

MILYEN ALAKÚ A SZÁGULDÓ AUTÓ KEREKE?

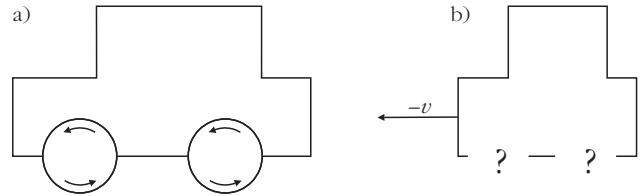
Bokor Nándor
BME Fizika Tanszék

Ellipszis. De miért?

Az út mellett leparkolt autó kereke kör alakú. Száguldás közben az autót vezető nyugalmi inerciarendszerében a kerék tisztán forgómozgást végez, ezért a szimmetria miatt továbbra is csak kör alakú lehet. Az út mellett álló megfigyelő szerint ez a kör alak hosszkontrakciót szenved, tehát *a száguldó autó kereke ellipszis alakú.*

Készen vagyunk, a cikk állhatna akár az előbbi három mondatból is. De ne elégedjünk meg ennyivel: értsük meg, hogy – bizonyos szempontból – miért meglepő és nem triviális a fenti válasz, azután gondosan indokoljuk meg, hogy miért mégis ez a válasz. Az *1.a ábrán* az autót vezető S nyugalmi inerciarendszeréből nézve látható a balra haladó autó. A kerekek körbeforognak, középpontjuk áll. Ami miatt rögtön elbizonytalanodhatunk az ellipsziszalak helyességében, az az, hogy a kerekek – az autó karosszériájával ellentétben – az úthoz képest *nem* egyszerű haladó mozgást végeznek, hiszen gurulnak. Az út mellett álló megfigyelő S' inerciarendszerének nézőpontját, a megrövidült mért karosszériát, és az elbizonytalanodást mutatja az *1.b ábra*. S' mérései szerint a autókerek egyes részei a haladó és forgó mozgás eredőjeként különböző irányokba mutató és különböző nagyságú sebességekkel rendelkeznek (a kerék alsó pontja például az úthoz képest *áll*, míg a felső pontja *gyorsabban* mozog az úthoz képest, mint az autó); emiatt a kerék egyes részeinek *különböző mértékű a hosszkontrakciója.*

A *2. ábrán* a dilemma részletesebben követhető. S mérése szerint a kerék összes kerületi pontja v sebességgel mozog, a felső pont például (a jobbra mutató irányt pozitívnak véve) $u_f = -v$ -vel, az alsó $u_a = +v$ -vel, míg a kerék középső pontja nyugszik: $u_k = 0$. Ha a kerék nyugalmi helyzetben kör alakú volt, akkor a tiszta forgás közben is kör alakú, ezt szimmetriaérveléssel könnyű belátni. (Itt érdemes megemlíteni az úgynevezett Ehrenfest-paradoxont [1], amelynek lényege, hogy amikor a kerék forgása álló helyzetből



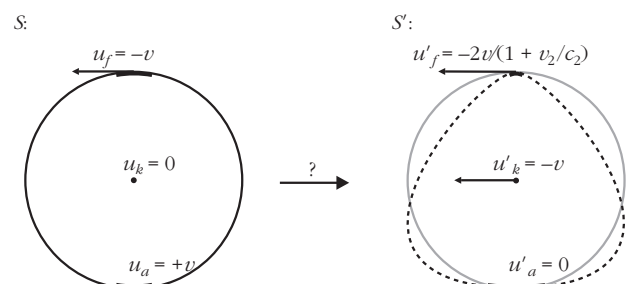
1. ábra. A balra haladó autó (a) az autóval együtt mozgó S inerciarendszerből, és (b) az út mellett álló megfigyelő S' inerciarendszeréből.

elindul, akkor a kerék anyagában – a kerület mentén – elkerülhetetlenül húzófeszültségek ébrednek, hiszen a kerület „hosszkontrakciót próbál szenvedni”, de a kerék anyaga nem engedi. Az Ehrenfest-paradoxon fogalmi alapjaiban hasonlító a Dewan–Beran-gondolat kísérlethez, amelyben egy cérnát a hossza mentén gyorsítunk [2]. E cikkben az Ehrenfest-paradoxon részleteivel – és általában a kerék anyagának elasztikus tulajdonságaival – nem foglalkozom.) A *2. ábra* jobb oldalán S' nézőpontja látható: a kerék úthoz tapadó alsó pontja éppen nyugalomban van, $u'_a = 0$, középső pontja balra halad $u'_k = -v$ sebességgel, felső pontja pedig szintén balra, de gyorsabban,

$$u'_f = -\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

sebességgel, ahol c a fénysebesség. (Mindhárom vészős sebességértéket a Lorentz-féle sebességtranszformációs képletből kell megkapni, nem írhatjuk például – naivan –, hogy $u'_f = -2v$). A *2. ábrán* a sebességvektorok relatív hosszának rajzolásakor v számértékét, nem törődve az autógyártás jelenlegi technológiai fejlettségével, $0,8c$ -nek választottam. Ekkor $u'_f \approx 0,976c$, és a kerék alsó és felső részének vastagított vonallal jelölt darabkái – amelyeket úgy választottam meg, hogy S mérése szerint azonos hosszúságúak legyenek – S' -ből mérve nem egyenlő hosszúak: a felső darabka hosszkontrakció miatt $0,37$ -szor *rövidebb*, az alsó pedig $1,67$ -szor *hosszabb*, mint S -ből mérve.

2. ábra. S' -ből nézve a kerék aljának és tetejének más a sebessége. Ez azt jelenti-e, hogy S' mérése szerint a kerék alja szélesebb, a teteje keskenyebb?

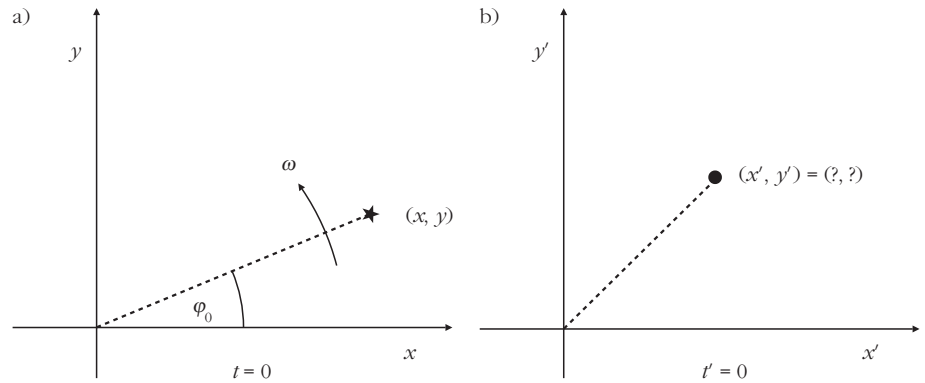


Köszönetemet fejezem ki *Jabn Kornélnak* értékes tanácsaiért.



Bokor Nándor egyetemi docens a BME-n szerzett villamosmérnök diplomát 1993-ban, majd ugyanott fizikából PhD fokozatot 1999-ben. Munkájában – az optika számos területén végzett kutatásai mellett – legszívesebben a fizika, azon belül kiemelten a relativitáselmélet oktatásának pedagógiai kérdéseivel foglalkozik. Ez utóbbi témában számos publikációja jelent meg a *Fizikai Szemlében*, valamint a *Physics Education* és a *European Journal of Physics* folyóiratokban.

(S' az alsó darabka nyugalmi hosszát méri!) Az emberben ezek után természetesen merül fel a gondolat [3], hogy a kerék alakját az S' megfigyelő a 2. ábra jobb oldalán látható, alul szélesebb, felül keskenyebb ovális-szerűségnek méri, nem pedig ellipszisnek. Ez hibás következtetés, de nem könnyű minden részletre kiterjedően megmagyarázni, hogy miért.



3. ábra. A kerék egy pontja (a) S nézőpontjából és (b) S' nézőpontjából.

Fizikai érvelés

A pusztán tény, hogy a 2. ábra jobb oldalán felrajzolt kerékalak nem lehet helyes, egyszerű fizikai érveléssel belátható: képzeljük el, hogy az autó karosszériája a kereket szorosan körülveszi, azaz a kerék egy kör alakú üregben forog, amelyhez a kerület mentén épp csak hozzá nem ér (az üregnek csak az alja hiányzik, hogy a kerék alul kicsit ki tudjon lógni, és az úthoz tudjon tapadni.) S' mérése szerint a karosszériához rögzített, kör alakú üreg tiszta haladó mozgást végez, *nem forog*, tehát pontosan a karosszériának megfelelő módon és mértékben szenved hosszkontrakciót: mozgásirányban megrövidül, alakja – ezt minden bonyodalom nélkül megállapíthatjuk – „oldalirányban arányosan összenyomott kör”, azaz ellipszis. Ebből viszont következik, hogy a guruló kerék alakja *sem lehet más*, mint ellipszis. Ha ugyanis S mérése szerint az üreg és a belülről hozzásimuló kerék alakja *ugyanolyan* (kör), akkor S' szerint is *ugyanolyannak* kell lennie az üreg és a kerék alakjának, különben olyan dologban nem értene egyet a két megfigyelő, amelyben muszáj egyetérteniük. Ha például S' az alul szélesebb, felül keskenyebb kerékalakot mérné, akkor az ő mérése szerint a kerék alul nekidörzsölné az ellipszis alakúvá rövidült üregnek, felül pedig elválna tőle, és ennek olyan mérhető következményekkel kellene járnia (például az üreg alja elkopna), amely ellentmondana az S által tapasztalt valóságnak. Ez az érvelés tehát meggyőző minket az ellipsziszalokról, de még mindig nem érthető, hogyan egyeztethető össze az ellipsziszalak a kerék aljának és tetejének eltérő hosszkontrakciójával.

Érvelés algebraival (nyers erővel)

Kövessük nyomon a kerék egy pontjának mozgását mind az S , mind az S' inerciarendszerből nézve. A szemléletesség kedvéért képzeljük el, hogy a kerék egy kijelölt helyére egy világító LED-et teszünk. A LED-ről az S rendszerben $t = 0$ -kor készült pillanatfelvételt mutatja a 3.a ábra (a LED-et csillag jelöli). Ugyanerről a LED-ről az S' -ben is készül egy pillanatfelvétel a $t' = 0$ időpillanatban, ezt mutatja a 3.b ábra (a LED-et itt kör jelöli). Megjegyzés: a t és t' időkoor-

dináták nem ugyanazok, egyiket S , a másikat S' méri. A Lorentz-transzformáció – lásd alább – adja meg közöttük a matematikai kapcsolatot. A 3. ábrán látható két pillanatkép a LED életében nem ugyanazt az eseményt örökíti meg – ezt érzékeltettem úgy, hogy a LED kinézete más a két ábrán –, mert a LED világvonalán a $t = 0$ koordinátájú esemény és a $t' = 0$ koordinátájú esemény nem ugyanott van.

Figyeljük e világító LED mozgását a téridőben. Az S inerciarendszer (x, y) koordinátarendszerében a tisztán forgó mozgást végző LED koordinátáit az alábbi összefüggések írják le:

$$x = r \cos(\varphi_0 + \omega t), \quad (1)$$

valamint

$$y = r \sin(\varphi_0 + \omega t), \quad (2)$$

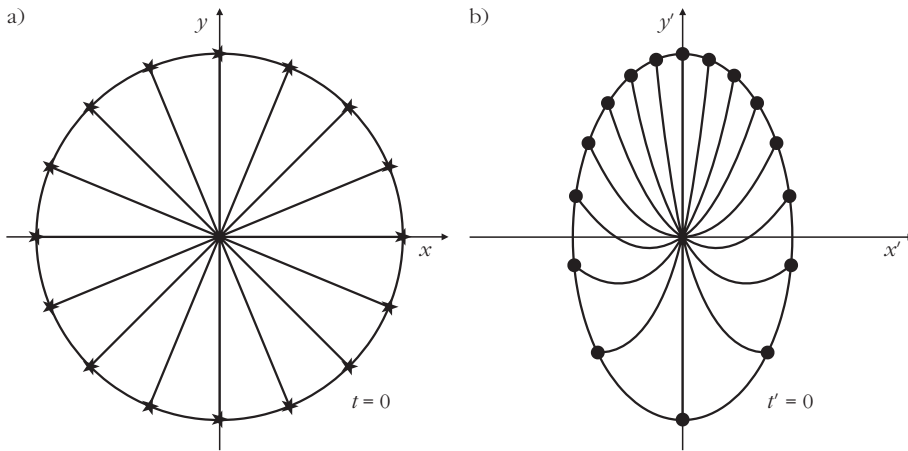
ahol r és φ_0 a LED forgómozgásának sugarát és kezdeti (S -ből mérve kezdeti!) szöghelyzetét kijelölő polárkoordináták, ω pedig a forgás szögsebessége, amely $\omega = v/R$ alakba írható, ahol R a kerék sugara. Milyen összefüggések írják le a LED mozgását S' mérése szerint, azaz milyen képletek adják meg a LED pozícióját az (x', y') koordinátarendszerben egy-egy adott t' időpillanatban? A választ úgy kapjuk, ha felírjuk a vesszős és vesszőtlen koordináták között kapcsolatot teremtő (inverz) Lorentz-transzformációs összefüggéseket:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt'), \\ y &= y' \text{ és} \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \end{aligned} \quad (3)$$

ahol

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Az (1) és (2) egyenletekben x , y és t helyébe a (3) összefüggések jobb oldalait helyettesítve az alábbi két egyenlethez jutunk:



4. ábra. A kerék és a küllők alakja (a) S mérése szerint és (b) S' mérése szerint.

$$\gamma(x' + vt') = r \cos \left[\varphi_0 + \omega \left(\gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \right) \right] \quad (4)$$

és

$$y' = r \sin \left[\varphi_0 + \omega \left(\gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \right) \right]. \quad (5)$$

A (4) és (5) egyenletek implicit módon megadják a LED világvonalának alakját (x', y', t') koordinátákkal kifejezve. $t' = 0$ -t behelyettesítve a két egyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$x' = \frac{r}{\gamma} \cos \left(\varphi_0 + \omega \gamma \frac{v}{c^2} x' \right), \quad (6)$$

valamint

$$y' = r \sin \left(\varphi_0 + \omega \gamma \frac{v}{c^2} x' \right). \quad (7)$$

Ezek után a $t' = 0$ pillanatban a LED pozícióját megszerkeszthetjük az (x', y') síkon: először a (6)-os egyenletet numerikusan megoldva megkapjuk x' -t, majd az így kapott x' -t (7)-be helyettesítve megkapjuk y' -t. A 3.b ábra ezt a számolást követve ábrázolja a LED pozícióját $t' = 0$ -ban, S' mérése szerint. (Az olvasó a (6) és (7) egyenletek négyzetre emelésével könnyen beláthatja, hogy a LED az S' mérése szerint valóban egy olyan *ellipszisen* helyezkedik el, amelynek nagytengelye y irányú és $2r$ nagyságú, kistengelye pedig x irányú és éppen a hosszkontrakciós tényezőször kisebb.)

A teljes autókerék átfogó kinézetéről úgy kaphatunk pontosabb képet, ha képzeletben nem csak egyetlen LED, hanem a kerék sok pontjának történetét követjük a téridőben. A 4.a ábra a 3.a ábra általánosításaként a teljes autókeréket ábrázolja S nézőpontjából, a $t = 0$ időpillanatban. Hogy a kerék alakjának módosulását követni tudjuk, a kerület mentén, egyenlő közönként 16 pontot vettem fel (ezeket csillagok ábrázolják), és az ábrára a kerék 16 küllőjét is berajzoltam. (Az autókerékre küllőket nehezen elkép-

zelhetőnek tartó olvasó figyelmét felhívom az egész gondolatkísérlet más, gyakorlati szempontból képtelen részleteire.) A kerület, valamint a küllők pontjainak mozgását az S' inerciarendszerben is követhetjük a (4) és (5) egyenletek alapján. A (6) és (7) egyenletek segítségével pedig megszerkeszthetjük, hogy *adott időpillanatban*, például $t' = 0$ -ban az S' megfigyelő milyennek észleli ezen pontok elhelyezkedését az (x', y') síkon. A számolás eredménye a 4.b ábrán látha-

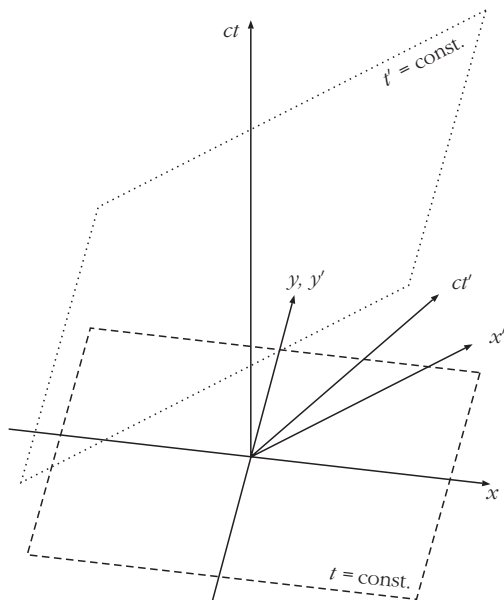
tó. Fontos látni, hogy mind a 4.a ábra, mind a 4.b ábra valóban a kerék és a küllők alakját mutatja, hiszen egy tárgy pontjainak adott időpillanatban mért helyzete definíció szerint a tárgy alakja. A 4.a és 4.b ábrákon az „adott időpillanat” kifejezés jelentése azonban eltérő: azok a pozíciómérések, amelyek eredménye a 4.a ábrán látszik, S mérése szerint történtek azonos időpontban (még precízebben: ezen pozíciómérési események t koordinátája volt azonos), míg a 4.b ábrán megjelenített pozíciómérési eredmények S' szerint származnak egyidejű pozíciómérési eseményekből (ezek t' koordinátája azonos). A 4.b ábra alapján most már össze tudjuk egyeztetni a kerék ellipszissé kontrahálódott alakját az egyes kerületi darabok eltérő hosszkontrakciójával.

Érvelés 3D téridődiagrammal

A téridődiagramok olyan vizuális segédeszközök, amelyek természetüknél fogva egyetlen ábrán egész történeteket mesélnek el. Szemléletesek, meglepően sok információt tartalmaznak nagyon kompakt formában, gyakorlatilag algebra használata nélkül is kvantitatív eredményeket képesek adni, és erősítik a fizikai intuíciót. Pedagógiai értékük felbecsülhetetlen, akkor is, ha az ember maga akarja a jelenségeket mélyebben megérteni, és akkor is, ha másoknak akarja érthetően elmagyarázni.

Az autókerék-probléma háromdimenziós (3D) jellegű: a kerék számunkra érdekes pontjai síkban (két-dimenziós térben) helyezkednek el, ezt egészíti ki az idő, mint harmadik dimenzió. Szemléltetéséhez tehát a jól ismert (x, ct) kétdimenziós téridődiagramok, az úgynevezett Minkowski-diagramok [4] természetes 3D általánosítására van szükség (5. ábra).

Elkészítése úgy zajlik, hogy először az x , y és t tengelyeket – a kényelem kedvéért páronként merőleges irányban – rajzoljuk fel. Természetes, hogy az x és y tengelyeket ugyanabban a hosszegységben kalibráljuk (felesleges bonyolítás lenne például az egyiket méterben, a másikat hüvelykben). A *téridő* egységes jellegét, a tér- és időbeli koordináták egyenrangúságát



5. ábra. 3D téridődiagram, amely S és S' nézőpontját egyaránt ábrázolja.

úgy hangsúlyozzuk ki hogy, az ábrán a t tengelyt sem másodpercben kalibráljuk, hanem ugyanabban a hosszegységben, mint az x és y tengelyeket, például méterben. Ezt az 5. ábrán úgy érzékeltetem, hogy a tengelyre „ ct ”-t írtam, ahol c – a mindenki által ugyanakkorának mért vákuumbeli fénysebesség, mint egyetemes állandó – most a méter és a másodperc közötti átváltási tényező szerepét tölti be. Az ábra vesszős tengelyeit ezután a

$$\begin{aligned} x' &= \gamma \left(x - \frac{v}{c} ct \right), \\ y' &= y \quad \text{és} \\ ct' &= \gamma \left(ct - \frac{v}{c} x \right) \end{aligned} \quad (8)$$

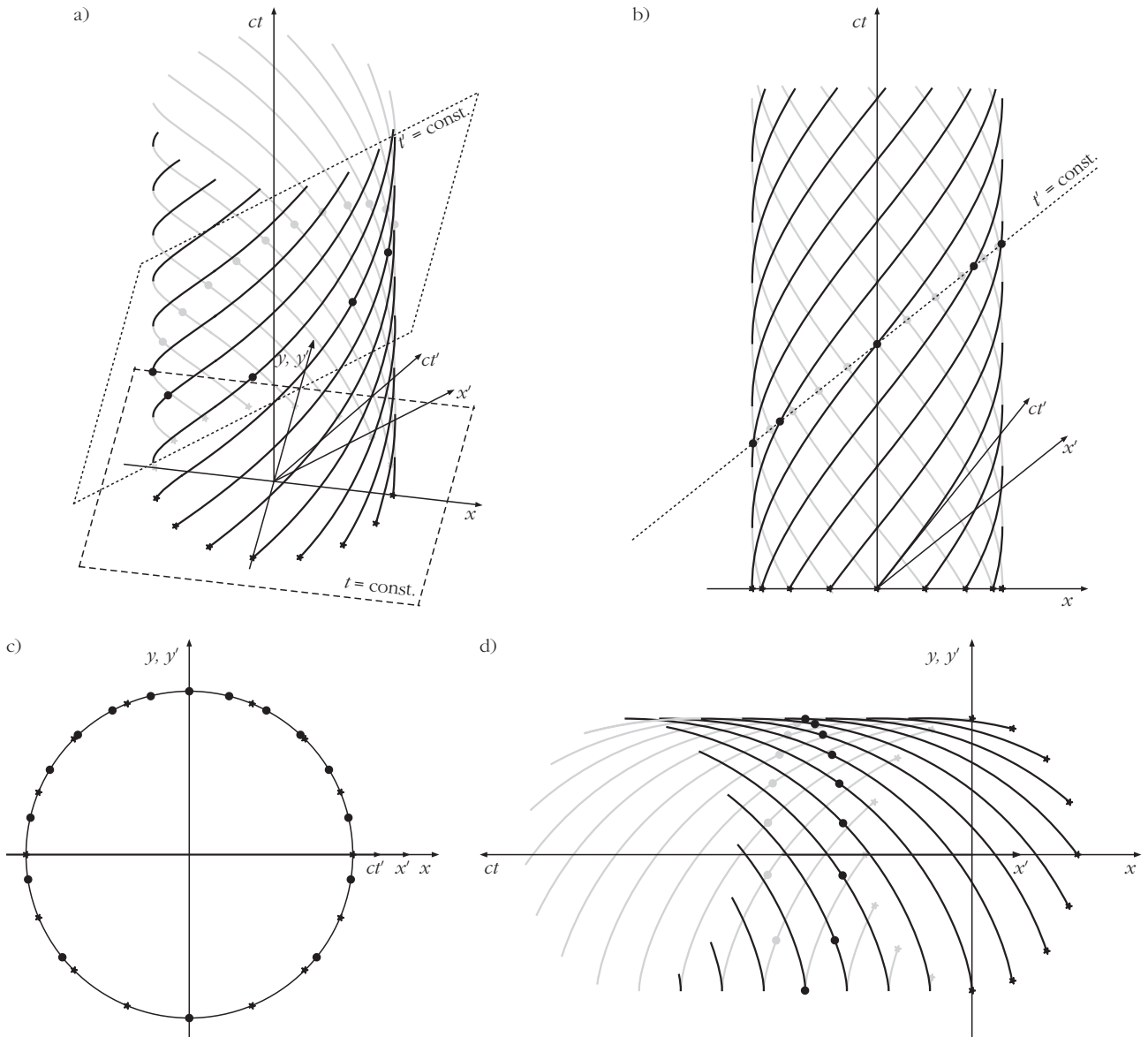
Lorentz-transzformációs egyenletek alapján egyszerűen kijelölhetjük. A ct' tengelyt definíció szerint olyan események sora alkotja, amelyek x' és y' koordinátája 0, az x' tengely mentén olyan események vannak, amelyek y' és ct' koordinátája 0 stb. Ezekből a feltételekből, a (8) egyenletek alapján könnyen felírhatjuk a három vesszős tengely egyenletét az (x, y, ct) koordinátarendszerben, és berajzolhatjuk őket az ábrába. Az eredmény: a ct' tengely és az x' tengely egyaránt az (x, ct) síkban van (ez a 4 tengely együtt rajzolja ki a jól ismert kétdimenziós Minkowski-diagramot), az y' tengely pedig egybesik az y tengellyel. A ct' tengely ábra szerinti iránya fizikai érveléssel is azonnal belátható: a ct tengely nem más, mint az S rendszer origójában nyugvó tömegpont (például az autó kereke középpontja) világvonala, így – szimmetria miatt – a ct' tengely sem lehet más, mint az S' origójában nyugvó tömegpont (például az út mellett álldogáló nyúl orra) világvonala. Márpedig ez az út mellett álldogáló orr $+v$ sebességgel halad az autókerek középpontjához képest, tehát a

ct' tengely $+v$ -nek megfelelő szögben dől a ct tengelyhez képest az x tengely felé. Az (x, y) síkkal párhuzamos síkok, azaz az olyan események által alkotott felületek, amelyek t koordinátája azonos, az S megfigyelő egyidejűségi síkjai. Hasonlóképpen azok az események, amelyeket az S' megfigyelő adott t' időpontban egyidejűleg mér, az (x', y') síkkal párhuzamos sík mentén helyezkednek el. Az 5. ábrán egy-egy ilyen egyidejűségi sík is látható. Az x, y, ct tengelyekre az egymást méterenként követő kalibrációs osztásokat is rárajzolhatnánk. Ha ez megvan, a vesszős tengelyekre sem okozna különösebb nehézséget az egymást méterenként követő kalibrációs osztások berajzolása. (Például a ct' tengely 1 méteres osztásának pontját úgy kapjuk meg, hogy a (8) egyenletrendszer megoldjuk (x, y, ct) -re, $(x', y', ct') = (0, 0, 1)$ feltétel mellett. Az eredmény az

$$(x, y, ct) = \left(\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

koordinátájú pont.) E cikkben a 3D téridődiagramok tengelyeire nem rajzoltam hosszegységként kalibrációs osztásokat, mert a guruló autókerek szemléltetéséhez erre nincs szükség.

Miután bekoordináztuk az ábrát, már csak „bele kell rajzolni a történetet”, azaz az autókereket alkotó pontok világvonalát. A kerék az S rendszerben forgómozgást végez, kerületi pontjai éppen azzal a v sebességgel keringenek a tengely körül, amellyel az S' mozog az S -hez képest. A kerék kerületi pontjainak világvonalai tehát olyan spirális vonalak, amelyek a ct tengely (a kerék középpontjának világvonala) köré csavarodnak, és meredekségük c/v , azaz pont akkora szögben dőlnek az x - y síkhoz képest, mint a ct' tengely. A 6.a ábrán látható a kerületi pontok mozgása a 3D téridődiagramon. A 6.b, c és d ábrákon erre a 3D téridődiagramra különböző irányokból „nézünk rá”. A 6.b ábrán „előlről” nézzük (az y - y' tengely befelé mutat az ábra síkjába), a 6.c ábrán „felülről”, azaz a ct tengellyel szembenézve, a 6.d ábrán pedig „oldalról és felülről”, éppen a ct' tengellyel szembenézve. A 3D téridődiagram a feladatra vonatkozó összes lényegi információt tartalmazza. A kerék S által megfigyelt alakja – amit úgy kapunk, hogy a spirálisok által kirajzolt hengerfelületet az S egyidejűségi síkjaival elmetsszük – mindvégig kör marad, a kerületi pontok pedig egyenközűek. A $t' = \text{const.}$ ferde síkkal való metszetre ránézve azonnal kirajzolódik – az (1)–(7) számolás nélkül – az S' által megfigyelt ellipsziszalak és a kerületi pontok összesűrűsödése-ritkulása a kerék tetején, illetve alján. Képzletben egymás feletti párhuzamos síkokkal elmetsszve a spirális hengert, az ábrát szemlélő fejben, moziszerűen le tudja játszani a teljes mozgást mind S , mind S' nézőpontjából. Megjegyzés: a 6.d ábrát körültekintően kell értelmezni. A $t' = \text{const.}$ síkkal alkotott, kis körrel jelzett metszéspontokból itt csakugyan kirajzolódik a felül sűrűbb, alul rit-



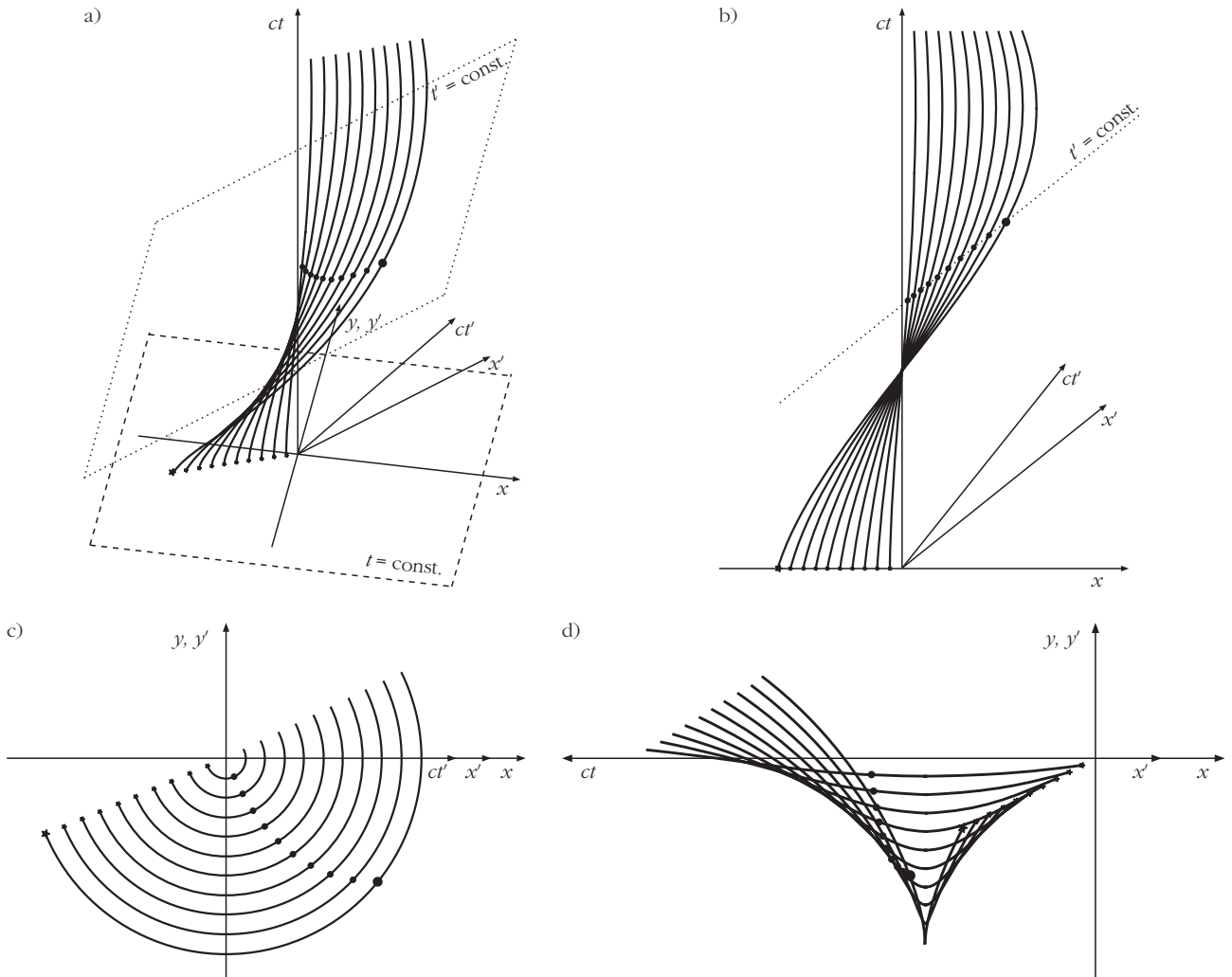
6. ábra. A kerék kerületi pontjainak mozgása 3D téridődiagramon.

kább ellipszoid alakzat (és a sűrűsödés-ritkulás helyesen visszaadja a számolásból kapott 4.b ábrát), azonban a 6.d ábrán megjelenő ellipszis oldalirányban jobban össze van nyomva, mint az S' által ténylegesen mért (4.b ábrán látható) kerékalak. Ennek oka az, hogy a 6.d ábrán a kalibrációs osztások (ha berajzoltam volna őket) nem olyan közűeknek látszanak az x' tengelyen, mint az y' tengelyen. Hogy a helyes arányú ellipszoid alakot megkapjuk, oldalirányban addig kellene nyújtani a 6.d ábrát, amíg az x' és y' kalibrációs osztásai azonos közűeknek nem látszanak.

A 6. ábrán a kerületi pontok mozgását követtük. A 7. ábra egyetlen küllő pontjait követi a téridőben. (A 7.a–d ábrák nézetei pontosan megfelelnek a 6. ábra megfelelő nézeteinek.) A világvonalak ismét a ct tengely köré csavarodó spirális vonalak, de a kerék középpontja felé haladva egyre „függőlegesebbek” és egyenesebbek, mert egyre lassabban mozgó pontokat ábrázolnak a téridőben. A 3D téridődiagramon bo-

nyolult algebra (például a (6) egyenlet numerikus megoldása) nélkül azonnal, meglepő természetességgel rajzolódik ki, hogy az S által egyenesnek észlelt küllők alakját az S' megfigyelő miért méri görbének.

A 3D téridődiagramok akkor nyújtják a teljes információt, akkor erősítik leghatékonyabban a fizikai intuíciót, ha valóban „kézbe foghatjuk” és tetszőleges térbeli irányokból tudjuk szemlélni azokat. Egy folyóiratcikkben ez sajnos megoldhatatlan, ezért kellett kiválasztanom néhány nevezetes síkbeli nézetet a 6. és 7. ábrákhoz. Az ábrák 3D téridődiagramjait Matlab nyelven számoltam ki. Eredeti változatukban a képernyőn egérrel tetszőleges irányba forgathatók, tehát igazi pedagógiai értéküket a számítógép képernyőjén mutatják meg. Azonban akár valószínűleg kézbe vehető, a diákok között körbeadható makettet is készíthetünk belőle. Egy ilyen makett kezdetleges változatát – a kerék kerületi pontjainak világvonalát, a koordinátatengelyek nélkül – mutatják a 8. ábra fényképei. A kerék kerülete

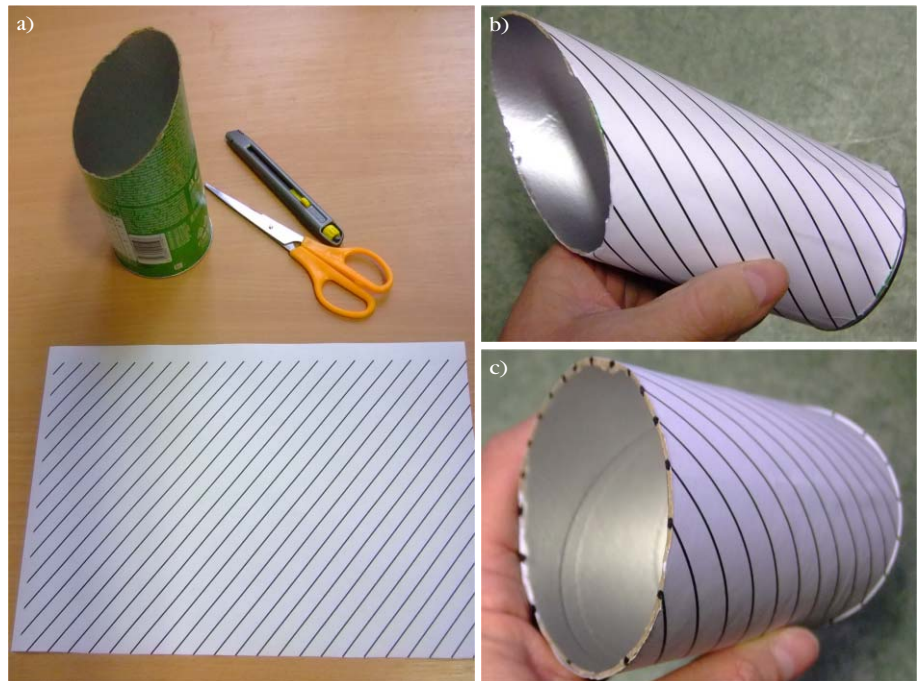


7. ábra. A kerék egy küllőjének mozgása 3D téridődiagramon.

által a téridőben kirajzolt hengerfelületet egy chips-es doboz felülete szolgáltatja. A doboz tetejét a 8.a fényképen látható módon ferdén, a vízszintes alsó laphoz képest $\arctg(v/c) = 38,7^\circ$ -os szögben levágtam. A kerületi pontok világvonalát először egy papírlapra nyomtattam ki: a papírra párhuzamos egyenesek kerültek, $\arctg(c/v) = 51,3^\circ$ dőlésszöggel (8.a fénykép), majd a papírt a hengerre ragasztottam (8.b fénykép). A henger vízszintes alsó lapja az S inerciarendszer egyik egyidejűségi síkját, ferdén levágtott teteje pedig az S' egyik egyidejűségi síkját jeleníti meg.

A 8.c fényképen a 6.d ábrához hasonló nézet látható. A fényképen jól nyomon követhető, hogy a kerék kerületén az S szerint egyenközű pontok

8. ábra. A 6. ábra 3D téridődiagramja, tengelyek nélkül, kézbe fogható változatban.



(lásd a doboz távolabbi végét) síkbeli elhelyezkedésének szimmetriája hogyan borul fel S' nézőpontjából, és hogyan lesznek sűrűsödések és ritkulások a kerék tetején és alján (lásd a doboz közelebbi végét).

Záró gondolatok

A cikkben a guruló autókerék alakjának problémáját tárgyaltam ugyan, de a fő célom az volt, hogy – egy konkrét példán keresztül – általában a *3D téridődiagramok* pedagógiai értékéről meggyőzzem az olvasót. Lenyűgöző tulajdonságuk, hogy térben és időben lezajló folyamatokat egyetlen statikus ábrán, részletekbe menően jelenítenek meg. Természetükből adódóan csak olyan jelenségek tárgyalásához nyújtanak segítséget, amelyek két térbeli dimenzióra szorítkoznak. A relativitáselméletben több fontos ilyen jelenség van. Első példaként a *Wigner-rotációt* (és a szorosan hozzá kapcsolódó *Thomas-precessziót*) említem. A Wigner-rotáció lényege, egyszerűsített megfogalmazásban: egy vízszintes irányú löket és egy függőleges irányú löket egymásutánja nem egyenértékű egy ferde irányú lökettel, viszont egyenértékű egy ferde irányú löket és egy *elfordulás* egymásutánjával. Ezt a meglepő, intuíciónknak ellentmondó jelenségét magától értetődő ter-

mészetességgel és szemléletességgel rajzolja ki egyetlen 3D téridődiagram. A Wigner-rotáció részletes tárgyalása és 3D téridődiagrammal való szemléltetése megtalálható az [5] internetes linken. Két további példa, amelyek meggondolását és a hozzájuk tartozó 3D téridődiagram felrajzolását az olvasóra bízom: a *fényszóróeffektus* (az elhaladó autó fényszórójának kúp-szerű fénycsóvája az út mellett álló megfigyelő mérése szerint az autó mozgási irányában szűkebb nyílású kúpra koncentrálódik) és az *aberráció* (két, egymáshoz képest mozgó távcső tengelye szöveget zár be, ha ugyanarra a távoli csillagra vannak irányítva). Mindhárom fenti példa (kvantitatív részleteket mellőző) szemléletes megjelenítéséhez elég egy-egy olyan 3D téridődiagram, amely – a 6–7. ábrákhoz hasonlóan – csak a koordinátatengelyek irányát mutatja, a kalibrációs osztásokat a tengelyeken nem.

Irodalom

1. Ø. Grøn: Relativistic description of a rotating disk. *Am. J. Phys.* 43/10 (1975) 869–876.
2. Bokor N.: Relativisztikus fogócska I. *Fiz. Szemle* 62/9 (2012) 301–305.
3. V. N. Matvejev, O. V. Matvejev, Ø. Grøn: A relativistic trolley paradox. *Am. J. Phys.* 84/6 (2016) 419–425.
4. Lásd például: Bokor N.: Lucky Luke – az ember, aki gyorsabban lő, mint az árnyéka. *Fiz. Szemle* 64/11 (2014) 382–387.
5. http://fizipedia.bme.hu/images/5/5b/Wigner_Thomas4.pdf