

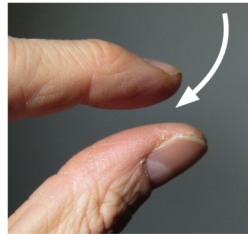
Előzetes megjegyzés:

1. Az időt nyugodtan mérhetjük méterben. $ct_{[s]} = t_{[m]}$

“A film kétórás volt.” = “A film 2.16 milliárd kilométernyi ideig tartott.”

2. A tömeget is nyugodtan mérhetjük méterben! $\frac{GM_{[kg]}}{c^2} = M_{[m]}$

“A Föld tömege $M_F=6 \times 10^{24} \text{kg}$.” = “A Föld tömege $M_F=4.4 \text{mm}$.”



1

HONNAN TUDJUK BELSŐ MÉRÉSSEL
ELDÖNTENI, HOGY EGY FELÜLET
GÖRBÜLT-E?

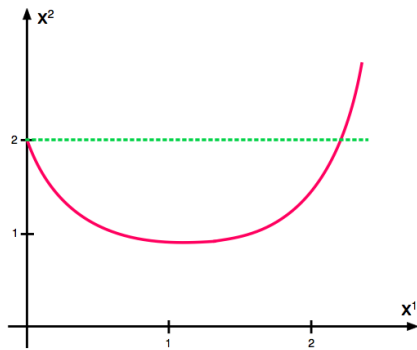
EGY ALAPSZABÁLY:
NE BÍZZUNK A TÉRKÉPBN!

A térképen ábrázolt vonal:

- sík felület egyenese?
- sík felület görbéje?
- görbült felület egyenese (“geodetikus”)?
- görbült felület görbéje?

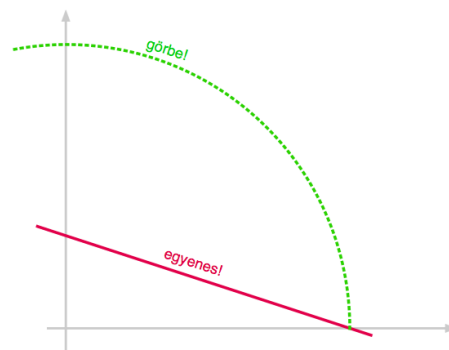
2

Térkép:



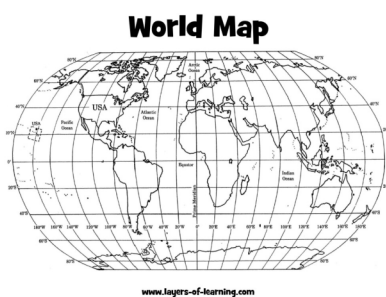
- sík felület;
- a térképen a koordináták: $x^1 = \varphi$, $x^2 = r$

Valóság:

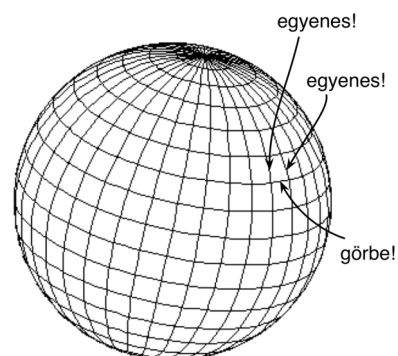


3

Térkép:



Valóság:



- görbült felület;
- a térképen a koordináta-vonalak: szélesség (λ), hosszúság (φ)

Északi irányt tartó hajó: egyenesen halad előre.
Keleti irányt tartó hajó: kanyarodik!

4

GÖRBÜLT FELÜLET



Geodetikus (“egyenes”) vonalak görbült felületen. Nem a vonalak tehetnek róla, hogy görbének látjuk őket, hanem mi, akik a *térképet* így konstruáltuk meg.

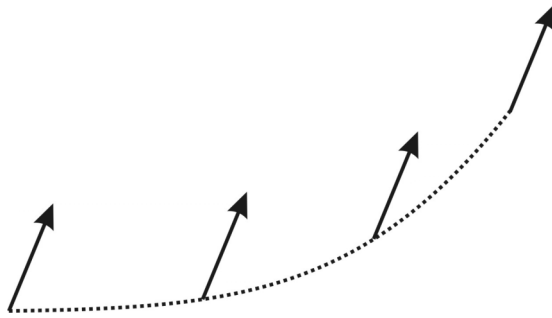
5

HONNAN TUDJUK BELSŐ MÉRÉSSEL
ELDÖNTENI, HOGY EGY FELÜLET
GÖRBÜLT-E?

KULCS A MEGOLDÁSHOZ: EGY VEKTOR
PÁRHUZAMOS ELTOLÁSA MÁΣ EREDMÉNYHEZ
VEZET SÍKON, MINT GÖRBÜLT FELÜLETEN

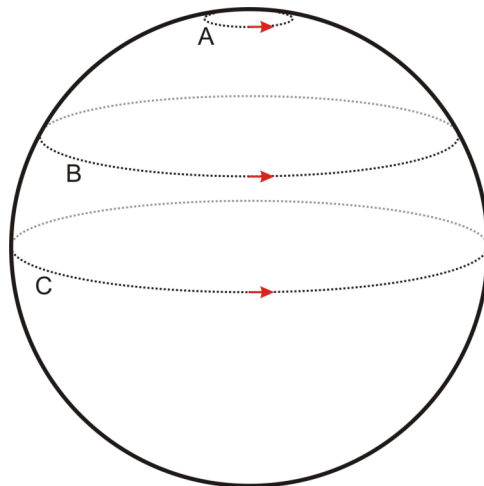
6

VEKTOR PÁRHUZAMOS ELTOLÁSA



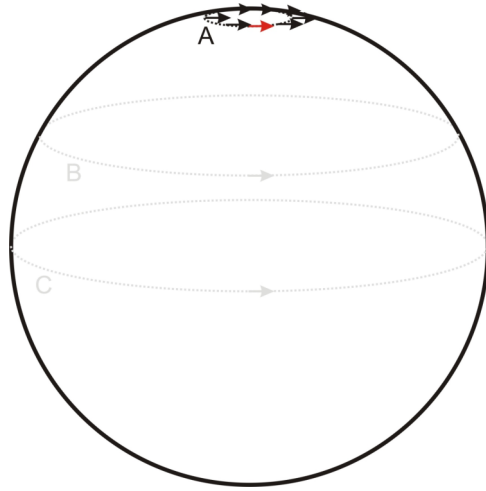
Vektor párhuzamos eltolása *síkon*, adott vonal mentén.

7



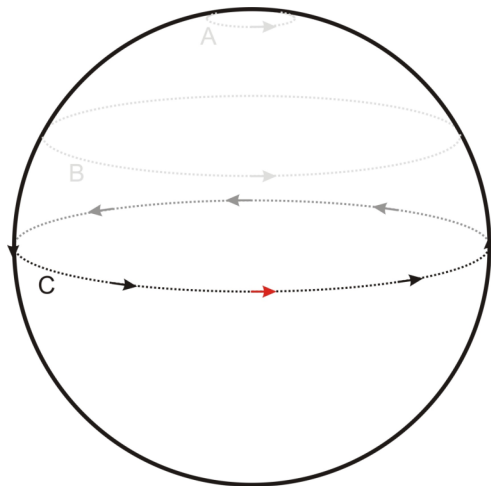
Vektorok párhuzamos eltolása *gömbült felületen*, adott zárt vonal mentén.

8



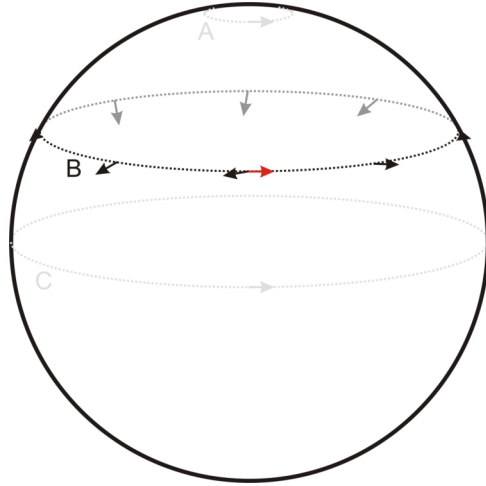
Vektorok párhuzamos eltolása *gömbült felületen*, adott zárt vonal mentén.

9



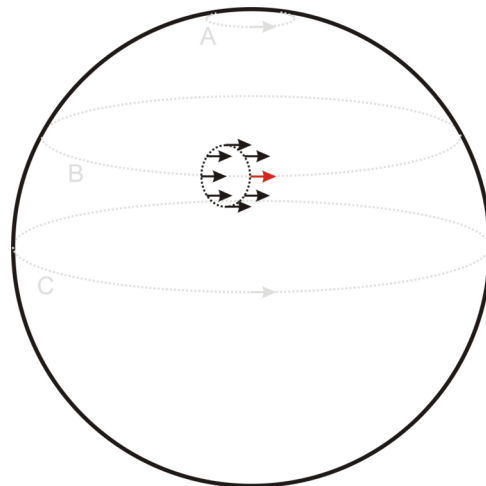
Vektorok párhuzamos eltolása *gömbült felületen*, adott zárt vonal mentén.

10



Vektorok párhuzamos eltolása *gömbült felületen*, adott zárt vonal mentén.
A végére kifordul az eredeti irányból?!

11

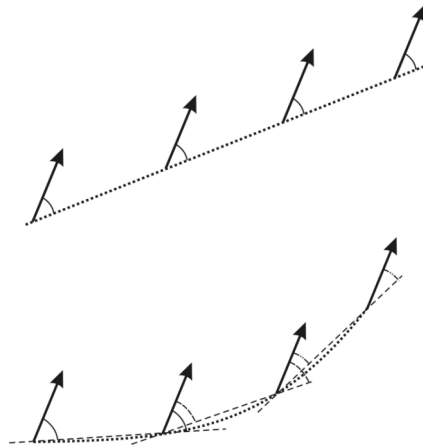


A párhuzamosan eltolt, zárt görbén végigvitt vektor állása *függ az adott görbétől*.

12

Mi a párhuzamos eltolás (laposlények számára is érthető) szabálya?

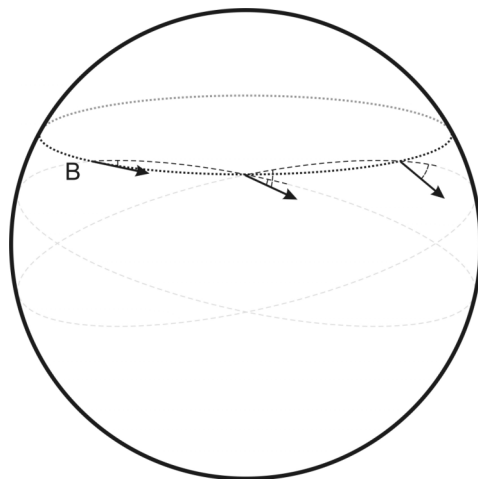
Segítség:



Vektorok párhuzamos eltolása *síkon*, egyenes ill. görbe vonal mentén.

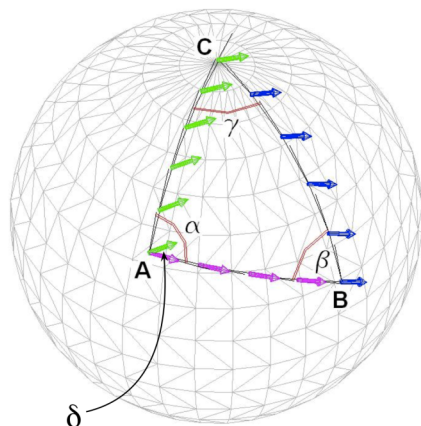
13

Szabály: a görbe vonalat egyenes szakaszokkal közelítjük, és minden szakaszon ügyelünk a szög megtartására.



Az eredeti pontba visszajutva a vektor tényleg nem az eredeti irányba áll!

14



Lennart Green (TED előadás)

zárt görbe mentén végigvitt vektorra: felületi excesszus ($\delta \neq 0$)

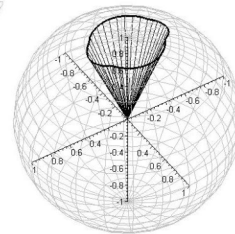
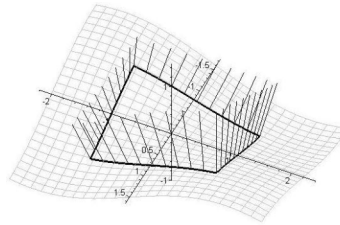
15

HONNAN TUDJUK BELSŐ MÉRÉSEL
ELDÖNTENI, HOGY EGY FELÜLET
GÖRBÜLT-E?

VÁLASZ: EGY VEKTORT PÁRHUZAMOS
ELTOLÁSSAL VÉGIGVISZÜNK EGY ZÁRT
GÖRBÉN →
HA $\delta \neq 0$: GÖRBÜLT A FELÜLET,
HA $\delta = 0$: SÍK A FELÜLET.

16

KVANTITATÍV RÉSZLETEK



Gauss-görbület (a felület adott pontjában értelmezett mennyiség):

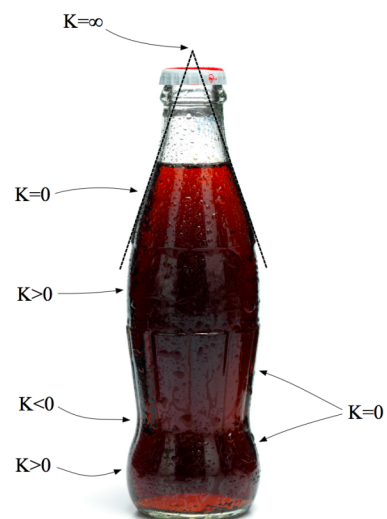
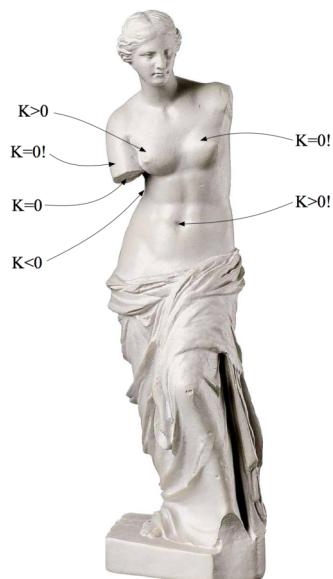
$$K \equiv 1/(R_{min} \cdot R_{max})$$

Gauss-Bonnet tétel:

$$\delta = \int_T K dT \quad (\delta = \Omega)$$

17

GÖRBÜLT SOKASÁGOK



18

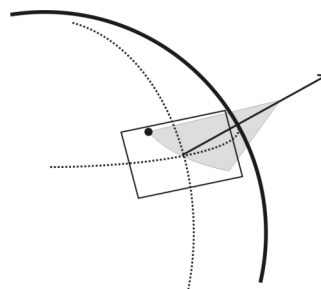
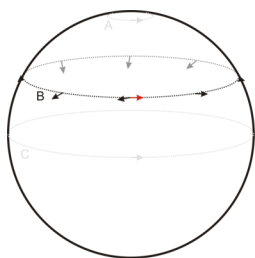
A GÖRBÜLET KIMUTATÁSA KÍSÉRLETILEG

Foucault-inga

- az inga lengési pályája (mint „vektor”) párhuzamosan tolódik el

$$\alpha = 2 \cdot \pi \cdot \sin \lambda$$

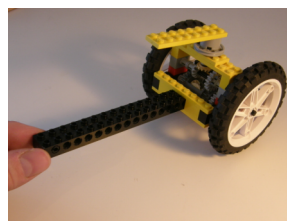
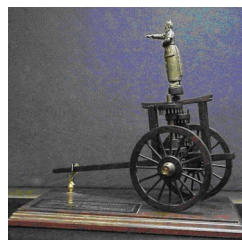
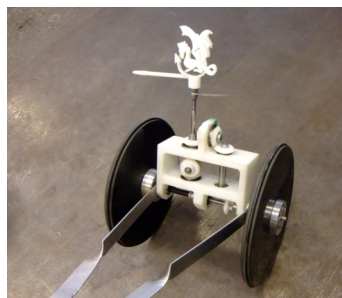
(λ : a szélességi kör koordinátája)



19

A GÖRBÜLET KIMUTATÁSA KÍSÉRLETILEG

Délirányt jelző kordé (指南車)

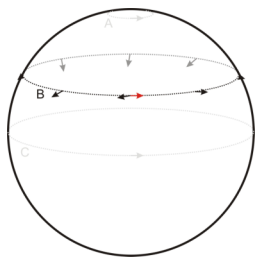


Dr. Laczik Bálint, BME

20

A GÖRBÜLET KIMUTATÁSA KÍSÉRLETILEG

Délirányt jelző kordé (指南車)



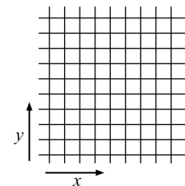
Dr. Laczik Bálint, BME

21

METRIKA

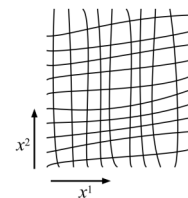
2D sík, két közeli pont közötti távolság, Descartes-koordinátákkal felírva:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$



Általános alak (ha nem feltétlenül Descartes-koordinátákat használunk):

$$\begin{aligned} dl^2 &= \dots(dx^1)^2 + \dots(dx^2)^2 + \dots dx^1 dx^2 + \dots dx^2 dx^1 = \\ &= g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{12} dx^1 dx^2 + g_{21} dx^2 dx^1 = \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij} dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j \end{aligned}$$



$$g_{ij} = g_{ij}(x^1, x^2)$$

22

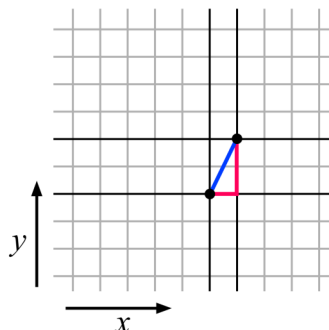
1. 2D sík; Descartes-koordinátákkal felírva:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

koordináták: "x¹" = x "x²" = y

metrikus tenzor: $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [a g_{ij}-k itt mind konstansok]

Gauss-görbület: $K \left(= \frac{1}{R_{\min} R_{\max}} = \frac{1}{\infty \cdot \infty} \right) = 0$ SÍK



23

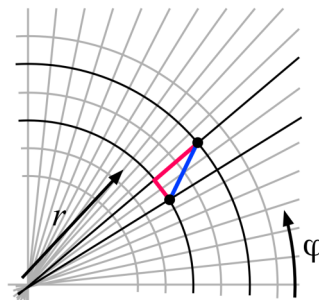
2. 2D sík; polárkoordinátákkal felírva:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

koordináták: "x¹" = r "x²" = φ

metrikus tenzor: $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$ [itt a g₂₂ függvény: g₂₂("x¹") = g₂₂(r) = r²]

Gauss-görbület: $K \left(= \frac{1}{R_{\min} R_{\max}} = \frac{1}{\infty \cdot \infty} \right) = 0$ SÍK



24

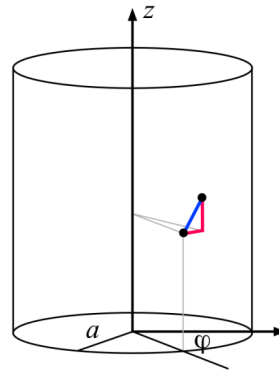
3. 2D hengerfelület; hengerkoordinátákkal felírva:

$$dl^2 = dz^2 + a^2 d\varphi^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

koordináták: " x^1 " = z " x^2 " = φ

metrikus tenzor: $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ [a g_{ij} -k mind konstansok]

Gauss-görbület: $K \left(= \frac{1}{R_{\min} R_{\max}} = \frac{1}{a \cdot \infty} \right) = 0$ SÍK!



25

4. 2D kúpfelület; "kúpkordinátákkal" felírva:

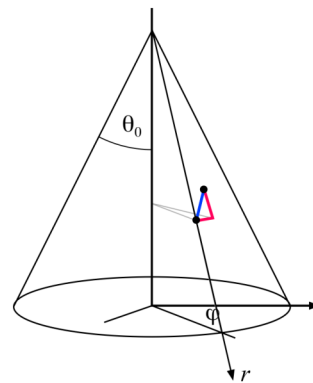
$$dl^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta_0 d\varphi^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

koordináták: " x^1 " = r " x^2 " = φ

metrikus tenzor: $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta_0 \end{pmatrix}$ [itt a g_{22} függvény: $g_{22}(r) = r^2 \sin^2 \theta_0$]

Gauss-görbület: $K \left(= \frac{1}{R_{\min} R_{\max}} = \frac{1}{(\dots) \cdot \infty} \right) = 0$ SÍK!*

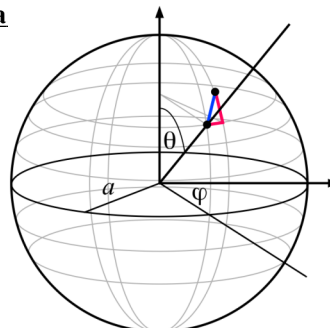
*kivéve a csúcstól, ahol K -nak szingularitása van.



26

5. 2D gömbfelület; gömbi koordinátákkal felírva

$$dl^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$



koordináták: " x^1 " = θ " x^2 " = φ

metrikus tenzor: $g_{ij} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$ [a g_{22} függvény: $g_{22}(\theta) = a^2 \sin^2 \theta$]

Gauss-görbület: $K \left(= \frac{1}{R_{\min} R_{\max}} = \frac{1}{a \cdot a} \right) = \frac{1}{a^2}$ **GÖRBÜLT!**

27

n-dimenziós sokaság (pl. 2D felület, 3D tér, 4D téridő, stb.) metrikája:

$$ds^2 = g_{11} (dx^1)^2 + g_{22} (dx^2)^2 + \dots + g_{12} dx^1 dx^2 + \dots =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j = g_{ij} dx^i dx^j$$

A metrikát (a fenti egyenletet) a sokaság "lakói" mérésekre alapozva fel tudják állítani:

1. A sokaságot bekoordinátázzák az x^1, x^2, \dots, x^n (tetszőlegesen) felvett koordinátákkal.
2. Két közeli pont között megméri a ds távolságot, és ugyanakkor regisztrálják a két pont közötti dx^i koordináta-különbségeket is.
3. A 2-es lépést megismétlik sok közeli pontpárra. Összességében rengeteg adatot összegyűjtenek.
4. Ezekből az adatokból megállapítják a $g_{ij} = g_{ij}(x^k)$ függvényeket (a metrikus tenzor elemeit).

De: hogyan tudják a "lakók" megállapítani, hogy sokaságuk görbült-e?

28

Gauss-görbület (2D felület egy adott pontbeli görbültségét kifejező szám):

$$K = \frac{1}{R_{\min} R_{\max}}$$

R_{\min} és R_{\max} : az adott ponton át a felületre fektetett merőleges síkokkal vett metszetgörbék (előjelesen értelmezett) görbületi sugarai közül a legkisebb és a legnagyobb.

K előnye: a felület *tényleges* görbültségét fejezi ki (nem módosul az értéke, ha a felületet deformációmentes alakváltozásnak tesszük ki) (pl. a feltekert újság: *sík*)

K hátránya:

- (1) nem alkalmazható 3D, 4D, stb. sokaságokra, csak 2D felületre!
- (2) a K fenti definiálásához külső (nem "lapolányi") nézőpont kell (R_{\min} és R_{\max} fogalmát a laposlányek nem értik)

29

Theorema Egregium (Gauss, 1828):

Recept a laposlányek számára, hogy hogyan *számolhatják ki* K-t az általuk is kimérhető $g_{ij} = g_{ij}(x^k)$ függvényekből.

$$\begin{aligned} K(x^1, x^2) = & \frac{1}{2g} \left[2 \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial x^1)^2} \right] + \\ & + \frac{g_{12}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right) - 2 \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) + \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) \right] - \\ & - \frac{g_{22}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) - \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right)^2 \right] - \\ & - \frac{g_{11}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) - \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

ahol $g \equiv \det g_{ij} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$

[csak 2D felületre alkalmazható!]

30