Emlékeztető: az n-dimenziós sokaság görbültségét kifejező mennyiség a Riemann-tenzor (Riemann, 1854):

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}$$

ahol a $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ ún. konnexiós koefficiensek (vagy Christoffel-szimbólumok) a metrikus tenzor $g_{\alpha\beta}\left(x^{\gamma}\right)$ komponenseiből kaphatók meg:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}\left[\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right]$$

ahol $g^{\alpha\sigma}$ a metrikus tenzor inverze.

A Riemann-tenzor tehát a metrikus tenzor első és második deriváltjait tartalmazza.

(Mint ahogy 2D-ben a K Gauss-görbület is a metrikus tenzor első és második deriváltjait tartalmazza.)

1

Néhány új mennyiség:

Ricci-tenzor:

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^{0}{}_{\alpha 0 \beta} + R^{1}{}_{\alpha 1 \beta} + R^{2}{}_{\alpha 2 \beta} + R^{3}{}_{\alpha 3 \beta} = R^{\gamma}{}_{\alpha\gamma\beta}$$

Ricci-skalár:

$$R \equiv g^{00} R_{00} + g^{01} R_{01} + \ldots + g^{33} R_{33} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$$

A Ricci-tenzorban és a Ricci-skalárban is a metrikus tenzor első és második deriváltjai szerepelnek (ha részletesen kiírjuk őket).

2

Az Einstein-egyenlet (az ált. rel. elm. alapegyenlete):

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \qquad \text{[E]}$$

$T_{\alpha\beta}$: Az energia-impulzus tenzor a téridő adott pontjában (az adott eseményben).
Pl. vákuumban: $T_{\alpha\beta} = 0$.

[E] jelentése: „A tömeg előírja a téridőnek, hogyan görbüljön." (John Wheeler)

Általában: $T_{\alpha\beta}$ adott, és a $g_{\alpha\beta}$ metrikus tenzor komponensei az ismeretlenek.

→ [E]: 10 másodrendű, nemlineáris, csatolt differenciálegyenlet $g_{\alpha\beta}$-ra.

Adott $T_{\alpha\beta}$ mellett (azaz adott téridő-geometria mellett) is *végtelen sok* megoldás van $g_{\alpha\beta}$-ra. Ezek koordináta-transzformációval egymásba átszámolhatók.

[Pl. ugyanazt a téridőt írja le a Schwarzschild-metrika és a Painlevé-Gullstrand-metrika, csak más koordinátarendszert használva.]

Fordított probléma: „Tervezői téridő" (Designer Spacetime). $g_{\alpha\beta}$ adott, és $T_{\alpha\beta}$ az ismeretlen. [Sokkal könnyebb matematikai feladat.]

3

A geodetikus egyenlet (szabad kő világvonala):

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \qquad \text{[G]}$$

[G] jelentése: „A téridő írja elő a tömegnek, hogyan mozogjon." (John Wheeler)

Adott $g_{\alpha\beta}$ esetén [G]-ből meghatározható, milyen $x^\alpha(\tau)$ világvonalat követ egy szabadon mozgó kő. ([G]-ből voltaképpen az határozható meg, hogy az adott $g_{\alpha\beta}$ metrikájú térképen milyen alakúak az egyenes - geodetikus - vonalak.)

→ [G]: 4 másodrendű, nemlineáris, csatolt differenciálegyenlet $x^\alpha(\tau)$-ra.

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}\left[\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right]$$

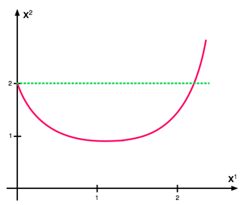
4

Megjegyzések az Einstein-egyenlet és a geodetikus egyenlet kapcsán:

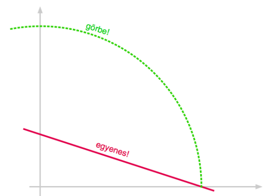
(1) A [G] (azaz hogy a szabad kő geodetikuson - egyenesen - mozog) nem független az [E]-től, hanem levezethető belőle.

(2) Ha $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \neq 0$, akkor $\dfrac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} \neq 0$, tehát $\dfrac{dx^\alpha}{d\tau} \neq konst$. Jelenti-e ez azt, hogy a téridő görbült?

NEM! A görbület ($R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$) lehet zérus akkor is, ha $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \neq 0$.



← lehet pl. egy torzított térkép, amely egy *síkot* ábrázol



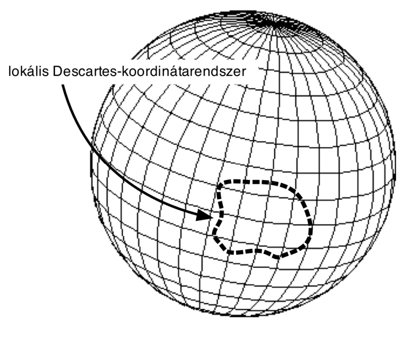
$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}$$

5

Megjegyzések az Einstein-egyenlet és a geodetikus egyenlet kapcsán:

(3) *Lokálisan* minden sokaságon felvehetők Descartes-koordináták (nagyon közelről nézve minden kicsi felületdarab „síknak látszik"). Ilyen koordináta-rendszerben $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = 0$, tehát [G] alapján $dx^\alpha / d\tau = konst$.
Következik-e ebből, hogy sík a téridő?

NEM! A görbület ($R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$) lehet nemnulla akkor is, ha $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = 0$.



$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}$$

6

Megjegyzések az Einstein-egyenlet és a geodetikus egyenlet kapcsán:

(4) *Vákuumban* (pl. a Nap körül, egy fekete lyuk körül) $T_{\alpha\beta} = 0$. Jelenti-e ez azt ([E] alapján), hogy vákuumban a téridő sík? NEM!

(a) Az [E]-ből nem következik, hogy $T_{\alpha\beta} = 0$ esetén muszáj, hogy $R_{\alpha\beta} = 0$ legyen.

(b) Még ha $R_{\alpha\beta} = 0$ is, akkor is lehet a téridő görbült, mert a görbületet végső soron az $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ Riemann-tenzor írja le.

Fő konklúziók:
A téridő görbültségéről a Riemann-tenzor ad számot. *A Riemann-tenzor sem az [E]-ben, sem a [G]-ben nem jelenik meg explicit módon.*

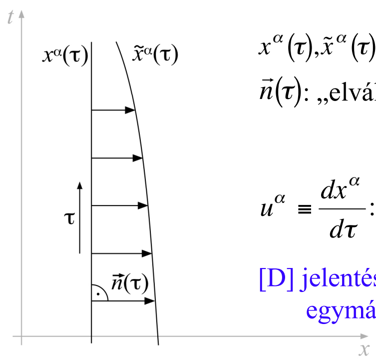
Tehát tartsuk észben, hogy:
(a) A téridő vákuumban is lehet görbült, ez nem mond ellent [E]-nek.
(b) A [G] arról szól, hogy „néz ki“ egy geodetikus egy adott koordinátarendszerbeli „térképen“. De ez közvetlenül nem ad információt a görbületről.

7

Milyen egyenlet ad számot közvetlen módon a görbületről? [Milyen egyenletben szerepel explicit módon a Riemann-tenzor?]

A geodetikus deviáció egyenlete:

$$\left(\frac{d^2\vec{n}}{d\tau^2}\right)^{\alpha} = -R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\, n^{\gamma} u^{\beta} u^{\delta} \qquad [D]$$



$x^{\alpha}(\tau), \tilde{x}^{\alpha}(\tau)$: egymáshoz közeli geodetikusok

$\vec{n}(\tau)$: „elválasztás-négyesvektor“

$$n^{\alpha}(\tau) \equiv \tilde{x}^{\alpha}(\tau) - x^{\alpha}(\tau)$$

$u^{\alpha} \equiv \dfrac{dx^{\alpha}}{d\tau}$: négyessebesség

[D] jelentése: *Két geodetikus* milyen ütemben közeledik egymáshoz (vagy távolodik egymástól)

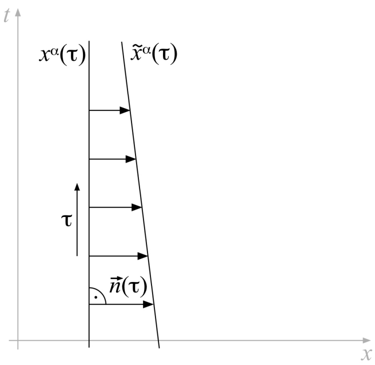
8

A geodetikus deviáció egyenlete:

$$\left(\frac{d^2\vec{n}}{d\tau^2}\right)^{\alpha} = -R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\, n^{\gamma} u^{\beta} u^{\delta} \qquad \text{[D]}$$

1. példa: *sík* téridő

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2\vec{n}}{d\tau^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{n}}{d\tau} = konst.$$

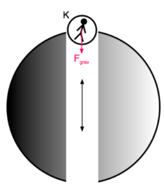


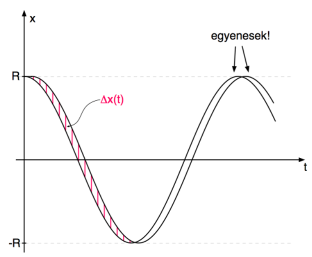
A geodetikus deviáció egyenlete:

$$\left(\frac{d^2\vec{n}}{d\tau^2}\right)^{\alpha} = -R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\, n^{\gamma} u^{\beta} u^{\delta} \qquad \text{[D]}$$

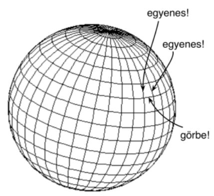
2. példa: *görbült* téridő

$$\frac{d\vec{n}}{d\tau} \neq konst. \Leftrightarrow \frac{d^2\vec{n}}{d\tau^2} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} \neq 0$$





görbült 2D felület:



10