkora ϕ szöget zár be a méterrúd az x-tengellyel a vasútállomás (K vonatkoztatási rendszer) megfigyelőjének mérése szerint? (Segítség: egy rúd mozgásakor a mozgás irányába eső vetület hosszkontrakciót szenved, a mozgás irányára merőleges vetület pedig nem.)

A7.

Inverz sebesség-transzformáció

Vezesse le az inverz sebességtranszformáció képletét *grafikusan, téridő-diagram segítségével.*

(Segédlet: http://fizipedia.bme.hu/images/d/d3/1_specrel_geo_magyar.pdf, 7. ábra).

A8.

Lorentz-transzformáció grafikusan

Vezesse le a Lorentz-transzformáció képleteit *grafikusan, téridő-diagram segítségével.*

(Segédlet: http://fizipedia.bme.hu/images/d/d3/1_specrel_geo_magyar.pdf, 16. ábra).

A9.

Lorentz-transzformáció algebrai úton

Vezesse le a Lorentz-transzformáció képleteit *algebrai úton*.

(Segédlet: egy lehetséges algebrai levezetés megtalálható a http://fizipedia.bme.hu/images/2/2f/1b_Lorentz_levezet%C3%A9s.pdf linken.)

A10.

A téridő-intervallum invarianciája

Vezesse le a Lorentz-transzformáció képleteinek felhasználásával, hogy bármely két esemény között teljesül az alábbi egyenlőség:

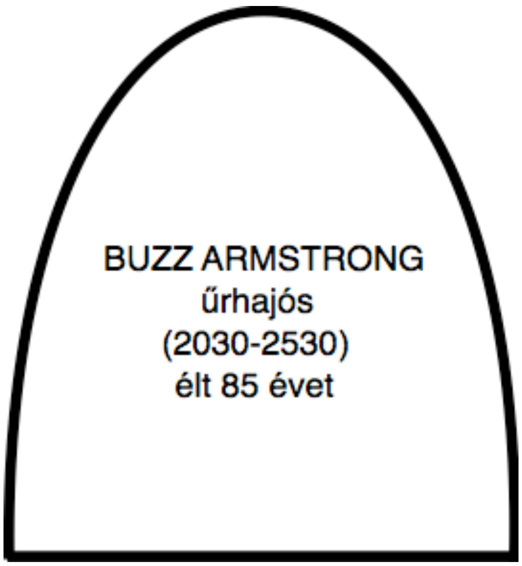
$$ds'^2 = (cdt')^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2,$$

azaz a két esemény közötti téridőintervallumot ugyanakkora számértékűnek méri a *K* vonatkoztatási rendszer, mint a hozzá képest *v* sebességgel mozgó K' vonatkoztatási rendszer ($ds'^2 = ds^2$).

A11.

Ikerparadoxon

Találjon ki az alábbi sírfelirathoz (és a rajta szereplő számadatokhoz) egy háttértörténetet, és ábrázolja Buzz Armstrong életét vázlatosan egy téridő-diagramon.



A12.

Ikerparadoxon

Elemezze Urasima Taró történetét (http://fizipedia.bme.hu/images/6/69/Urashima.pdf) téridő-diagramon.

A13.

Ikerparadoxon

Egy ikerpár (Eszter és Luca) 25 éves. Eszter a születésnapjukon űrhajóra ül, amely $v = 2.4 \cdot 10^8$m/s sebességgel elszáguld egy L = 10fényév távolságra levő űrbázisra. Ott 3 évet tölt el, majd az űrhajójával $v = -2.4 \cdot 10^8$m/s sebességgel visszaszáguld a Földre. Luca közben mindvégig a földi támaszponton marad.

(a) Mennyi idős Eszter, amikor megérkezik az űrbázisra?

(b) Mennyi idős Eszter és mennyi idős Luca, amikor ismét találkoznak?

(c) Ábrázolja a történetet pontos téridő-diagramon (kalibrált tengelyekkel, pontosan megszerkesztett világvonalakkal).

A14.

Gyorshajtás

Kristófot a rendőrség megbünteti, mert áthajtott a piros lámpán. Azzal védekezik, hogy nagy sebességgel közeledett a kereszteződéshez, ezért a piros lámpát – a Doppler-effektus miatt – zöldnek látta.
A rendőrségi szakértő elfogadja az érvelést, majd kiszámítja, mekkora sebességgel kellett ehhez Kristófnak közlekednie.

Mekkora bírságot kell Kristófnak fizetnie gyorshajtásért, ha a sebességkorlát 50km/h, és minden 10km/h-s túllépésért 10 ezer Ft bírság jár?

A piros fény hullámhosszát vegyük 650nm-nek, a zöld fényét pedig 500nm-nek.

A15.

Invariáns mennyiségek

Két inerciarendszer, K (vasútállomás) és K' (vonat) egymáshoz képest v sebességgel mozog. Ha egy mennyiséget K és K' ugyanakkorának mér, akkor azt a mennyiséget *invariánsnak* nevezzük.

Példák:

(1) Egy repülőgép elrepül az állomás felett. A két megfigyelő eltérőnek méri a repülőgép E, ill. E' energiáját, és a repülőgép impulzusát is más-más (p, ill. p') számértékűnek méri. A repülőgép m tömegét azonban ugyanakkorának mérik:

$$m = \frac{1}{c^2}\sqrt{E^2 - (pc)^2} = \frac{1}{c^2}\sqrt{E'^2 - (p'c)^2}$$

Egy test tömege invariáns.

(2) Két esemény között Δx térbeli távolság és Δt időtartam telt el a K megfigyelő szerint. Ugyanezen két esemény között a K' megfigyelő más $\Delta x'$ térbeli távolságot és $\Delta t'$ időtartamot mér. A téridőintervallum Δs értékére mégis ugyanazt a számot kapják:

$$\Delta s = \sqrt{(c\Delta t)^2 - \Delta x^2} = \sqrt{(c\Delta t')^2 - \Delta x'^2}$$

A két esemény közötti téridőintervallum invariáns.

Döntse el, hogy az alábbiak közül melyek invariánsak és melyek nem:

(a) a vákuumbeli fénysebesség számértéke,
(b) egy elektron sebessége,
(c) az elektron töltése,
(d) egy proton kinetikus energiája,
(e) két esemény között eltelt időtartam,
(f) az elemek sorrendje a Periódusos Rendszerben,
(g) Newton 1. axiómája („Inerciarendszerben egy nyugalomban levő test nyugalomban marad mindaddig, amíg erő nem hat rá.“).

A16.

Invariáns mennyiségek

Két inerciarendszer, K (vasútállomás) és K' (vonat) egymáshoz képest v sebességgel mozog. Ha egy mennyiséget K és K' ugyanakkorának mér, akkor azt a mennyiséget *invariánsnak* nevezzük.

Példák:

(1) Egy repülőgép elrepül az állomás felett. A két megfigyelő eltérőnek méri a repülőgép E, ill. E' energiáját, és a repülőgép impulzusát is más-más (p, ill. p') számértékűnek méri. A repülőgép m tömegét azonban ugyanakkorának mérik:

$$m = \frac{1}{c^2}\sqrt{E^2 - (pc)^2} = \frac{1}{c^2}\sqrt{E'^2 - (p'c)^2}$$

Egy test tömege invariáns.

(2) Két esemény között Δx térbeli távolság és Δt időtartam telt el a K megfigyelő szerint. Ugyanezen két esemény között a K' megfigyelő más $\Delta x'$ térbeli távolságot és $\Delta t'$ időtartamot mér. A téridőintervallum Δs értékére mégis ugyanazt a számot kapják:

$$\Delta s = \sqrt{(c\Delta t)^2 - \Delta x^2} = \sqrt{(c\Delta t')^2 - \Delta x'^2}$$

A két esemény közötti téridőintervallum invariáns.

Döntse el, hogy az alábbiak közül melyek invariánsak és melyek nem:

(a) az az időtartam, amely alatt vákuumban a fény 1m távolságot megtesz,
(b) egy elektron kinetikus energiája,
(c) a DNS molekula összetétele,
(d) két esemény közötti távolság,
(e) az elektron tömege,
(f) két tetszőleges esemény sorrendje,
(g) ok és okozat sorrendje.

A17.

A newtoni mechanika korlátai

Mekkora a százalékos eltérés a kinetikus energia newtoni képlete és a helyes, relativisztikus képlet között, az alábbi esetekben:

(a) a Föld keringése a Nap körül 30km/s sebességgel,

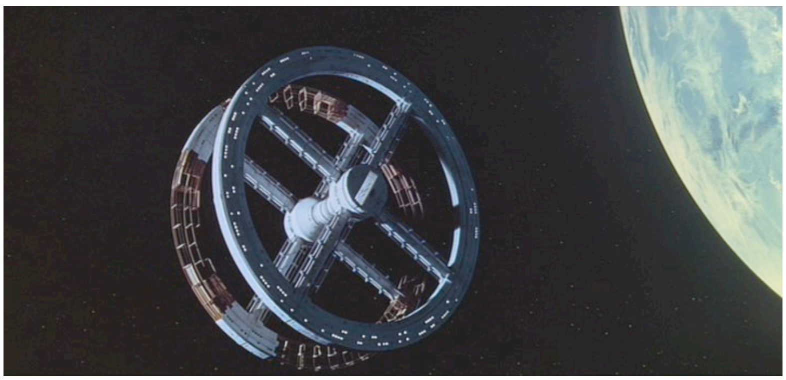
(b) egy műhold keringése a Föld körül 30000km/h sebességgel,

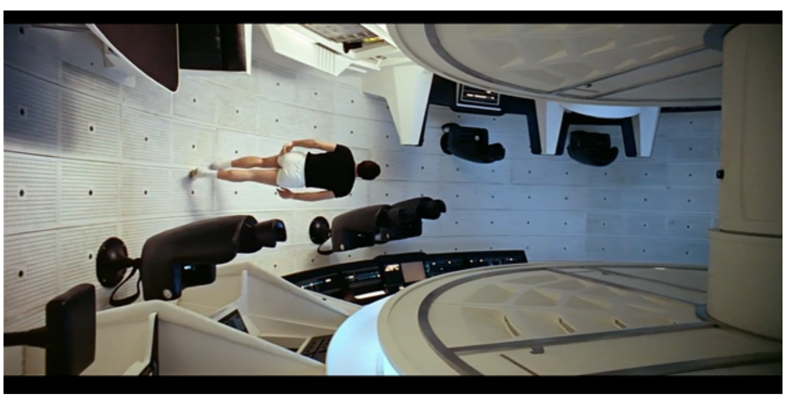
(c) egy 1GeV összenergiájúra gyorsított proton.

A18.

Mesterséges gravitáció forgással

A „2001 Űrodüsszeia (2001 Space Odyssey)“ c. film űrbázisának forgó mozgása mesterséges gravitációt hoz létre a a világűrben. Ez azt jelenti, hogy az űrbázishoz rögzített forgó vonakoztatási rendszerben az űrhajósok nem lebegnek szabadon, hanem a centrifugális erő miatt az űrbázis külső falához nyomódnak (ld. az alábbi képeket). Tegyük fel, hogy az űrbázis sugara 8m.





(a) Számolja ki a newtoni mechanika alapján, mekkora fordulatszámmal kell forognia az űrbázisnak, hogy az űrhajós a lábában a földi körülményeknek megfelelő $g = 9.81\text{m/s}^2$ „gravitációt“ érezze.

(b) Tegyük fel, hogy az űrhajós magassága 2m. Mekkora árapály-gyorsulást kell az űrhajósnak elviselnie a feje és a lábfeje között?

A19.

Időzített űrutazás

Egy űrhajós a Földtől 8.6 fényév távolságra levő Szíriusz csillaghoz akar utazni. Azt szeretné, ha az utazás pontosan 8.6 évig tartana (az ő óráján mérve).

(a) Mekkora legyen az űrhajó sebessége?

(b) Ábrázolja az űrutazást téridődiagramon.

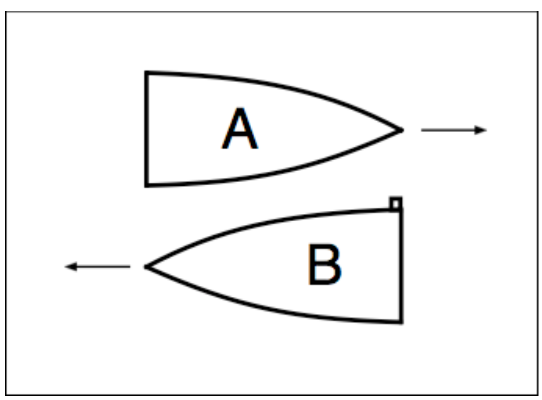
B1.

Kétűrhajós paradoxon

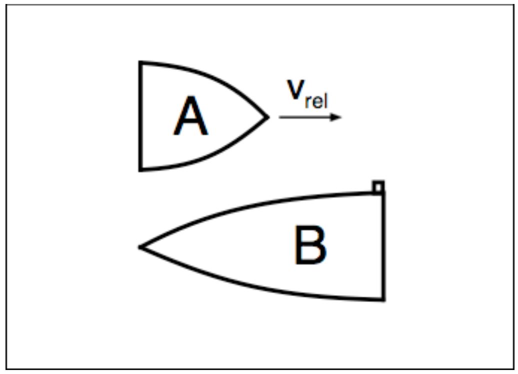
Két űrhajó, amelyeknek azonos a nyugalmi hossza, elhalad egymással szemben (ld. (a) ábra). Egymáshoz viszonyított v_{rel} sebességük olyan nagy, hogy mindkét űrhajó a másik űrhajó hosszát a felére rövidültnek méri. (Mekkora a v_{rel} sebesség?)
A B űrhajó végén egy lőfegyver van, amely a menetirányra merőlegesen áll. Piroska, a B űrhajó kapitánya *abban a pillanatban*, amikor a B űrhajó eleje az A űrhajó végéhez ér, tisztelgésül elsüti a fegyvert. (Az „abban a pillanatban“ kifejezés Piroskának a szájából hangzik el, tehát a B űrhajóhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben értendő!)

Piroska okoskodása (ld. (b) ábra): „A lövedékem biztonsággal elkerüli az A űrhajót, hiszen a mozgása miatt felére rövidült űrhajónak még az orra is messze lesz a fegyveremtől a lövés pillanatában. Sőt, pontosan olyan messze lesz az A űrhajó orra a fegyveremtől, mint amekkora az űrhajó – felére rövidült – hossza.“

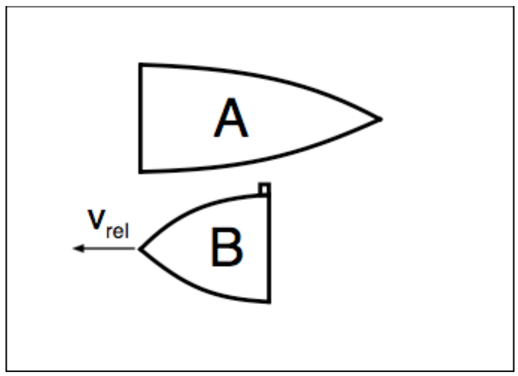
Ádámnak, az A űrhajó kapitányának okoskodása (ld. (c) ábra): „Le kell beszélnem Piroska kolléganőmet a tisztelgő lövésről, hiszen a lövés pillanatában hosszkontrakciót szenvedett űrhajójának vége pontosan az én űrhajóm közepével lesz egyvonalban, így a fegyvere telibe találja az űrhajómat!“



(a)



(b)



(c)

Kinek van igaza: eltalálja-e a halálos lézersugár az A űrhajót? A megoldáshoz készítse el a történet téridő-diagramját, amely ábrázolja
- az A űrhajó elejének és végének világvonalát,
- a B űrhajó elejének és végének világvonalát,
- a „B eleje az A végéhez ér“ eseményt,
- a lövés eseményét.

(Segédlet: a feladatleírás és a megoldás rövid diszkussziója megtalálható *Taylor-Wheeler: Téridőfizika* c. könyvében (Typotex, 2006., 98-99. és 291-292.o.)

B2.

A fénytani Doppler-effektus egymáshoz közeledő fényforrás és detektor esetére

Vezesse le téridő-diagram segítségével, hogy ha egy fényforrás v sebességgel közeledik egy detektorhoz, akkor a fénynek a detektor által észlelt f_d frekvenciája és a kibocsátott fénynek a fényforrás által mért f_f frekvenciája között az alábbi összefüggés teljesül:

$$f_d = f_f \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}.$$

(Segédlet: a levezetést a http://fizipedia.bme.hu/images/d/d3/1_specrel_geo_magyar.pdf fájl 15. ábrájához hasonlóan végezze, csak közeledő fényforrás esetére.)

B3.

A fénytani és a hangtani Doppler-effektus közötti különbség elemzése

A fénytani Doppler-effektus képlete feltűnő módon eltér a

hangtani Doppler-effektus képletétől. (Az említett

képletekben a *d*-alsóindex a detektorra, az *f*-alsóindex a forrásra utal.) Téridő-diagramok segítségével részletesen tárgyalja, hogy milyen, a hang- és a fényterjedés között fennálló fizikai különbségek vezetnek a kétféle Doppler-képlet közötti eltérésekhez.

(Segédlet: http://fizipedia.bme.hu/images/4/43/Doppler.pdf)

<u>B4.</u>

<u>Pajta-pózna paradoxon</u>

Egy futó, Dániel, *v* sebességgel rohan, hóna alatt egy 12m hosszú rúddal, egy 10m hosszú pajta felé. (Mindkét hosszadat nyugalmi hosszként értendő.) A *pajtában álló megfigyelő*, Gergő szerint a rúd a hosszkontrakció miatt csak 9.6m hosszú, tehát *befér* a pajtába.
Dániel szerint pont fordítva működik a hosszkontrakció: a rúd, amit cipel, 12m hosszú, viszont a pajta – amely „vele szemben rohan“ *v* sebességgel – az ő mérése szerint hosszkontrakciót szenved, és csak 8m hosszú. Szerinte tehát a rúd *nem fér be* a pajtába.

(a) Számítsa ki Dániel *v* sebességét. (Reális lehet-e a kapott számadat egy igazi futó esetén?)

(b) Kinek van igaza? Befér-e a mozgó rúd a pajtába?

A megoldáshoz először definiálja gondosan, az események – mint téridőbeli pontok – fogalmára alapozva a „befér“ szó jelentését. Ezután készítse el a feladat téridő-diagramját, amely ábrázolja
- a rúd két végének világvonalát,
- a pajta két végének világvonalát.

Az ábra alapján mutassa meg, hogy *mind Dánielnek, mind Gergőnek igaza van*.

(Segédlet: a feladatleírás – más számadatokkal – és a megoldás tárgyalása megtalálható *Taylor-Wheeler: Téridőfizika* c. könyvében (Typotex, 2006., 97-98. és 291.o.) A könyvben szereplő algebrai megoldás végigbogarászására nincs szükség, de természetesen örülök, ha a vizsgázó ebből is felkészül.)

B5.

Ikerparadoxon – azonos gyorsulású ikrek

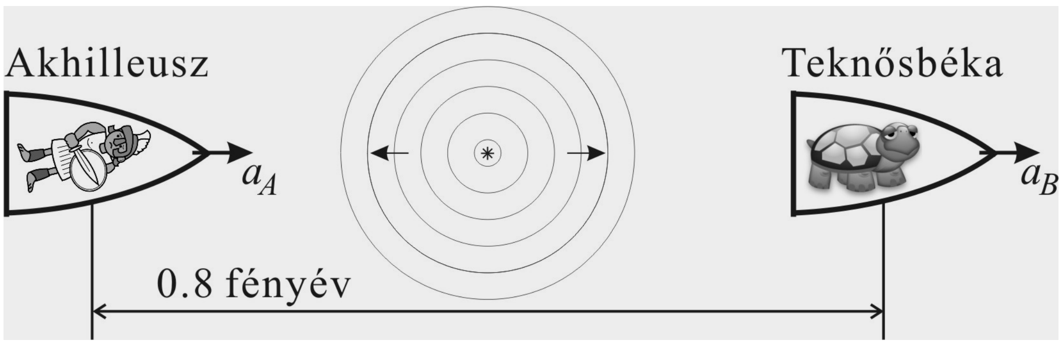
Olvassa el a
http://fizipedia.bme.hu/images/1/1d/Ikerparadoxon_gyorsulas.pdf linken található „Az ikerparadoxon és a gyorsulás" című cikkben „Az ikrek azonos gyorsulásokat élnek át, mégis eltérően öregednek" fejezet 2. példáját (amihez a cikk 2. ábrája tartozik).

Számolja végig a példát a megadott számadatokkal, és igazolja a cikkbeli állítást: találkozásukkor Anna 30 éves, Balázs pedig 52.

B6.

Akhilleusz és a teknősbéka

Üldözéses versenyt rendez a világűrben Akhilleusz és egy teknősbéka. Elhelyezkednek egymástól 0.8 fényév távolságra szabadon lebegő űrhajójukban, ahogy az alábbi ábra mutatja. A félúton levő versenybíró fényimpulzussal adja meg a jelet az indulásra. A teknősbéka jobbra indul, Akhilleusznak pedig az a feladata, hogy utolérje.



A teknősbéka állandó a_B sajátgyorsulásra állítja az űrhajóját. Akhilleusz szintén állandó, de a teknősénél nagyobb, a_A gyorsulással iramodik a teknős után.

1. Amikor a teknősbéka (pontosan földi körülményeket teremtve a fedélzeten) $a_B = g = 10\text{m/s}^2$ sajátgyorsulásra állítja az űrhajóját, Akhilleusz – ahogy várható – hamarosan utoléri.

2. A verseny visszavágóján a teknősbéka *kicsit* nagyobb, $a_B = 1.5g = 15\text{m/s}^2$ sajátgyorsulással vezeti az űrhajóját. Ekkor Akhilleusznak, bárhogyan igyekszik is, *elvi esélye sincs, hogy utolérje a teknőst*.

Igazolja a fenti két állítást (amelyek közül a második különösen furcsa). Ábrázolja az első versenyt és a visszavágót egy-egy téridő-diagramon.

(Segédlet: http://fizipedia.bme.hu/images/9/9a/Fogocska.pdf)

B7.

Az állandó gyorsulással mozgó űrhajó nyugalmi hosszára vonatkozó felső korlát

Egy űrhajó hossza mentén rengeteg kis gyorsító rakétát helyezünk el, amelyek egymástól függetlenül vezérelhetők. Ezzel biztosítjuk, hogy az űrhajó egyes részei gyorsulás közben se mozduljanak el egymáshoz képest, (Másképp megfogalmazva: ha az űrhajó orra pl. a_{orr} sajátgyorsulással mozog, a többi kis rakéta gondos vezérlésével biztosítjuk, hogy az űrhajóban sehol se ébredjenek húzó- vagy nyomófeszültségek, tehát hogy az űrhajó *nyugalmi hossza* végig állandó maradjon.)

Egy adott utazás közben az űrhajó orrát állandó $a_{orr} = 10^{13} g = 10^{14}$ m/s^2 sajátgyorsulással mozgatjuk előre. Mutassa meg, hogy ilyen mozgás során csak olyan űrhajó nyugalmi hosszát lehet megtartani (csak olyan űrhajó nem szakad szét *elkerülhetetlenül*), amelynek a nyugalmi hossza legfeljebb 900m.

Általános esetben vezesse le, hogy az olyan űrhajó nyugalmi hosszára, amelynek az orra a_{orr} gyorsulással mozog előre, az alábbi képlet adja meg a felső korlátot:

$$L_{\max} = \frac{c^2}{a_{orr}}.$$

(Segédlet: A fenti képlet a http://fizipedia.bme.hu/images/9/9a/Fogocska.pdf cikkben szereplő (15) képlettel azonos. A feladat voltaképpen a cikk gondos végigolvasása, megértése, és a cikk alapján a (15) képlet levezetése.)

B8.

Mennyi sajátidő alatt lehet állandó sajátgyorsulással eljutni adott L távolságra?

Az előadáson vázlatosan – néhány algebrai lépést kihagyva – levezettük, hogy

1. az állandó sajátgyorsulással mozgó tömegpont világvonala hiperbola-alakú az (x, ct) téridő-diagramon,

2. a következő képlet adja meg, hogy állandó g sajátgyorsulással mennyi sajátidő („karóra-idő“) alatt lehet eljutni adott L távolságra:

$$\Delta\tau = \frac{\ln\left[\dfrac{\sqrt{gL\left(gL+2c^2\right)}+gL+c^2}{c^2}\right]}{g/c}.$$

Feladatok:

(1) A fent említett órai levezetések megértése, és a hiányzó algebrai lépések pótlása.
(2) Hány évet öregszik egy űrhajós, miközben állandó, $g = 9.81\mathrm{m/s}^2$ sajátgyorsulású űrhajóján egymilliárd fényév távolságot tesz meg (tehát akkora távolságot, amekkorát a fény egymilliárd év alatt tesz meg)? Nem mond-e ellent a kapott válasz annak a természeti törvénynek, hogy az űrhajós nem mozoghat a fénynél gyorsabban?

B9.

A negatív tömeg mennyire analóg a negatív töltéssel?

A klasszikus mechanika szerint két tömegpont között az alábbi képlettel leírt gravitációs erő hat:

,

ahol γ az egyetemes gravitációs állandó, m_1 és m_2 a két tömegpont tömege, r pedig a távolságuk. Ha a polárkoordináta-rendszerünk origóját az m_1 tömegpontba helyezzük, és az r-irányú (az origóból kifelé mutató) egységvektor, akkor a képlet az m_2-re ható erő vektorát adja meg.

A fenti képlet erős matematikai hasonlóságokat mutat a két ponttöltés között ható Coulomb-erő képletével:

ahol k_e a Coulomb-állandó, q_1 és q_2 pedig a két tömegpont töltése.
(Az első képletben szereplő mínusz előjel, ill. a második képletben a hiánya azt fejezi ki, hogy két azonos előjelű tömeg vonzza, míg két azonos előjelű töltés taszítja egymást.)

Az analógia szerint tehát amilyen szerepet betölt a töltés az elektromos kölcsönhatásban, olyan szerepet tölt be a tömeg a gravitációs kölcsönhatásban. Töltés azonban kétféle előjelű is előfordul a természetben (pozitív, negatív), míg tömeg csak pozitív létezik, legalábbis minden jel erre mutat.

Diszkutálja a fenti erőtörvények és Newton 2. törvénye (   ) alapján, hogy *negatív tömegek* létezése milyen furcsa, meglepő kísérleti következményekhez vezetne.

(Segédlet: a http://fizipedia.bme.hu/images/3/3b/Negative_mass_szabad.pdf linken szereplő cikk „Newtonian Physics" című fejezete.)

B10.

Wigner-rotáció

Egy K' vonatkoztatási rendszer v_1 sebességgel mozog a K vonatkoztatási rendszerhez képest az x-tengely mentén. K és K' között tehát az x-irányú Lorentz-transzformáció teremt kapcsolatot (amit órán levezettünk).
Egy K'' vonatkoztatási rendszer v_2 sebességgel mozog a K'-höz képest az y'-tengely mentén. K' és K'' között tehát egy y'-irányú Lorentz-transzformáció teremt kapcsolatot.

Mutassa meg, hogy K és K'' között *nem* egy egyszerű – ferde irányú – Lorentz-transzformáció adja meg a kapcsolatot, hanem egy *forgatás* és egy ferde irányú Lorentz-transzformáció összessége. Vezesse le, hogy a forgatás α^* szögére igazak az alábbi összefüggések:

$$\cos\alpha^* = \frac{\gamma_1\left(\gamma_1 v_1^2 + \gamma_2 v_2^2\right)}{\gamma_2\left(\gamma_1^2 v_1^2 + v_2^2\right)} \qquad \text{és} \qquad \sin\alpha^* = \frac{\gamma_1 v_1 v_2 \left(1-\gamma_1\gamma_2\right)}{\gamma_2\left(\gamma_1^2 v_1^2 + v_2^2\right)},$$

ahol

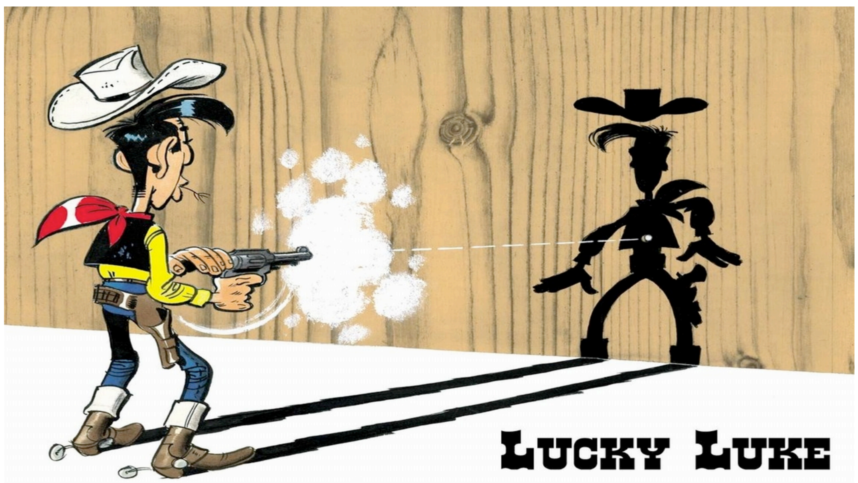
$$\gamma_1 \equiv \left(1 - v_1^2/c^2\right)^{-1/2} \qquad \text{és} \qquad \gamma_2 \equiv \left(1 - v_2^2/c^2\right)^{-1/2}.$$

(Segédlet: a http://fizipedia.bme.hu/images/0/09/Wigner_Thomas2.pdf linken található jegyzet, és – szükség esetén – személyes konzultáció.)

B11.

Lucky Luke és a tachyon-antitelefon paradoxon

Mutassa meg, hogy ha tudnánk tachyonokkal – fénysebességnél gyorsabban mozgó részecskékkel – információt továbbítani (tachyon pl. az alábbi képen a pisztolygolyó), akkor üzenetet küldhetnénk a múltba, és ezzel a *kauzalitás (ok-okozat viszony) sérülhetne*.



(Segédlet: a feladat voltaképpen a http://fizipedia.bme.hu/images/d/d8/LuckyLuke.pdf linken található cikk utolsó két oldalának figyelmes végigolvasása és megértése, valamint a cikk 10. és 11. ábrájának részletes diszkussziója. A 10. és 11. ábra A, B, C és D eseményeinek téridőkoordinátáira válasszon konkrét számértékeket az egyik vonatkoztatási rendszerben, majd a Lorentz-transzformáció – vagy az inverz Lorentz-transzformáció – segítségével transzformálja át őket a másik vonatkoztatási rendszerre is.)

B12.

Müon-bomlás

A müonok elektromos töltéssel rendelkező elemi részecskék, amelyek pl. nagy számban keletkeznek a légkör felső rétegeiben, amikor a kozmikus sugárzás protonjai oxigén- vagy nitrogén atommagokkal ütköznek. Kövessük olyan müonok életét, amelyek 60km-rel a földfelszín felett keletkeztek, és függőlegesen száguldanak lefelé. Tudjuk, hogy a müonok karakterisztikus élettartama – ún. felezési ideje – a *saját nyugalmi vonatkoztatási rendszerükben* 1.5μs, tehát ha nagyszámú müont keltünk, 1.5μs-mal a keletkezésük után már csak az 50%-uk marad meg, a többi időközben elbomlott.

(a) Feltéve, hogy a müonok majdnem fénysebességgel száguldanak lefelé, kb. mennyi időbe telik (egy földi megfigyelő szerint), míg 60km magasságból a Földre érnek? Hányszorosa ez az időtartam a fent megadott felezési időnek?

(b) Aki nem hallott a relativitáselméletről, az (a) válasz alapján mire számít: a müonok hány százalékának kellene a földfelszínre megérkeznie? (A választ százalékos arány helyett kifejezheti 1/2 hatványaként is.)

(c) Egy adott kísérletben a 60km magasan keletkezett müonokból gondosan kiválasztunk egy olyan nyalábot, amely azonos v sebességgel mozgó müonokból áll. Azt találjuk, hogy ezeknek a müonoknak az 1/8-a eléri a földfelszínt. Mennyi ideig tartott a repülés a Földig eljutó müonok „karóráján“? Mekkora v sebességgel repültek a kísérletben a müonok?

(d) Vázlatosan ábrázolja egy a (c) feladatban kiszámolt v sebességgel mozgó müon világvonalát a Földhöz rögzített K vonatkoztatási rendszer téridő-diagramján.

<u>B13.</u>

<u>Egy földi laboratórium mekkora pontossággal inerciarendszer?</u>

Az ekvivalencia-elv szerint a Föld felett *szabadon eső* vonatkoztatási rendszer lokálisan (elég kicsi téridőtartományban) inerciarendszernek tekinthető.
A földi laboratóriumok *nem* szabadon esnek, hanem a felszínhez vannak rögzítve, mégis sok részecskefizikai kísérletben inerciarendszernek tekinthetjük őket. Az alábbi feladat alapján bizonyítsa ennek az állításnak a megalapozottságát.

(a) Egy földi laboratóriumban $v = 0.96c$ sebességű elemi részecskék száguldanak át egy 1m oldalhosszúságú kocka alakú vákuumkamrán. A laboratóriumi megfigyelő szerint mennyi ideig tart a részecskék átrepülése a vákuumkamrán, azaz mennyi ideig „zajlik a kísérlet“? Mekkora távolságot tenne meg lefelé egy szabadon eső próbatest ennyi idő alatt, ha nyugalomból elengednénk? [Használja a klasszikus kinematika $y = (1/2)gt^2$ képletét.] Hasonlítsa össze a választ egy tipikus atommag méretével [$\sim 10^{-15}$m]. Vonja le a következtetést: a kísérlet időtartama alatt megkülönböztethető-e az elemi részecskék pályája attól a tökéletesen egyenes pályától, amit a világűrben szabadon lebegő inerciarendszerben befutnának, azaz: tekinthető-e ez a laboratórium az adott kísérlet szempontjából inerciarendszernek?

(b) Tegyük fel, hogy a kísérleti berendezésünkben szerepel egy optikai interferométer, amely 500nm pontossággal tud távolságot mérni. Mennyi idő alatt tenne meg függőlegesen ekkora távolságot egy nyugalomból elejtett próbatest? Legfeljebb mekkora utat tud megtenni egy gyors elemi részecske ennyi idő alatt? Tehát legfeljebb milyen hosszú lehet egy vákuumkamra ebben a kísérletben, ha azt akarjuk, hogy a laboratóriumot a megadott pontosság mellett inerciarendszernek tekinthessük?

<u>B14.</u>

<u>A Nemzetközi Űrállomás mekkora pontossággal inerciarendszer?</u>

A Nemzetközi Űrállomás (International Space Station, ISS) a földfelszín felett d = 400km magasságban kering, szabad, erőmentes mozgással. Az űrhajósok az ISS belsejében „súlytalanul“ lebegnek, az Űrállomás az ekvivalencia-elv szerint jó közelítéssel inerciarendszernek tekinthető. Mégsem egészen pontosan inerciarendszer, hiszen – a Föld által begörbített téridőben – árapály-gyorsulások jelentkeznek benne.

Az ISS magassága (a Földhöz legközelebbi és attól legtávolabbi pontjai közötti távolság) h = 20m. Az Űrállomás belsejében, *a Földtől legtávolabbi ponton* az egyik űrhajós, Ákos, óvatosan nyugalomból elenged egy üveggolyót. *A Földhöz legközelebbi pontban* egy másik űrhajós, Flóra, nyugalomból elenged egy acélgolyót. Ha az ISS valóban igazi inerciarendszer lenne, a két golyó egymáshoz képest nyugalomban maradna.

(a) Mutassa meg, hogy az árapály-gyorsulás lassan *távolítja* egymástól a két golyót.

(b) Vezesse le, hogy az üveggolyó $a = \dfrac{2\gamma M_F h}{(R_F + d)^3} \approx 5.1\cdot10^{-5}\mathrm{m/s^2}$ gyorsulással távolodik a vasgolyótól. Hány másodperccel a kísérlet megkezdése után nő a golyók közötti távolság 1cm-rel?

B15.

Merre irányítsuk a távcsövet?

Egy űrállomás (K vonatkoztatási rendszer) szabadon lebeg a világűrben, és nyugalomban van az állócsillagokhoz képest. Pontosan az űrállomás fölött (a K rendszer y-tengely mentén) van egy nagyon távoli szupernova, amit a kutatók az y-tengely irányába – tehát az x-tengelyre $\phi = 90°$-os szögben – felállított távcsővel tudnak megfigyelni. A pozitív x- (és x'-) tengely irányában, $v = 2.4 \cdot 10^8$m/s sebességgel elszáguld az űrállomás mellett egy űrhajó (K' vonatkoztatási rendszer). Az űrhajó utasai is éppen távcsővel figyelik a szupernovát.

(a) Készítsen vázlatos rajzot a K és K' vonatkoztatási rendszerekről, és egymáshoz viszonyított mozgásukról.

(b) Mekkora φ szöget zár be az x-tengellyel az űrhajóban felállított távcső, *az űrállomás-beli megfigyelő szerint*? Az űrállomás-beli megfigyelő *párhuzamosnak* méri-e az űrhajóbeli távcső és a fénysugár irányát?

(c) Írja fel a szupernovából érkező fénysugár sebességvektorának komponenseit a K, ill. K' vonatkoztatási rendszerből nézve
[, ill.]. Mekkora szöget zár be a fénysugár az x'-tengellyel, az űrhajóbeli megfigyelő szerint?

(d) Indokolja az alábbi állítást: az űrhajóbeli (K'-beli) megfigyelőnek – a saját mérése szerint – éppen egyvonalba kell állítania a saját távcsövét a szupernovából érkező fénysugár irányával. K' mérése szerint tehát a saját távcsöve *párhuzamos* a fénysugár irányával.

(e) A (b) és (d) kérdések alapján fogalmazza meg, *abszolút* fogalom-e a relativitáselmélet szerint az egymáshoz képest mozgó objektumok orientációjának *párhuzamossága*.

(f) A (b) kérdésben kiszámolt φ szögből határozza meg, mekkora φ' szöget zár be az x'-tengellyel az űrhajóban felállított távcső, *az űrhajóbeli megfigyelő szerint*. (Segítség: a K-hoz képest mozgó űrhajóbeli távcsőnek a mozgás irányába eső vetülete hosszkontrakciót szenved, a mozgás irányára merőleges vetülete pedig nem.)

(g) Ellenőrizze, hogy az (f) kérdésre kapott eredmény összhangban van-e a (c) és (d) eredményekkel.

B16.

Fényszóró-hatás

A megszokott elrendezés szerint, a vasútállomáshoz (K vonatkoztatási rendszer) képest egy vonat (K' vonatkoztatási rendszer) v sebességgel mozog a pozitív x- (és x'-) tengely irányában.
Egy fénysugár az x'-tengellyel ϕ' szöget zár be a K' vonatkoztatási rendszerben mérve.

(a) Mutassa meg, hogy ugyanez a fénysugár a K rendszerben mérve olyan ϕ szöget zár be az x-tengellyel, amelyre igaz az alábbi összefüggés:

$$\cos\phi = \frac{\cos\phi' + v/c}{1 + (v/c)\cos\phi'}.$$

(b) A vonat első fényszórója egyenletesen bocsát ki fénysugarakat a menetirány szerint előre, egy teljes félgömb mentén. Mutassa meg, hogy a vasútállomás megfigyelője szerint a fényszóró fénye nem tölti ki a teljes félgömböt, hanem egy előremutató kúpra koncentrálódik, ahol a kúp fél nyílásszögére a

$$\cos\phi_{kúp} = \frac{v}{c}$$

összefüggés igaz. Ezt a relativisztikus effektust *fényszóró-hatásnak* nevezzük.

(c) Számolja ki a kúp fél nyílásszögét (1) v = 200km/h sebességgel haladó vonat, és (2) $v = 2\cdot10^8$m/s sebességgel száguldó „vonat“ esetén.

B17.

Bedőlt méterrúd

A K vonatkoztatási rendszerben egy x-irányú méterrúd u_y sebességgel mozog felfelé az y-tengely mentén. (A K-beli megfigyelő tehát mindvégig párhuzamosnak méri a méterrudat az x-tengellyel.) A K' vonatkoztatási rendszer a K-hoz képest v sebességgel mozog a pozitív x-tengely mentén, a megszokott elrendezésben.

(a) A K' vonatkoztatási rendszerben mérve a méterrúd *megdől* az x'-tengelyhez képest. Magyarázza meg – egyelőre szavakkal, egyenletek nélkül –, miért igaz ez az állítás.

(b) Számolja ki, *mekkora szögben* dől a méterrúd az x'-tengelyhez képest a K' megfigyelő szerint.

Segítség a (b) kérdéshez:

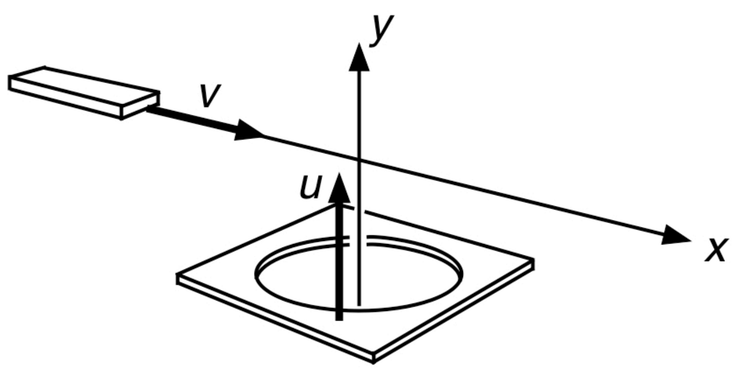
Tegyük fel, hogy a méterrúd középső pontja a $t = t' = 0$ időpillanatban éppen az $x = y = x' = y' = 0$ pontban van. Írja fel annak az eseménynek az (x,y,t) téridő-koordinátáit, amikor a rúd jobb vége éppen áthalad az x-tengelyen. Lorentz-transzformációval számolja ki, melyek ugyanennek az eseménynek az (x',y',t') téridő-koordinátái (amelyeket K' mér).

A sebességtanszformációs képleteket használva állapítsa meg, mekkora és milyen irányú sebességgel mozog a rúd (és így a jobb vége is) a K' megfigyelő szerint. *Hol* – milyen (x',y') koordinátájú pontban – van a rúd jobb vége a $t' = 0$ időpillanatban? Mekkora szöget zár be tehát a rúd az x'-tengellyel a K' megfigyelő szerint?

B18.

A felemelkedő aknafedél

Egy méterrúd az *x*-tengely mentén halad *v* sebességgel. Egy vékony lemez, amelyen 1m átmérőjű kerek lyuk van, az *y*-tengely mentén mozog felfelé *u* sebességgel (ld. ábra). A lemez síkja párhuzamos az (*x*,*z*) síkkal. A méterrúd közepe épp akkor ér az origóba, amikor a lyukas lemez közepe is.



Így érvelhetünk: Mivel a mozgó méterrúd a mozgás irányában hosszkontrakciót szenved, könnyedén átfér a kerek lyukon, a két tárgy tehát elkerüli az ütközést.

Egy a méterrúddal együtt *v* sebességgel mozgó *K′* megfigyelő így okoskodik: „A méterrúd hozzám képest nyugalomban van, tehát 1m hosszú. A lyukas lemez viszont hosszkontrakciót szenved *x′*-irányban, és így a lyuk is kisebb átmérőjű lesz, mint 1m. A méterrúd *nem fér át* a lyukon, az ütközés elkerülhetetlen."

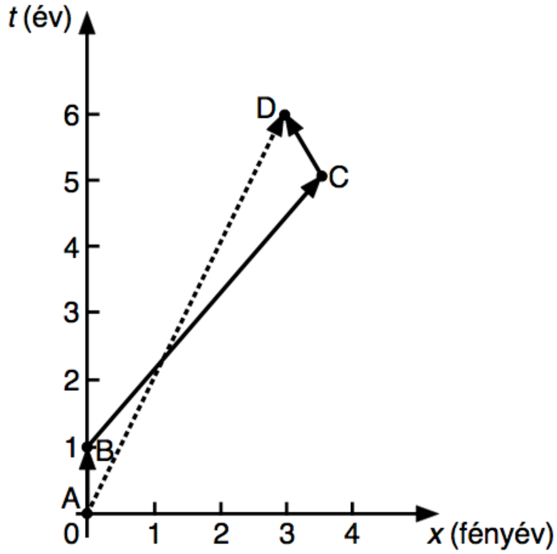
Összeütközik-e a méterrúd a lyukas lemezzel?

(Segítség: tanulmányozza át ugyanezen a listán a „ **Bedőlt méterrúd** " című feladatot, és annak alapján mutassa meg, hogy a *K′* megfigyelő szerint a lyukas lemez – bár valóban hosszkontrakciót szenved – *nem lesz párhuzamos* az *x′*-tengellyel, hanem megdől.)

B19.

Ikerparadoxon

Luca és Anna ikrek. Az alábbi ábrán követhető a világvonaluk (Luca: folytonos vonal, Anna: szaggatott vonal) az A és D események között. Az A eseménykor együtt vannak, és mindketten 25 évesek. A 4 esemény (x,t) koordinátái az ábra alatti táblázatban láthatók.



	x (fényév)	t (év)
A esemény	0	0
B esemény	0	1
C esemény	3.5	5
D esemény	3	6

(a) Mennyi öregszik Luca az A és B, a B és C, ill. a C és D események között? Hány éves, amikor újra találkozik a testvérével?

(b) Hány éves ugyanekkor Anna?

(c) Milyen sebességgel mozgott az egyes szakaszokon Luca, és mekkora volt Anna sebessége a K vonatkoztatási rendszerben?

(d) Mekkora volt Luca sebessége az egyes szakaszokon, ahhoz a vonatkoztatási rendszerhez képest, amelyben Anna végig nyugalomban volt?

B20.

Nyáresti fantázia

(Taylor-Wheeler: Spacetime Physics, 1992, 168.o. alapján)

Egy nyári estén Roberta a kertben nézi a naplementét. Közvetlenül a Nap mellett látja a Vénusz bolygót is. A túloldalon, keleten látszik a telehold. (A Nap, a Vénusz, a Föld és a Hold gyakorlatilag egy egyenes mentén helyezkednek el.) Kelet felől idegen lények űrhajója közeledik, majd leszáll a Földre. Az űrlények a Proxima Centauri csillag egyik bolygójáról jöttek, amely szintén a Föld-Hold egyenesen helyezkedik el. Az idegenek, elmondásuk szerint, a Naprendszert $v_1 = 0.8c$ sebességgel szelték át, mielőtt a Földre érkeztek.

Abban a pillanatban, amikor az űrlények űrhajója leszállt, Roberta látja, hogy a Nap felrobban. Az űrlények bevallják, hogy korábban, még útban a Föld felé pusztító lézersugarat küldtek a Nap felé, biztosan az okozta a robbanást. Figyelmeztetik Robertát, hogy a naprobbanás nagyerejű, kozmikus részecskékből álló sugárnyalábot küldött a Föld felé, ami a fénysebesség felével száguld, így hamarosan meg is fog érkezni, és el fogja sodorni a Föld légkörét. Állításuk igazolására a Vénusz felé mutatnak, és Roberta valóban látja, hogy a Vénusz abban a pillanatban hirtelen megváltoztatja a színét.

Roberta gyorsan ráveszi az űrlényeket, hogy vigyék magukkal, és szabadítsák meg a biztos haláltól. Az űrlények beleegyeznek, és 7 perccel a Földre érkezésük után már úton is vannak – immár Robertával a fedélzeten – vissza a Proxima Centauri felé. Űrhajójuk $v_2 = 0.96c$ sebességgel távolodik a Naprendszertől.

Sikerül-e megmenekülniük a halálos kozmikus sugárzástól?

A feladatot grafikus úton oldja meg: rajzolja meg a történet téridő-diagramját a Földhöz rögzített K vonatkoztatási rendszerből nézve. A t-tengelyt percekben, az x-tengelyt „fénypercekben“ kalibrálja. A Nap-Föld távolság 8 fényperc, a Vénusz-Föld távolság 2 fényperc. A történet időtartama alatt az összes említett égitest nyugalomban van egymáshoz képest. Az összes felszállás-leszállás pillanatszerűen történik (azaz a sebességek pillanatszerűen változnak a kezdő- és végsebesség között, a gyorsulási szakaszok elhanyagolhatóan rövidek).

A téridő-diagramon legyenek rajta az alábbi események:

A: Roberta találkozik az érkező űrlényekkel.
B: A Nap felrobban.
C: A naprobbanás fénye Roberta szemébe ér.
D: A Vénusz légköre megsemmisül.
E: A D esemény látványa eljut Robertához.
F: Roberta és az űrlények elindulnak.
G: A Föld légköre megsemmisül.

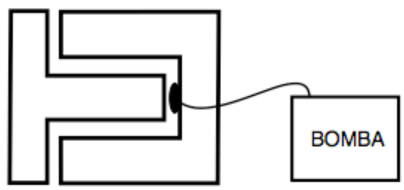
A téridő-diagram az alábbi világvonalakat is ábrázolja:

a: Roberta világvonala,
b: a Föld világvonala,
c: az űrlények világvonala,
d: a Nap világvonala,
e: a Vénusz világvonala,
f: a naprobbanás fényének világvonala,
g: a naprobbanáskor keletkezett, fél fénysebességgel száguldó kozmikus sugárnyaláb világvonala,
h: annak a fénynek a világvonala, ami a Vénuszból indult ki, amikor a Vénusz légköre megsemmisült,
i: az űrlények által a Napra kilőtt pusztító lézersugár világvonala.

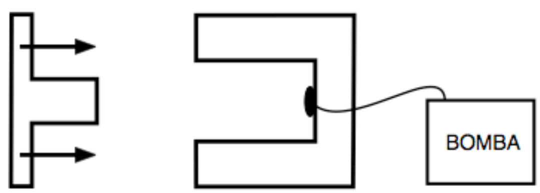
B21.

Detonátor-paradoxon

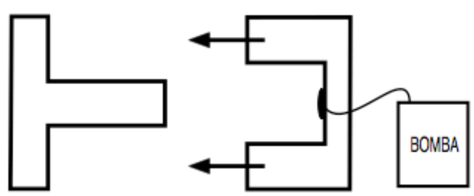
Erős acélból készült, U-alakú váz belsejében nyomógombot helyezünk el, amely nagyerejű bombához van kapcsolva. Az U-alakú vázba pontosan beleilleszkedik egy ugyanolyan anyagból készült, T-alakú idom (ld. felső ábra).



Minden nyugalomban.



Az U-idom nyugalmi rendszere.



A T-idom nyugalmi rendszere.

A T-idomot eltávolítjuk balra, majd nagy sebességgel mozgatni kezdjük az U-idom felé.

Tekintsük az alábbi paradoxont:

Az U-idomhoz képest álló megfigyelő, Fülöp, így okoskodhat (ld. középső ábra): „A T-idom hosszkontrakciót szenved. A T-idom teteje tehát fennakad az U-idom szárain, mielőtt a T-idom szára elérhetné a nyomógombot. A bomba nem robban fel.“

A T-idommal együtt jobbra mozgó megfigyelő, Petra, viszont így érvel (ld. alsó ábra): „A hozzám képest balra mozgó U-idom hosszkontrakciót szenved. A T-idom szára könnyedén eléri a nyomógombot, mielőtt a teteje fennakadhatna az U-idom szárain. A bomba felrobban.“

Fülöpnek vagy Petrának van-e igaza: fel fog-e robbanni a bomba? (Csak az egyik változat lehet igaz: a robbanás bekövetkezése vagy elmaradása nem lehet nézőpont kérdése!)

Ábrázolja a történetet téridő-diagramon az U-idomhoz rögzített inerciarendszerben. A diagramon legyen rajta az U-idom bal és jobb végének, és a T-idom bal és jobb végének a világvonala. [Az egyszerűség kedvéért itt vegye úgy, hogy mindkét idomnak csak az x-tengely irányában van kiterjedése, tehát mozgásuk ábrázolható egy (x,ct) diagramon.]

Fontos segítség a megoldáshoz: *tökéletesen merev test nem létezik*. Amikor a középső ábrán a T-idom teteje fennakad az U-idom szárain, akkor a T-idom szára nem tudja azonnal abbahagyni a mozgást, mert az információnak, hogy a T-idom teteje megállt, el kell őt érnie (mechanikai hullám formájában). Legfeljebb mekkora sebességgel terjedhet ez az információ? Meg tud-e állni a középső ábrán a T-idom szára, mielőtt elérné a nyomógombot?

B22.

A talajhoz képest legfeljebb mekkora sebességgel lehet gyalogolni?

A gyaloglás definíciója: Két lábon haladás olyan módon, hogy a hátulsó lábat mindig csak akkor emeljük fel a talajról, amikor az elülső láb már leért a talajra. (Ennek a szabálynak a megszegéséért – azaz futásra váltásért – szokták a gyaloglóversenyen a figyelmetlen versenyzőket kizárni.)

A definíciónak *minden vonatkoztatási rendszerben* működnie kell. Tekintse az alábbi két eseményt:
A: a gyalogos elülső lába földet ér.
B: a gyalogos hátulsó lába elemelkedik a talajtól.
Ahhoz, hogy valóban gyaloglásról legyen szó, a B esemény *semmilyen vonatkoztatási rendszerből mérve* nem történhet előbb, mint az A esemény.

(a) Magyarázza el, miért nem lehet *térszerű* téridő-intervallum A és B között. Miért kell ok-okozat kapcsolatnak (azaz *időszerű*, vagy legfeljebb *fényszerű* téridő-intervallumnak) összekötnie az A és B eseményeket?

(b) A gyaloglási sebesség elméleti felső határát szeretnénk kiszámolni. Ehhez feltesszük, hogy az elemelkedő hátulsó lábunk az elvileg megközelíthető legnagyobb határsebességgel (fénysebességgel) tud a talajhoz képest előre mozogni. Azt is feltesszük, hogy az elülső lábunk földetérésének híre a lehető legnagyobb információközlési sebességgel – fénysebességgel – éri el a hátulsó lábunk helyét. Rajzolja fel a talajhoz rögzített K vonatkoztatási rendszer (x,ct) téridő-diagramját. Ábrázolja 4 különböző színnel, néhány lépésen keresztül, (1) a bal lábfej világvonalát, (2) a jobb lábfej világvonalát, (3) az éppen elülső lábfej földetéréséről hátrafelé hírt vivő fényimpulzusok világvonalát, (4) a törzs világvonalát [feltesszük, hogy a talaj vonatkoztatási rendszerében a törzs mindig a két lábfej között félúton helyezkedik el].

(c) A (b) feladatban felrajzolt téridő-diagram alapján mutassa meg, hogy *a talajhoz viszonyított gyaloglási sebesség elméleti maximuma* a fénysebesség egyharmada.

B23.

Nagyenergiájú kozmikus sugárzás

A kozmikus sugárzás nagyrészt protonokból és más atommagokból áll, amelyek energiája akár a 10^{20}eV-ot is elérheti. (1eV = $1.6 \cdot 10^{-19}$J, és a proton nyugalmi energiája 10^{9}eV = $1.6 \cdot 10^{-10}$J.)

Tegyük fel, hogy egy proton 10^{20}eV energiával szeli át a galaxisunkat.

(a) Mekkora sebességgel mozog ez a proton a galaxisunk nyugalmi vonatkoztatási rendszerében?

(b) Galaxisunk átmérője ~150000 fényév. Hány évszázad alatt teszi meg a proton ezt a távolságot a galaxisunkhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben?

(c) Mennyi ideig tart ugyanez az utazás a proton „karóráján“ mérve?

B24.

Robbanás

Egy nyugalomban levő m_A = 20kg-os bomba két részre robban (ld. ábra). Az egyik darab tömege m_C = 2kg, összenergiája pedig (kg-ban kifejezve) E_C/c^2 = 5kg.

(a) Mekkora volt a robbanás előtt a bomba E_A/c^2 energiája (kg-ban kifejezve)? Az energiamegmaradásból számolja ki a robbanás utáni másik darab E_D/c^2 összenergiáját.

(b) Az $E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2$ összefüggésből számítsa ki a C darab p_C impulzusát. Az impulzusmegmaradásból számolja ki a D darab p_D impulzusát. Mekkora a D darab m_D tömege?

(c) Egyenlő-e m_C+m_D az ütközés előtti m_A tömeggel? A válaszhoz fűzzön magyarázatot.

(d) *Energia-impulzus diagramon* ábrázolja az A, C és D testeket. (Függőleges tengely: E, vízszintes tengely: pc.) Hogyan látszik a diagramon az energiamegmaradás és az impulzusmegmaradás? Hogyan olvashatók le a diagramról az m_A, m_C és m_D tömegek?

(Megjegyzés: atommagok radioaktív bomlásának részletei a fentiekhez teljesen hasonló módon számolhatók ki.)

<u>B25.</u>

<u>Polielektron molekula (anyagi részecskét létrehozó fény)</u>

Ha egy foton nekiütközik egy nyugalomban levő elektronnak, legtöbbször az energiája egy részét elveszítve „lepattan“ róla. (Ez az ún. Compton-szórás.) Előfordulhat azonban, hogy – ha a nyugvó elektronnal ütköző foton energiája elég nagy –, az ún. párkeltés folyamata zajlik le: ilyenkor a foton eltűnik a világból, és helyette egy elektron és egy pozitron (utóbbi az elektronnal megegyező tömegű, de pozitív töltésű részecske) jelenik meg. Az elektromágneses sugárzás tehát anyagi részecskéket hozott létre a semmiből! Tegyük fel, hogy a párkeltés után az eredeti elektron, ill. a két új részecske együtt marad: azonos irányban, azonos sebességgel haladnak tovább. (Ilyen esetben a két elektron és a pozitron akár kötött rendszert is létrehozhat. Ezt a – hidrogénmolekula-ionhoz hasonló szerkezetű, csak sokkal könnyebb – struktúrát „polielektron molekulának“ hívjuk.)

(a) Mutassa meg, hogy a fenti folyamat (nyugvó elektronnal ütközik egy foton, amely megsemmisül, és a párkeltésben létrejövő elektron és pozitron együtt mozog a kiinduló elektronnal) akkor mehet végbe, ha a beérkező foton energiája *négyszerese* az elektron nyugalmi energiájának.

(b) Ábrázolja energia-impulzus diagramon a kiinduló részecskék (nyugvó elektron és beérkező foton) energia-impulzus vektorát.

(c) Ugyanezen a diagramon ábrázolja a folyamat végén együtt mozgó két elektron és egy pozitron energia-impulzus vektorát.

(d) Olvassa le a diagramról, mekkora sebességgel halad a két elektron és a pozitron a laboratóriumhoz képest a folyamat végén.

B26.

Párkeltés protonnal

Egy nagysebességű proton egy másik, álló protonnak ütközik.

(a) Rajzoljon fel egy energia-impulzus diagramot (a laboratórium nyugalmi rendszerében), és rajzolja be a diagramba a két proton energia-impulzus vektorát.

Tegyük fel, hogy a mozgó proton energiája elég nagy ahhoz, hogy az ütközés során két új részecske is keletkezzen: egy újabb proton és egy antiproton (ez utóbbinak a tömege ugyanakkora, mint a protoné, a töltése pedig a proton-töltés (–1)-szerese). Tegyük fel, hogy a folyamat végén a négy részecske (3 proton és 1 antiproton) együtt marad, azaz azonos sebességgel, egy irányban mozognak tovább.

(b) Az energia-impulzus diagramba rajzolja be a folyamat végén maradt 4 részecske energia-impulzus vektorát.

(c) Mekkora energiájúnak és mekkora sebességűnek kellett lennie az eredeti gyorsan mozgó protonnak ahhoz, hogy a párkeltés létrejöjjön? (Az energia kiszámításához használja fel, hogy a proton tömege $1.67 \cdot 10^{-27}$kg.)

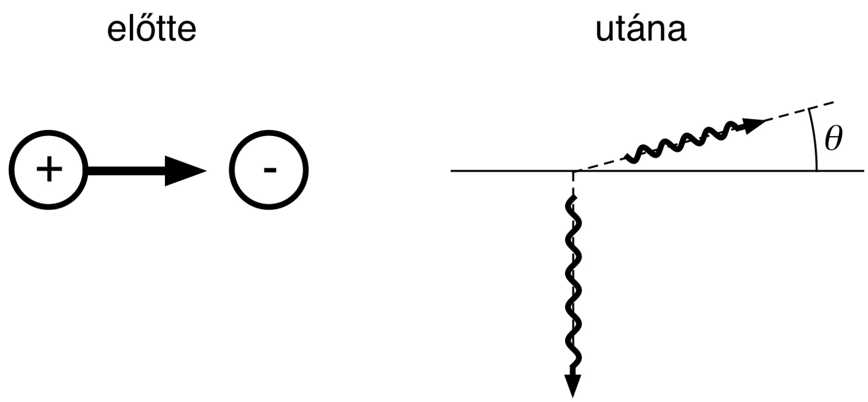
(d) Indokolja az alábbi állítást:
Azzal, hogy a feladatot arra a konkrét esetre számoltuk ki, amikor a négy részecske a folyamat végén *együtt mozog* tovább, a (c) kérdésre adott válasz a proton-antiproton párkeltés *küszöbenergiáját* adta meg. Ennél kisebb energiájú mozgó proton – ha álló protonnal ütközik – nem képes proton-antiproton párkeltést beindítani.

(e) Mi történik, ha a kiinduló mozgó proton küszöbenergiája *nagyobb* a (c)-ben kiszámolt küszöbenergiánál? Létrejöhet-e proton-antiproton párkeltés? Ha igen, miben különbözik a folyamat végén a 4 részecske mozgása a fent leírttól?

B27.

Elektron-pozitron bomlás

Egy álló elektronnak nagysebességű pozitron ütközik. (A pozitron tömege ugyanakkora, mint az elektroné, töltése pedig ugyanakkora számértékű, mint az elektroné, csak ellenkező előjelű.) Tegyük fel, hogy a pozitron mozgási energiája éppen a nyugalmi energiájával egyenlő. Ütközéskor mindkét részecske megsemmisül, és keletkezik két nagyenergiájú foton. Ebben a konkrét kísérletben az egyik foton a pozitron eredeti mozgásirányára merőlegesen érkezik a detektorba (ld. ábra).



(a) Milyen θ irányban halad tovább a másik foton?

(b) Mekkora a két keletkező foton energiája?

A feladatot algebrai úton, az energia- és impulzusmegmaradás törvényeinek felhasználásával oldja meg.

<u>B28.</u>

<u>Milyen ütemben csökkenti a sugárzás a Nap tömegét?</u>

A földfelszínen $1m^2$-nyi felületre – ha ezt a felületet merőlegesen tartjuk a napsugarakra – a Napból 1372W fényteljesítmény érkezik. A Nap-Föld távolság 150millió km. A Nap tömege $2 \cdot 10^{30}$kg.

(a) Másodpercenként mekkora tömeg alakul át a Napban fényenergiává?

(b) A Nap fényenergiájának nagy részét olyan magfúzió szolgáltatja, amelyben négy hidrogén atommag (proton) alakul át hélium atommaggá (ez két protonból és két neutronból áll), és az átalakulás során fényenergia szabadul fel. A proton tömege $1.67262 \cdot 10^{-27}$kg, a szokásos hélium atommag tömege pedig $6.64648 \cdot 10^{-27}$kg. Másodpercenként hány tonna hidrogént kell a Napnak héliummá alakítania, hogy ezt a fényteljesítményt elő tudja állítani?

(c) Tegyük fel, hogy jelenleg a Nap tömege teljes egészében hidrogénből áll, és amikor a teljes hidrogén-üzemanyag elfogy, a Nap kialszik. (Mindkettő helytelen feltevés; a csillagok életfolyamata ennél sokkal bonyolultabb.) Ha ez az egyszerűsített modell helyes lenne, még mennyi ideig tudná a Nap melegíteni a Földünket?

B29.

Fogyókúra kerékpározással

Bendegúz lelkes kerékpáros. A relativitáselméletből tudja, hogy minden leadott energia tömegvesztéssel is jár, ezt az elvet akarja fogyókúrához felhasználni.
Amikor teljes erővel tekeri a pedált, fél lóerő hasznos teljesítményt tud előállítani. (1 lóerő = 746 Watt). Az emberi szervezet hatásfoka kb. 25%. Ez azt jelenti, hogy a feldolgozott tápláléknak a 75%-a hővé alakul (ez nem növeli a testsúlyt, hanem a környezetet melegíti). Csak a fennmaradó kb. 25%-ot tudjuk hasznos munkává alakítani. Mennyi ideig kell Bendegúznak kerékpároznia (evés nélkül), hogy leadjon 1kg-ot?

B30.

Relativisztikus kémia

Amikor 1kg hidrogén 8kg oxigénnel kémiai reakcióba lép, víz keletkezik, és kb. 10^8J energia felszabadul.

(a) 10 tonna hidrogén lép reakcióba oxigénnel. A keletkező víznek nagyobb, vagy kisebb lesz-e a tömege, mint a reakció előtt a hidrogén és az oxigén össztömege? Mekkora ez a tömegkülönbség?

(b) Kisebb mennyiségű hidrogént és oxigént, miután tömegüket gondosan megmértük, kémiai reakcióba léptetünk. A keletkező víz tömegét is megmérjük. Alkalmas-e egy jó minőségű analitikai mérleg – amely 10^{-8} relatív pontossággal tud mérni – a fenti kísérletben a tömegkülönbség kimutatására?

<u>B31.</u>

<u>A fény nyomása</u>

Ágnes a jobb kezével lefelé irányít egy 1W-os zseblámpát, és felfelé fordított bal tenyerébe világít vele.

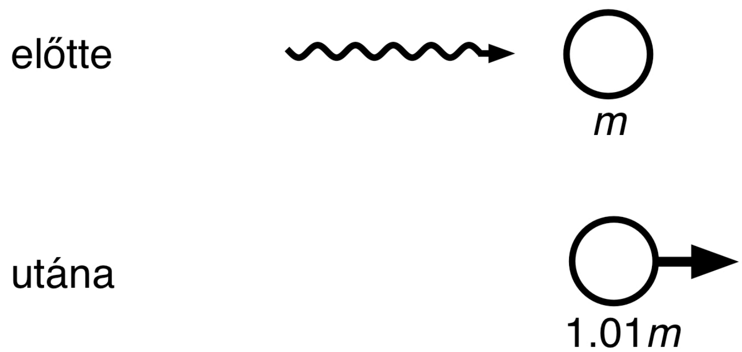
(a) Mekkora *nyomóerőt* fejt ki Ágnes bal tenyerére a fény? Érzi-e ezt a nyomóerőt?
(Segítség: Írja fel a fényrészecskék energiája és impulzusa közötti kapcsolatot. Tegyük fel, hogy a fényt Ágnes tenyere teljes egészében elnyeli, azaz a fényrészecskék impulzusa teljes egészében átadódik a tenyérnek. Írja fel, mekkora a tenyérre érkező fény impulzusváltozása 1 másodperc alatt. A fény nyomóerejét Newton 2. törvénye (   ) alapján számolja ki.)

(b) A Földfelszínen $1m^2$-nyi felületre – ha ezt a felületet merőlegesen tartjuk a napsugarakra – a Nap 1372W fényteljesítményt sugároz. Mekkora a fény *nyomása* egy a Nap felé fordított tükörre? Mekkora a napfény nyomása egy a Nap felé fordított fekete (tökéletesen fényelnyelő) papírlapra?

B32.

Atommag-gerjesztés fotonnal

Egy laboratóriumban egy *m* tömegű, nyugalomban levő atommag elnyel egy gamma-sugárzásból származó fotont. Ezzel magasabb energiaállapotba gerjesztődik, a tömege pedig 1.01*m*-re nő (ld. ábra).



(a) Ábrázolja energia-impulzus diagramon a reakcióban résztvevő részecskék energia-impulzus vektorát a folyamat előtt és után.

(b) Mekkora energiájúnak kell lennie a fotonnak, hogy ez a reakció létrejöjjön?

(c) Magyarázza meg, hogy a beérkező foton energiájának (tömeg mértékegységével kifejezve) miért kell *nagyobbnak* lennie, mint amennyivel az atommag tömege megnőtt.

(d) Mekkora sebességgel mozog a gerjesztett atommag a laboratórium vonatkoztatási rendszerében?

B33.

Párkeltés gamma-fotonokkal

Két gamma-sugárzásból származó foton egymással szembehaladva összeütközik. A fotonok megsemmisülnek, energiájukból egy elektron-pozitron pár keletkezik. Feltesszük, hogy a keletkező elektron és pozitron az eredeti fotonok mozgási egyenesén halad tovább (vagy – szélső esetben – nyugalomban van).

Ábrázoljon egy ilyen folyamatot (a két foton, az elektron és a pozitron energia-impulzus vektorát) energia-impulzus diagramon.

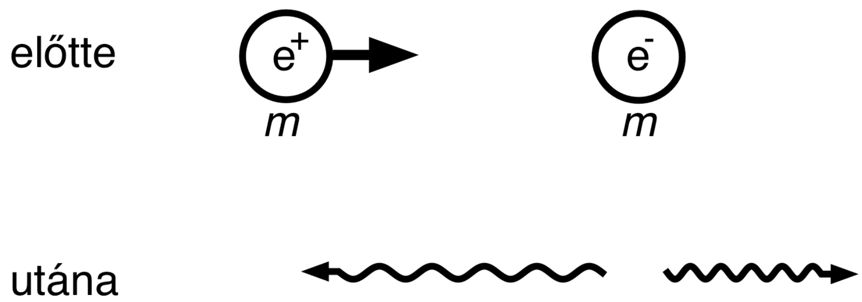
(a) Legalább mekkorának kell lennie a kiinduló fotonok energiájának, hogy ez a reakció létrejöjjön?

(b) Az energia-impulzus diagram alapján magyarázza el, miért van szükség két fotonra. Miért nem tud *egyetlen foton* – bármekkora energiájú is – önmagában párkeltési folyamatot beindítani?

B34.

Elektron-pozitron bomlás 1-dimenziós esete

Egy *m* tömegű, *K* mozgási energiájú pozitron (e^+) *m* tömegű nyugvó elektronnak (e^-) ütközik. Mindkét részecske megsemmisül. Energiájuk fény formájában kisugárzódik úgy, hogy a keletkező fotonok mozgási iránya egy egyenesbe esik az eredeti pozitron haladási irányával. (Az alábbi ábra a laboratórium vonatkoztatási rendszerében ábrázolja a folyamatot.)



(a) Rajzolja fel a folyamat energia-impulzus diagramját – azaz a négy szereplő részecske energia-impulzus vektorát – a laboratóriumi vonatkoztatási rendszerben. A diagram alapján indokolja, miért fog legalább *két* gamma-foton keletkezni a folyamatban.

(b) Számítsa ki a két keletkező foton energiáját.

(c) Mekkora a két keletkező foton energiája abban a határesetben, amikor a pozitron lassú ($K \ll m$)?

B35.

Proton-antriproton pár keltése elektronnal

Tekintsük az alábbi részecskefizikai reakciót:

gyors elektron + nyugvó proton $\rightarrow$ elektron + antiproton + 2 proton

(a) Ábrázolja a reakció energia-impulzus diagramját (azaz a résztvevő részecskék energia-impulzus vektorát reakció előtt és után).

(b) Legalább mekkorának kell lennie a kiindulási elektron *E* energiájának, hogy a reakció létrejöjjön? Hányszorosa ekkor az elektron *K* mozgási energiája az elektron nyugalmi energiájának?

Az elektron tömege $9.1 \cdot 10^{-31}$kg.
A proton és az antiproton tömege $1.67 \cdot 10^{-27}$kg.

B36.

Doppler-vonalkiszélesedés

Egy T hőmérsékletű gázban egy molekula átlagos kinetikus energiája $(3/2)kT$, ahol k a Boltzmann-állandó ($k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K).

(a) Mekkora a gázmolekulák átlagsebessége? (A számításhoz nyugodtan használja a kinetikus energia newtoni képletét, mert – a Földön megszokott hőmérsékleteken – kis sebességekről van szó.)

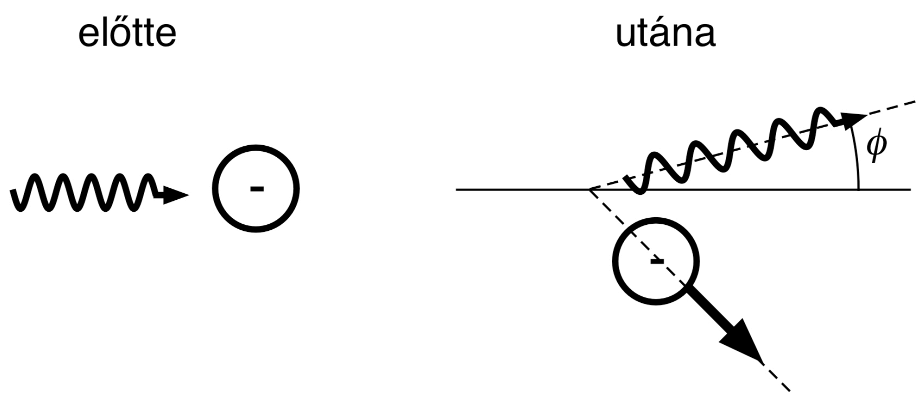
(b) A gázmolekulák random irányokban mozognak. Minden gázmolekula ugyanakkora f_0 frekvenciájú fényt bocsát ki (a saját nyugalmi vonatkoztatási rendszerében mérve). A Doppler-effektus miatt viszont egy laboratóriumi megfigyelő az éppen közeledő, ill. távolodó molekulák által kibocsátott fényt nagyobb, ill. kisebb frekvenciájúnak méri f_0-nál. Becsülje meg, mekkora $\Delta f/f_0$ relatív spektrális kiszélesedést mér a laboratóriumi megfigyelő a gáz által kibocsátott fény vonalas spektrumában.

(c) Milyen arányban növekszik a relatív spektrális kiszélesedés, ha a gáz hőmérsékletét kétszeresére növeljük?

B37.

Compton-szórás

A Compton-szórás során egy foton álló elektronnal ütközik. Az elektron meglökődik valamilyen irányban, a foton pedig kisebb energiával halad tovább egy másik irányba (ld. ábra).



A foton ütközés előtti és utáni energiáját, ill. impulzusát jelöljük az E_{f1}, p_{f1}, E_{f2}, p_{f2} szimbólumokkal. Hasonlóképpen, az elektron ütközés előtti és utáni energiáját, ill. impulzusát jelöljük az E_{e1}, p_{e1}, E_{e2}, p_{e2} szimbólumokkal.

(a) Írja fel a folyamatra az energiamegmaradás és az impulzusmegmaradás egyenleteit. Ügyeljen rá, hogy az impulzus vektormennyiség, a megmaradásnak külön teljesülnie kell a *x*- és *y*-irányú komponensekre is.

(b) Használja fel az energia és az impulzus közötti relativisztikus összefüggést [az *m* tömegű elektronra: $E_e^2 - (p_e c)^2 = (mc^2)^2$, a zérus tömegű fotonra: $E_f^2 - (p_f c)^2 = 0$], és a megmaradási törvényekből vezesse le a bejövő foton energiája, a szórt foton energiája és a szórási szög között fennálló alábbi összefüggést:

$$E_{f2} = \frac{E_{f1}}{1 + \frac{E_{f1}}{mc^2}(1 - \cos\phi)}.$$

Ez a Compton-szórás képlete.

B38.

Fotonrakéta

(a) Rajzoljon fel egy energia-impulzus diagramot, és ábrázolja rajta egy *nyugalomban levő*, m_k tömegű rakéta energia-impulzus vektorát.

A rakéta úgy lendül mozgásba, hogy tömegének egy részét a hajtóművön át *hirtelen* (egy lépésben) kilöki. A mozgó rakéta végső tömege a tömegvesztés miatt m_v ($<m_k$).

(b) Az energia-impulzus diagramon ábrázolja azt a hiperbolát, amelyen a mozgó rakéta energia-impulzus vektorának csúcsa kell hogy legyen. A *diagram alapján* indokolja a következő állítást: adott m_k/m_v tömegarány mellett az a rakéta a *leghatékonyabb* (az tesz szert a legnagyobb sebességre), amely az $m_k - m_v$ üzemanyag-tömeget *fény formájában* bocsátja ki. Az ilyen rakétát *fotonrakétának* nevezzük. [A gyakorlati – bár egyelőre technológiai nehézségekbe ütköző – megvalósítás úgy képzelhető el, hogy az $m_k - m_v$ tömegű üzemanyagot *anyag-antianyag* formájában visszük fel a rakétára, ahol egymással reakcióba lépve megsemmisülnek, helyükben fotonok keletkeznek, amelyeket tükrökkel mind egy irányba terelünk, és kilőjük a rakéta hátulján.]

(c) Ábrázolja a fotonrakéta esetét az energia-impulzus diagramon. Az ábrán látszódjon (1) az m_k tömegű nyugvó rakéta, (2) az m_v tömegű mozgó rakéta és (3) a kibocsátott fény energia-impulzus vektora.

(d) Írja fel a fotonrakéta esetére az energiamegmaradás és az impulzusmegmaradás egyenleteit. Vezesse le, hogy a rakéta végsebessége az alábbi módon függ a tömegaránytól:

$$V = c\frac{(m_k/m_v)^2 - 1}{(m_k/m_v)^2 + 1}.$$

(e) Mekkorának kell lennie az m_k/m_v tömegaránynak ahhoz, hogy a rakéta végsebessége $v = 0.8c$ legyen?

B39.

Relativisztikus rakéta

Egy rakéta úgy hajtja magát előre, hogy folyamatosan hajtógázt bocsát ki hátrafelé. (Vigyázat: itt – ellentétben a **Fotonrakéta** c. feladattal, amely szintén szerepel ezen a listán – nem egy hirtelen, egy lépésben mozgásba lendülő, hanem egy *folyamatosan gyorsuló* rakétáról van szó.) A hajtógáz *a rakétához képest* végig ugyanakkora u' sebességgel távozik a rakéta hátulján. Tegyük fel, hogy a rakéta kezdeti tömege m_k. Amikor a (hatógáz kibocsátása miatt folyamatosan csökkenő tömegű) rakéta tömege éppen m_v, a rakéta sebessége V.

(a) Vezesse le, hogy V az alábbi összefüggéssel írható fel:

$$V = c \cdot \tanh\left[\frac{u'}{c} \cdot \ln\left(\frac{m_k}{m_v}\right)\right].$$

Mekkora végsebesség érhető el $u' = 0.5c$ sebességű hajtógáz és $m_k/m_v = 100$ tömegarány mellett?

(b) Tekintse azt az „ultrarelativisztikus“ határesetet, amikor a hajtógáz u' sebessége a fénysebességhez közelít: $u' \approx c$. Igazolja, hogy ebben az esetben a fenti képlet a **Fotonrakéta** c. feladatban szereplő összefüggést adja vissza.

(c) Mutassa meg, hogy nemrelativisztikus határesetben ($u' << c$ mellett) a fenti képlet visszaadja a rakétamozgásra klasszikus mechanikából ismert

$$V \approx u' \cdot \ln\left(\frac{m_k}{m_v}\right)$$

összefüggést.

(Segédlet: egy lehetséges levezetést – amely energia-impulzus diagramokat használ a szemléltetéshez – részletesen bemutat a http://fizipedia.bme.hu/images/6/64/Relraketa.pdf linken található cikk.)