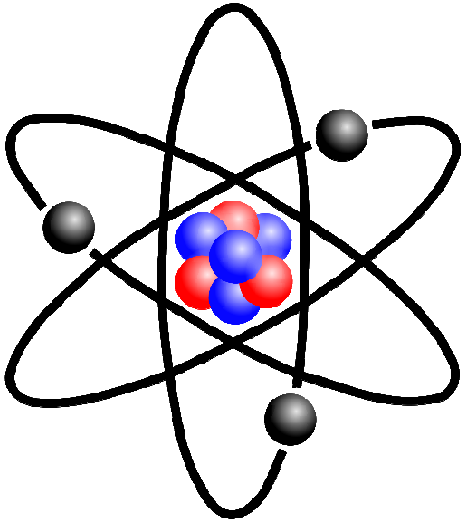
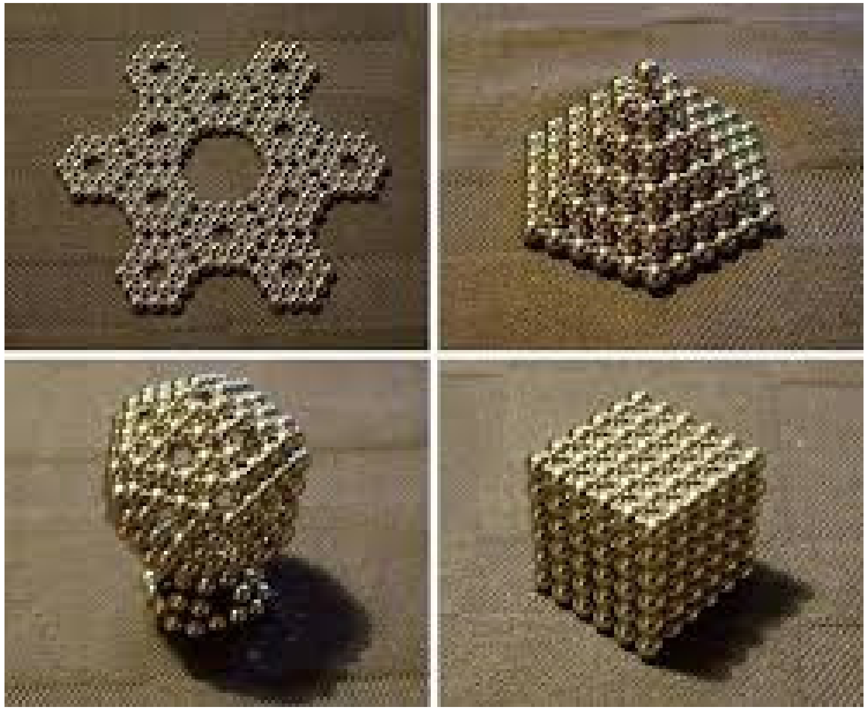


Fizika 112

2. és 3. Előadás



Az anyagi pont dinamikája

Kinematika: a mozgás leírása a kezdeti feltételek (kezdőpont és kezdősebesség) és a gyorsulás ismeretében, de vajon mi az oka a mozgásnak??

Megfigyelés ↔ kísérlet???

Dinamika: a mozgás meghatározása a testeket érő hatások (erők) és a test bizonyos tulajdonságainak ismeretében

Arisztotelész – Galilei – Newton I.

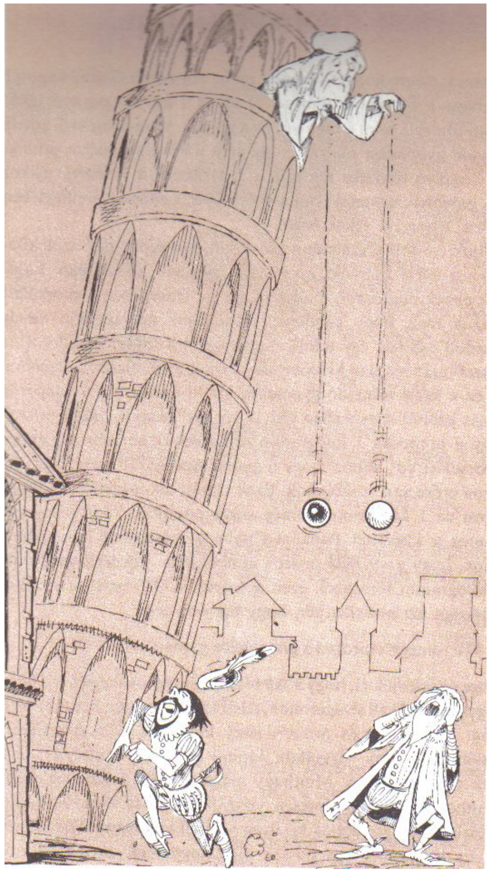
Arisztotelész
i. e. 384 – i. e. 322

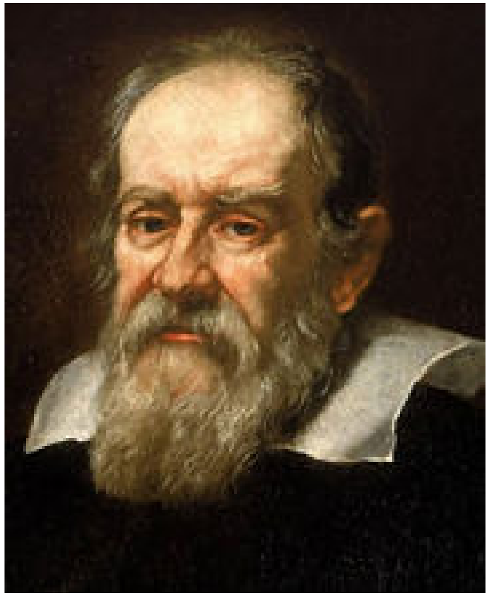
A mozgáshoz mozgató kell („minden mozgót mozgat valami”)
a bolygókhoz „első mozgató”

A nehezebb testek gyorsabban, a könnyebbek lassabban esnek, egyenes arányosságban a tömeggel.

Hold alatti világ – 4 őselem
a Hold szféráján túl – quinta essentia, minden változatlan

Arisztotelész – Galilei – Newton II.





Galileo Galilei
(1564 – 1642)

Nincs szükség mozgatóra
(nem a mozgásnak van oka, hanem a mozgás megváltozásának)

A testek egyformán esnek

Csak egy fizika van
földi fizika = égi fizika

Az egyenes vonalú egyenletes mozgás megkülönböztethetetlen a nyugalomtól
(Galiei-féle relativitási elv)

Arisztotelész – Galilei – Newton III.

Galilei gondolatait matematikai formába öltöztette

Axiomatikus alapokra helyezte a fizikát

A gravitációs törvényével számíthatóvá tette az „égi” fizikát

Nem a mozgás fenntartásához, hanem a mozgásállapot megváltoztatásához van szükség külső hatásra

Sir Isaac Newton
(1642. – 1727.)

”Én távolabbra láthattam, de csak azért, mert óriások vállán álltam.”

Newton axiómák

1. axióma: A tehetetlenség törvénye $\vec{F}_e = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$

Az inerciarendszerhez képest egyenes vonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszer szintén inerciarendszer

Tehetetlenség: a testeknek az 1. axiómával kimondott tulajdonsága

mértéke: tömeg (tehetetlen tömeg) m [kg]

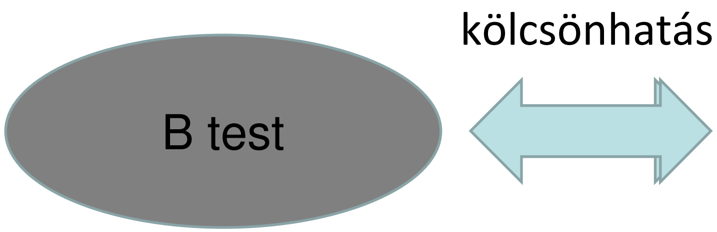
2. axióma:

$$\boxed{\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}} \xrightarrow{m = const.} \vec{F} = m\vec{a}$$

Az erő mértékegysége: kgm/s^2=N (Newton)

Newton axiómák II.

3. axióma: A kölcsönhatás törvénye



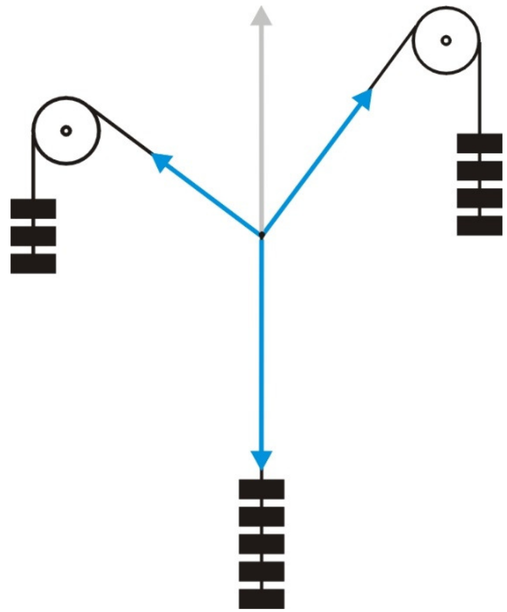
$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

Az erők párosával lépnek fel, de különböző testekre hatnak!!!

4. axióma: A szuperpozíció elve

Az erők egymás hatását nem zavarva,
Vektorokként adódnak össze.

$$\vec{F}_e = \Sigma\vec{F} = m\Sigma\vec{a}$$



Egyensúly: $F_e = 0$

A dinamika alapegyenlete

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$

A mozgások kísérleti vizsgálata alapján erőtörvények felállítása

A testre ható erők ismeretében a test mozgásának meghatározása

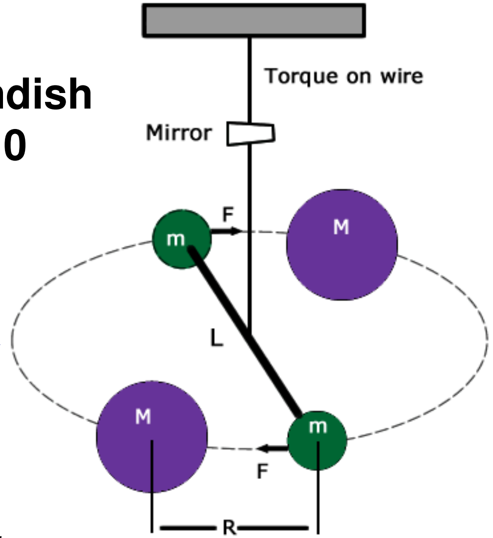
$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}(t)$$

Gravitációs erő

Fontosabb erőtörvények I.

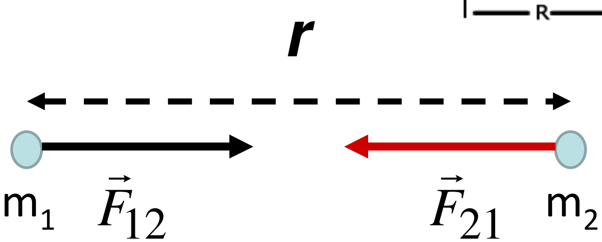
Bármely két pontszerű, m_1 és m_2 tömegű. egymástól r távolságban lévő test kölcsönösen vonzza egymást olyan erővel, amelynek nagysága a testek tömegének szorzatával egyenesen és a távolságuk négyzetével fordítottan arányos.

H. Cavendish 1731-1810



Cavendish kísérlet:
$\gamma = 6{,}67*10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

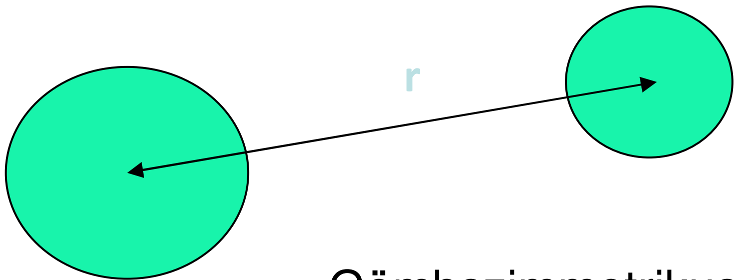
$$\boxed{F = \gamma \frac{m_1 . m_2}{r^2}}$$



- minden testre hat
- leggyengébb kölcsönhatás
- bolygók mozgása alapján született törvény

$$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 . m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

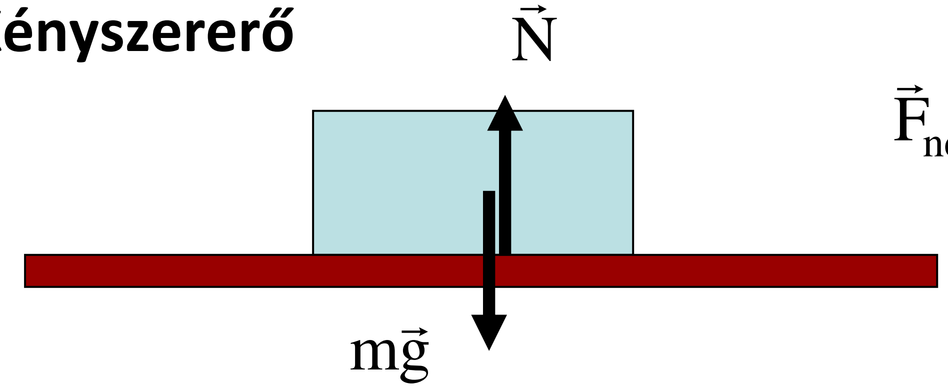
(súlyos és tehetetlen tömeg)



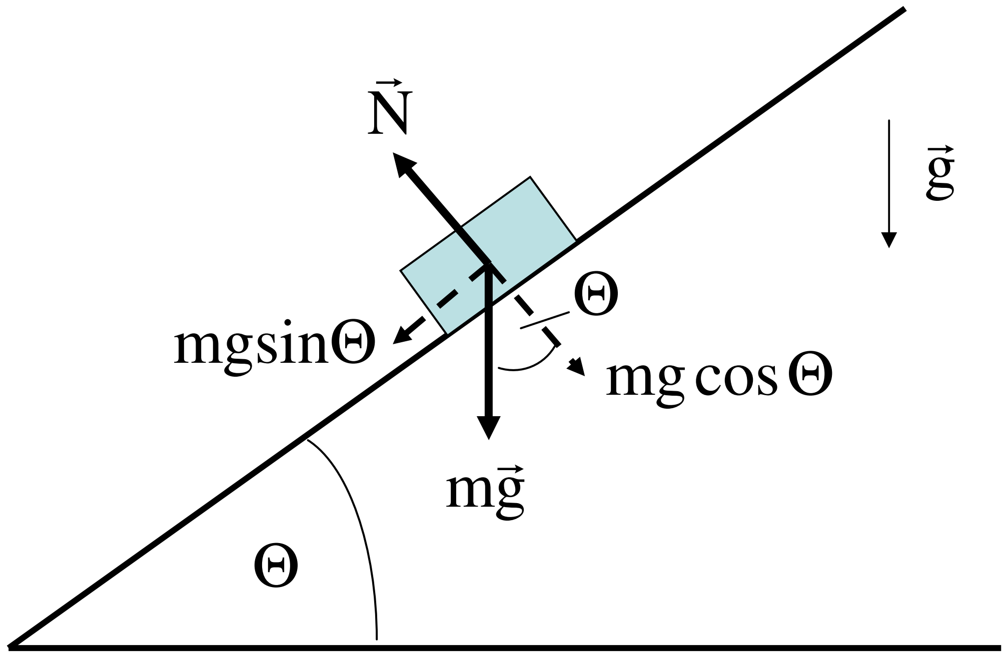
Gömbszimmetrikus tömegeloszlás

Fontosabb erőtörvények II.

Kényszererő



$$\vec F_{net} = m\vec g + \vec N = 0 \Rightarrow N = mg$$



$$N = mg\cos\Theta$$

$$\left|\vec N + m\vec g\right| = mg\cdot\sin\Theta$$

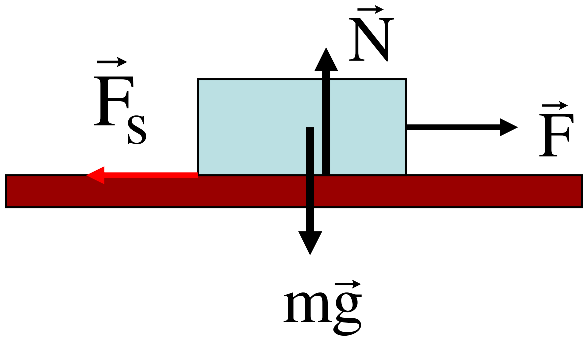
$$F_{net} = mg\sin\Theta$$

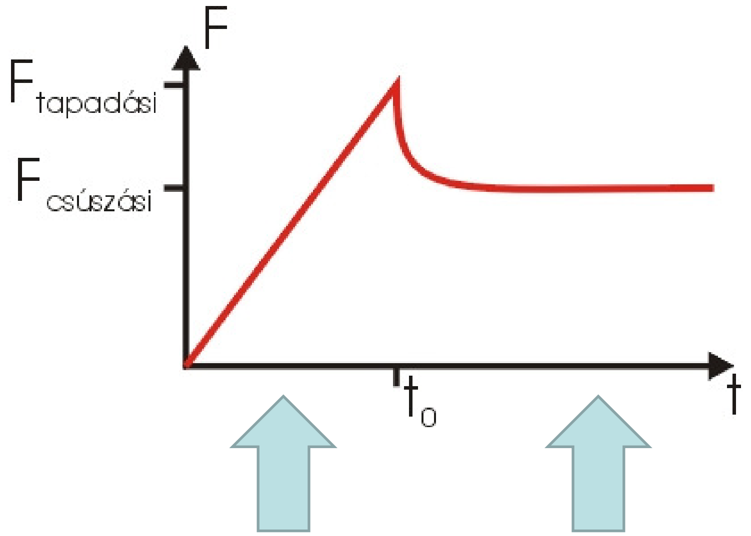
$$F_{net} = ma$$

$$a = g\sin\Theta$$

Fontosabb erőtörvények III.

Súrlódási erő





a test áll

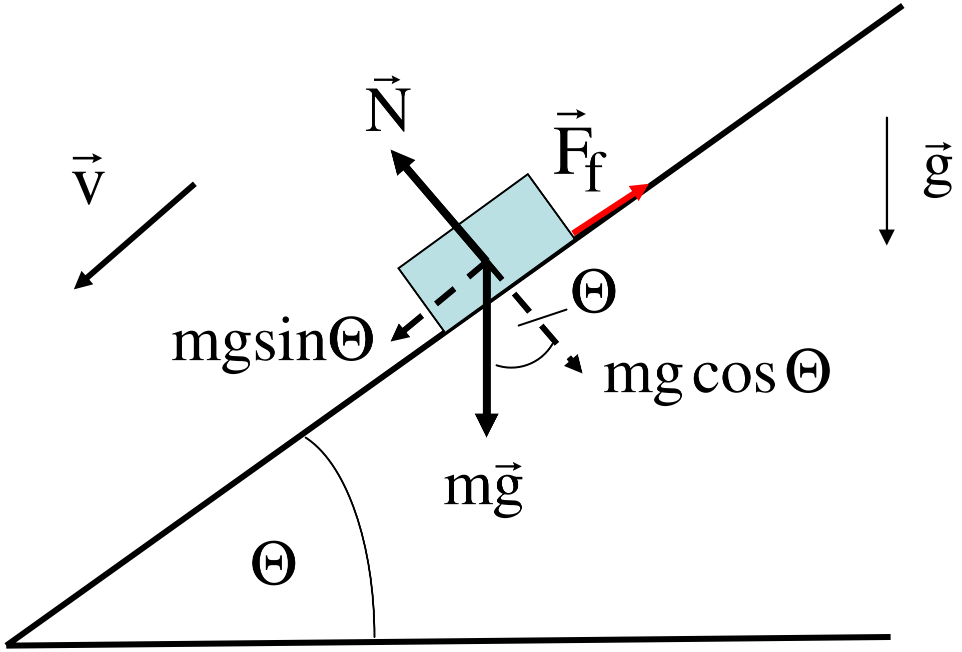
a test mozog

tapadási súrlódási erő:

$$F_{tap}=\mu_{tap}N$$

csúszási súrlódási erő:

$$F_s=\mu_s N$$



$$N = mg\cos\Theta$$

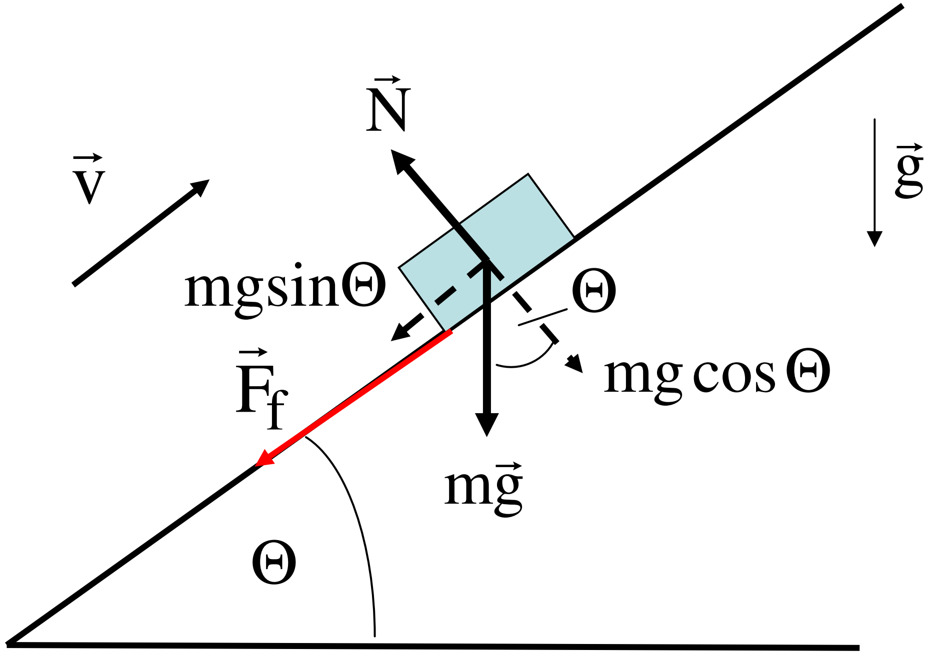
$$F_f = \mu N = \mu mg\cos\Theta$$

$$F_{net} = mg\sin\Theta - \mu mg\cos\Theta$$

$$F_{net} = ma$$

$$ma = mg\sin\Theta - \mu mg\cos\Theta$$

$$a = g(\sin\Theta - \mu\cos\Theta)$$



$$N = mg\cos\Theta$$

$$F_f = \mu N = \mu mg\cos\Theta$$

$$F_{net} = mg\sin\Theta + \mu mg\cos\Theta$$

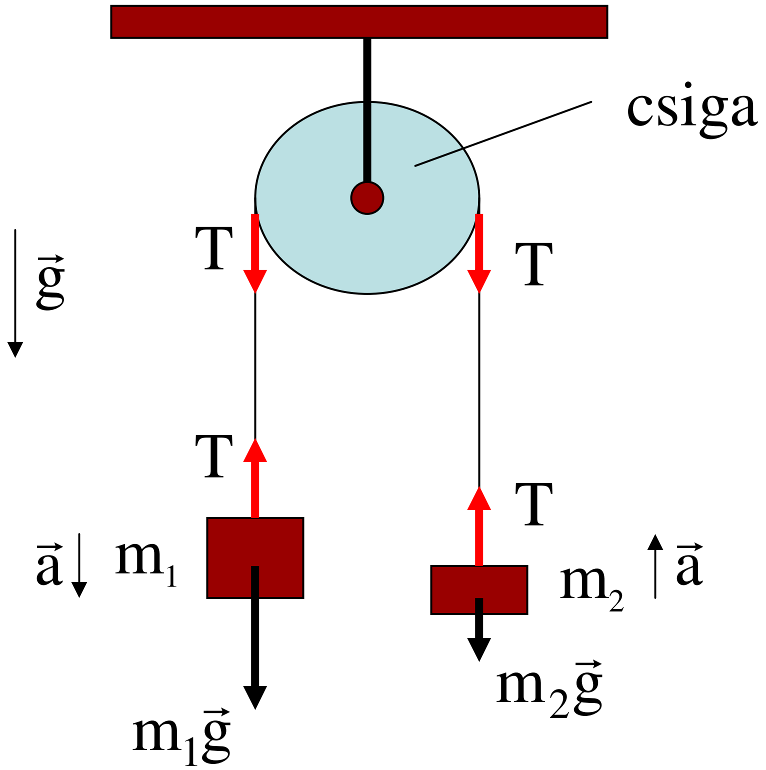
$$F_{net} = ma$$

$$ma = mg\sin\Theta + \mu mg\cos\Theta$$

$$!!\ a = -g(\sin\Theta + \mu\cos\Theta)\ !!$$

Fontosabb erőtörvények IV.

Kötélerő (a fonálban)



m_1g , m_2g : gravitációs erők

K : kötélerő

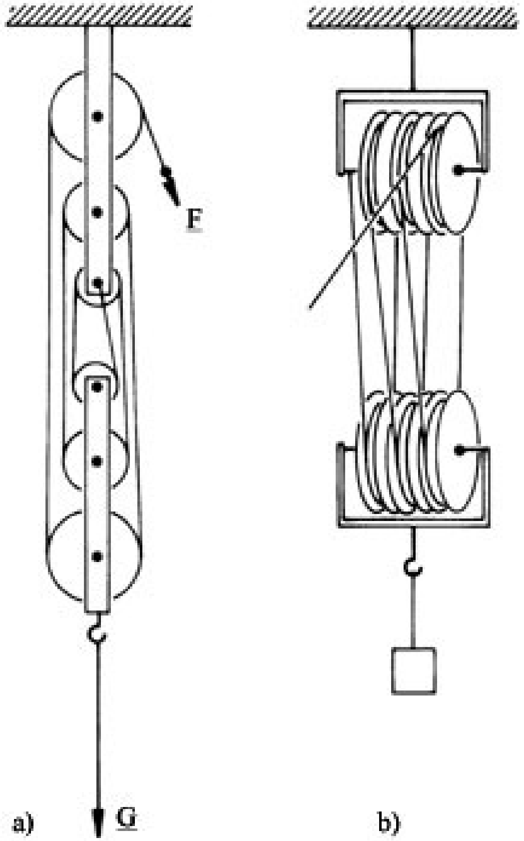
$K = ?$ $\qquad a = ?$

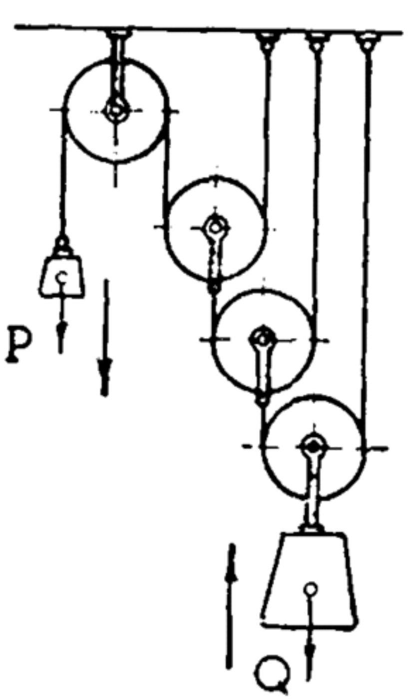
I. $\quad m_1 g - K = m_1 a$

II. $\quad K - m_2 g = m_2 a$

$$a = \frac{m_1 g - m_2 g}{m_1 + m_2} \qquad K = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

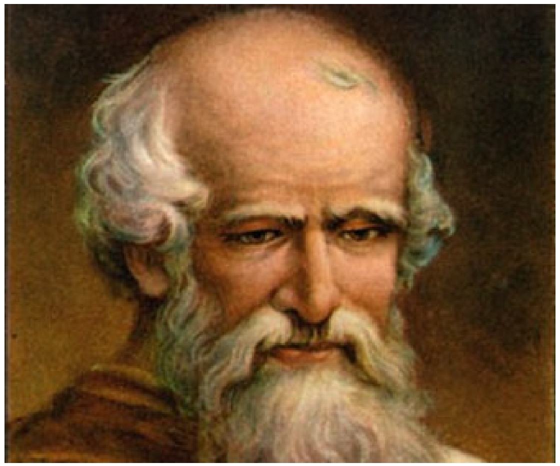
Csigasor

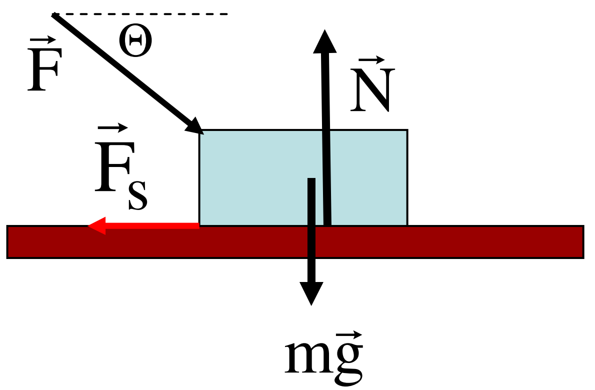




Archimedesi csigasor.
(P: a hajtóerő, Q: a nyíl irányában felemelt teher.)

Arkhimédész
Kr. e. 287 – 212.

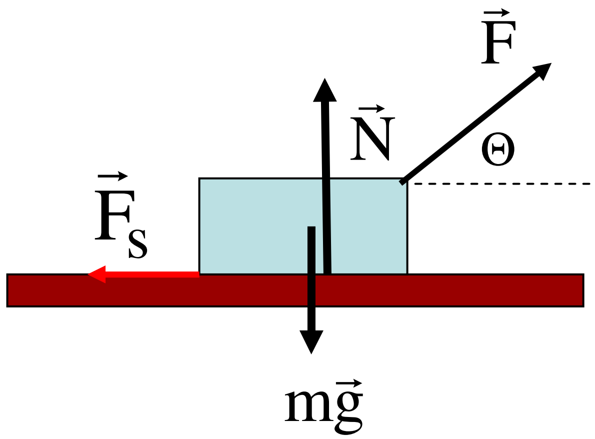




$$v = const. \rightarrow a = 0 \qquad N = mg + F\sin\Theta$$

$$F\cos\Theta = F_s = \mu(mg + F\sin\Theta)$$

$$F\cos\Theta = \frac{\mu mg}{\cos\Theta - \mu\sin\Theta}$$



$$v = const. \rightarrow a = 0 \qquad N = mg - F^*\sin\Theta$$

$$F^*\cos\Theta = F_s = \mu(mg - F^*\sin\Theta)$$

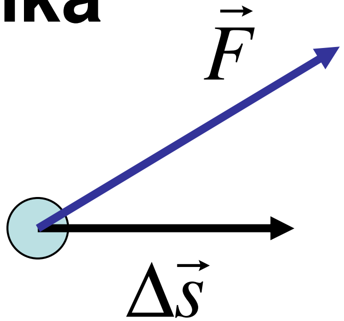
$$F^*\cos\Theta = \frac{\mu mg}{\cos\Theta + \mu\sin\Theta}$$

$\boxed{F > F^* \text{ !!!}}$

?

5% megtakarítás !!!

Munka



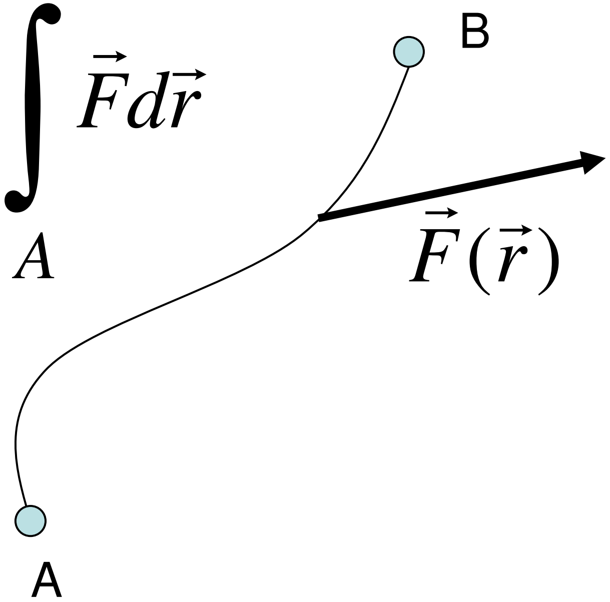
$$\vec{F} = const.$$

$$\Delta W = \vec{F}\Delta\vec{s} = F\Delta s\cos\alpha$$

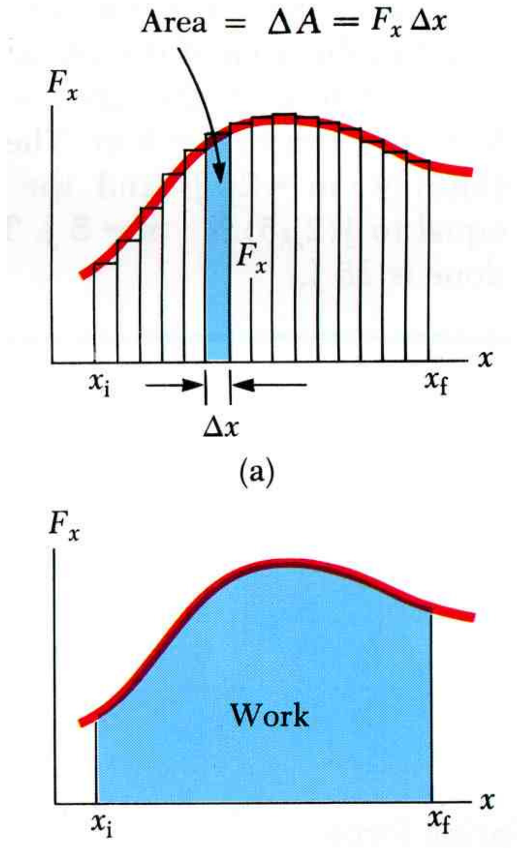
SI mértékegysége: Joule (Nm)

Ha $\vec{F} \neq const.$

$$W = \int_A^B \vec{F}d\vec{r}$$



1D.



(b)

Munkatétel

$$W = \int_1^2 \vec{F} d\vec{s}$$

$$W = \int_1^2 m\vec{a} d\vec{s} = m\int_1^2 \frac{d\vec{v}}{dt}(\vec{v}dt) = m\int_1^2 \vec{v}d\vec{v} = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Mozgási energia: $\frac{1}{2}mv^2$

Munkatétel: $W = \Delta E_k$

Átlagteljesítmény: $P = \frac{W}{t}$

SI egysége:
Watt (J/s)

Pillanatnyi teljesítmény: $P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$

Fogyasztás???

Mértékegységek

Energia: SI mértékegysége: Joule (Nm)

Országok energiafelhasználása:
Bruttó tonna kőolaj egyenérték
v. 1000 tonna olaj egyenérték

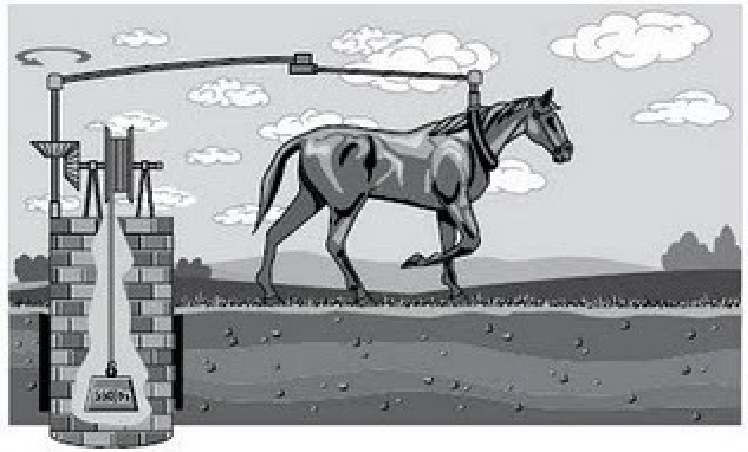
tonne of oil equivalent (toe)

(hordó olajegyenérték = 0.146 toe)

1 toe = 41.868 GJ

Teljesítmény: SI egysége: Watt (J/s)

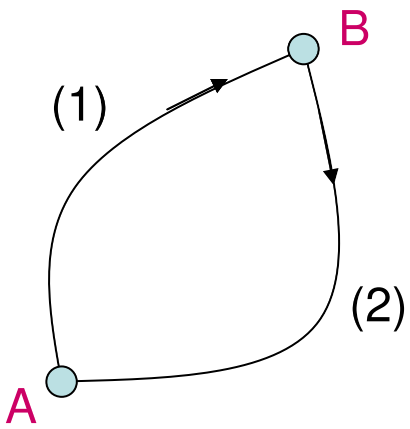
Motorok teljesítménye:
Lóerő (LE): 1 LE = 735.49 W



Konzervatív erők

- Ha az F erő munkája *W, akkor –W az F erő ellenében* végzett munka.
- Ha a tömegpontra több erő hat, az eredő erő munkája egyenlő az egyes erők munkáinak algebrai összegével.
- A végzett munka általában függ a pályától.

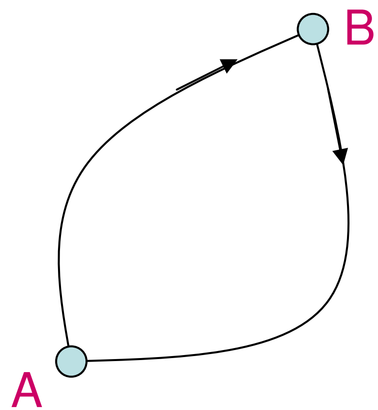
Konzervatív erők:
Olyan erők, melyeknek az anyagi ponton végzett munkája független a kezdő és végpontot összekötő pályától, csak a kezdő és végpont helyétől függ.



$$W_1 = W_2$$

vagy
Olyan erők, melyeknek bármely zárt görbe mentén végzett munkájuk zérus.

$$\oint \vec{F} d\vec{s} = 0$$



A gravitációs erő munkája

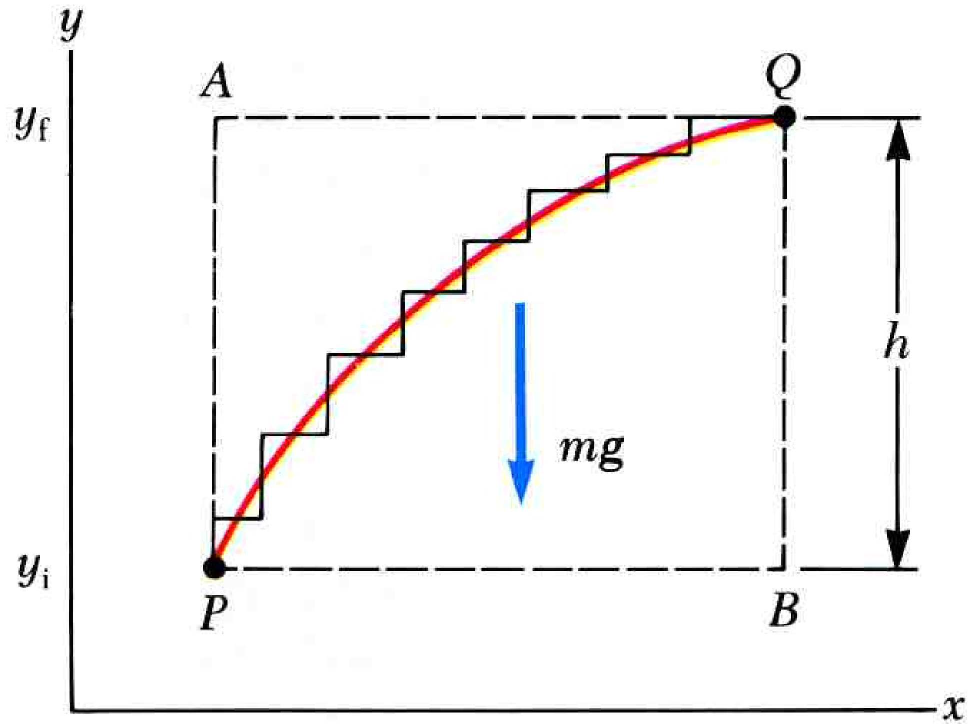
$$F_{gr} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$W_{gr} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{s} = \int_1^2 G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = Gm_1 m_2 \int_1^2 \frac{1}{r^2}dr = Gm_1 m_2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

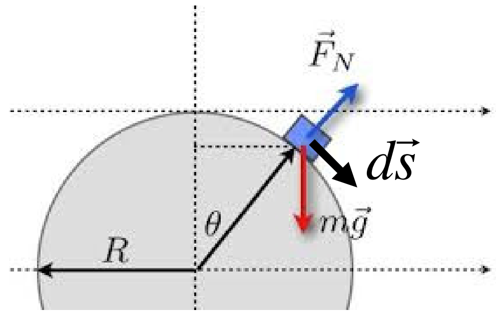
A Föld felszíne közelében:

$$W = mgh$$

A nehézségi erő konzervatív erő.



Kényszererők munkája



- A kényszererő merőleges a felületre.
- *Ha a kényszert jelentő **felület nyugalomban** van az adott vonatkoztatási rendszerben:*

  ekkor a kényszererő merőleges a sebességre, a

  kényszererő munkája zérus. (pl. rögzített lejtőn lecsúszó

  anyagi pont, fonálhoz erősített, körpályán mozgó test)
- *Ha a kényszert jelentő **felület mozog** az adott*

  vonatkoztatási rendszerben:

  a test sebessége általában nem esik a felület érintőjének

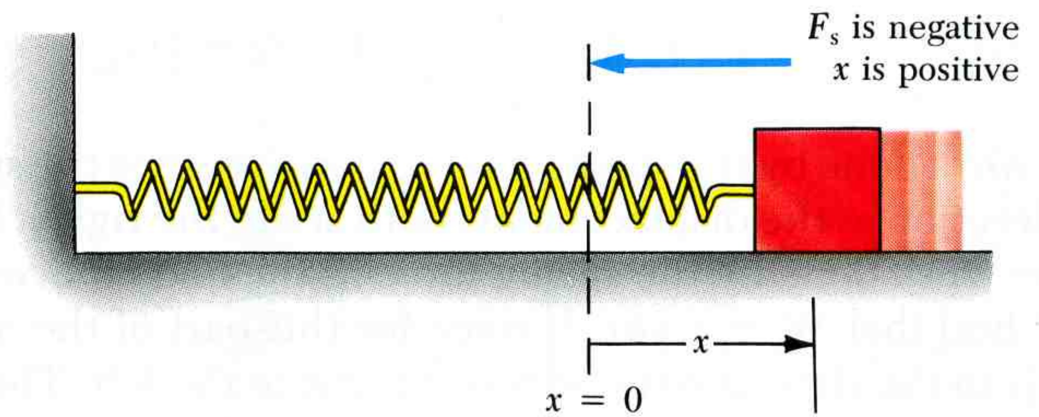
  irányába, ezért a kényszererő általában nem merőleges a sebességre, és így a ***kényszererő munkája nem zérus***.

Rugóerő munkája

$$F_r = F(x) = -Dx$$

A rugóerő munkája, ha a kitérés *x_1–ről x_2-re változik:*

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = -\int_{x_1}^{x_2} Dx dx = -\left(\frac{1}{2}Dx_2^2 - \frac{1}{2}Dx_1^2\right)$$



A rugóerő konzervatív erő.

Súrlódási erő munkája

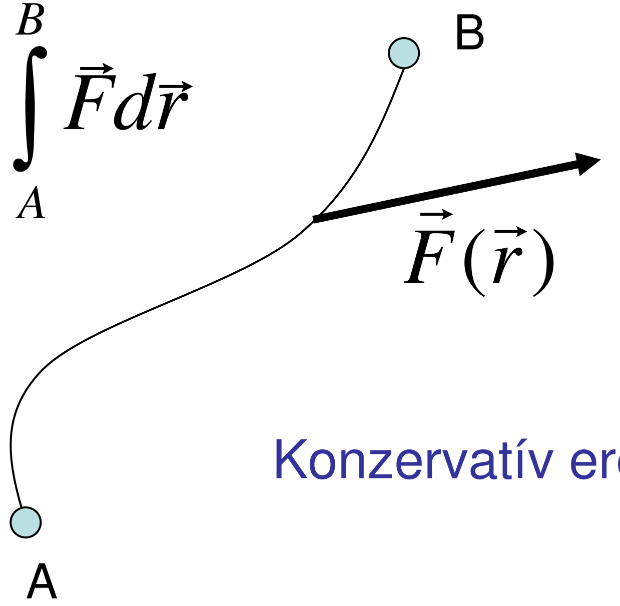
$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_s d\vec{r} = -\int_{s_1}^{s_2} F_s ds = -F_s \int_{s_1}^{s_2} ds = -F_s s_{12}$$

Függ az úttól!!!

Az F_s nem konzervatív erő!!!

Potenciális energia

Láttuk: $$W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r}$$



Konzervatív erő!!!

A potenciális energia megváltozása: $$\Delta U = -W$$

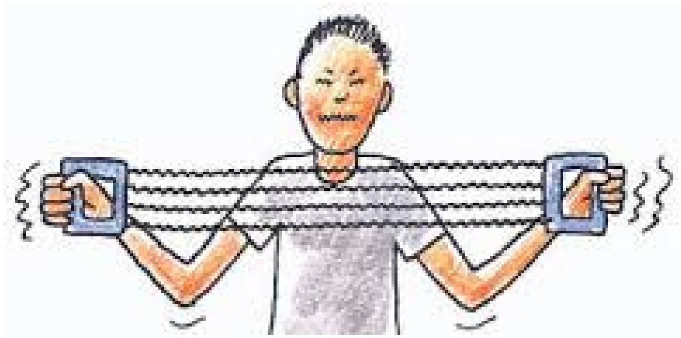
$$\boxed{\Delta U = U_B - U_A = -\int_A^B \vec{F} d\vec{r}}$$

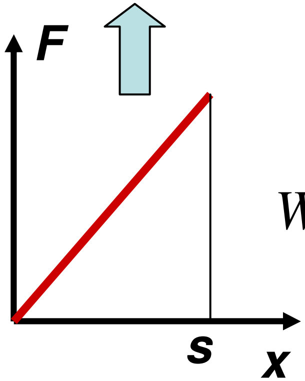
$$\left(U = E_h = E_{pot.}\right)$$

A rugóban tárolt potenciális energia

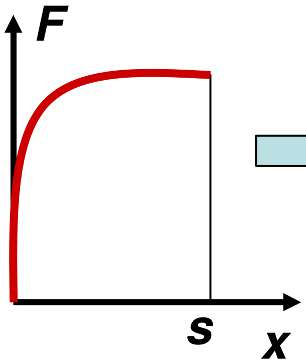
Láttuk: $$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = -\int_{x_1}^{x_2} Dx dx = -\left(\frac{1}{2}Dx_2^2 - \frac{1}{2}Dx_1^2\right)$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}Dx^2}$$





$$W_\ell = \frac{1}{2}Ds^2 < W_r$$



"A magyarok nyilaitól ments meg Urunk minket"

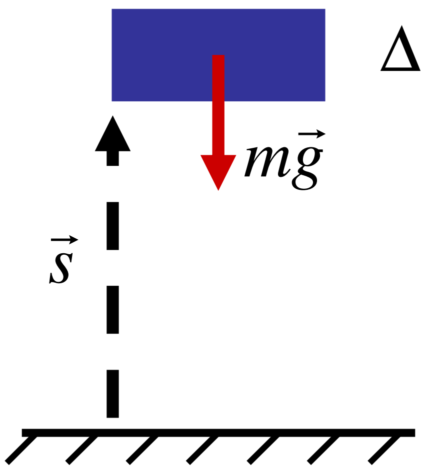
Tömegpont gravitációs potenciális energiája

Láttuk: $W_{gr} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{s} = \int_1^2 G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = G m_1 m_2 \int_1^2 \frac{1}{r^2} dr = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$

$$\boxed{U(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}}$$

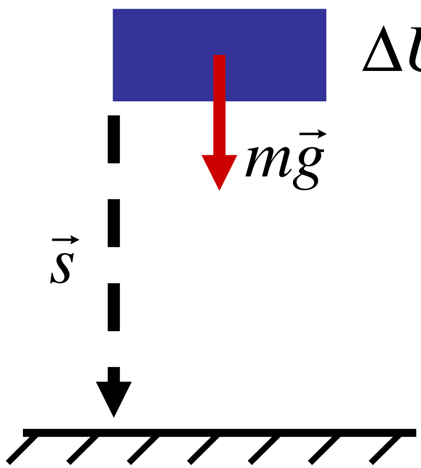
Ha $F_{gr} = mg$ (A Földfelszín közelében)

Láttuk: $W_{gr} = mgh \longrightarrow \boxed{U = mgh}$



$\Delta U = mgh$

$|\vec{s}| = h$



$\Delta U = -mgh$

Az energia megmaradása:

Láttuk: munkatétel: $\underbrace{W = \Delta E_k \quad \text{és} \quad \Delta U = -W}$

$$-\Delta U = \Delta E_k$$

$$\Downarrow$$

Csak konzervatív erők hatnak!

$$-U_2 + U_1 = E_{k_2} - E_{k_1}$$

$$\Downarrow$$

Az energia megmaradása: $\boxed{\underbrace{E_{k_1} + U_1}_{E_1} = \underbrace{E_{k_2} + U_2}_{E_2}}$

Ha disszipatív erők is fellépnek: $W = -\Delta U + W_{nemk.}$

$$\boxed{E_{k_1} + U_1 + W_{nemk.} = E_{k_2} + U_2}$$

Egy egyszerű példa:

Legalább mekkora sebességgel kell az űrhajót a Földről elindítani ahhoz, hogy az kijusson a világűrbe (és ne essen vissza)?

M: a Föld tömege

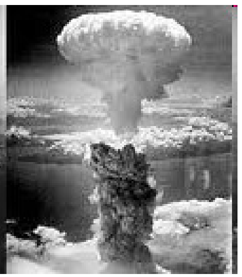
R: a Föld sugara

m: rakéta tömege

$$U_1 = U(r = R) = -G\frac{Mm}{R} \qquad U_2 = U(r >> R) \approx 0$$

$$E_{k_1} + U_1 = E_{k_2} + U_2 \qquad \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{R} = 0$$

$$v = \sqrt{2G\frac{M}{R}} = \sqrt{2G\frac{M}{R^2}R} = \sqrt{2gR} \approx 11200\,\mathrm{m/s}$$



Robbanás energiája: 60 TJ

térf. ≈ 1 km^3 → m ≈ 2*10^{12} kg → 10^{20} J

?

?

Kapcsolat a konzervatív erők és a potenciális energia között I.

$$\oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0 \qquad\qquad W = \int_{A}^{B} \vec{F}\, d\vec{r} = U_A - U_B = -\Delta U$$

A fenti összefüggések ún. integrális relációk, amelyek egy kiterjedt tértartományra állítanak valamit a konzervatív erőtereket illetően. Vizsgáljuk meg, hogy lokálisan, a tér egy adott pontjában milyen összefüggés áll fenn a potenciális energia és az erő között! Minthogy az erő integrálásával kapjuk meg a potenciális energiát, ezért sejthető, hogy a fenti reláció megfordításaként a potenciális energia valamilyen differenciálhányadosaként állíthatjuk majd elő az erőt.

Tekintsük a tér egy tetszőleges $P = (x,y,z)$ pontjának környezetében a potenciális energia függvény egy tetszőleges $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ elmozduláshoz tartozó megváltozását. A többváltozós függvények differenciálszámítása szerint fennáll:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

Másfelől azonban a potenciális energia megváltozását az erőtér ellenében a tömegpontra kifejtett $-\vec{F} = -(F_x, F_y, F_z)$ erő $d\vec{r}$ elmozdulás során végzett munkájával is felírhatjuk, nevezetesen:

$$dU = -\vec{F} d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

Kapcsolat a konzervatív erők és a potenciális energia között II.

$$dE_{\text{pot}} = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \quad \textbf{és} \quad dU = -\vec{F}d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

alapján, a megfelelő elmozdulás-komponensek összevetéséből azt kapjuk, hogy a konzervatív erő egyes komponensei a potenciális energia megfelelő koordináták szerinti negatív parciális deriváltjaival egyeznek meg:

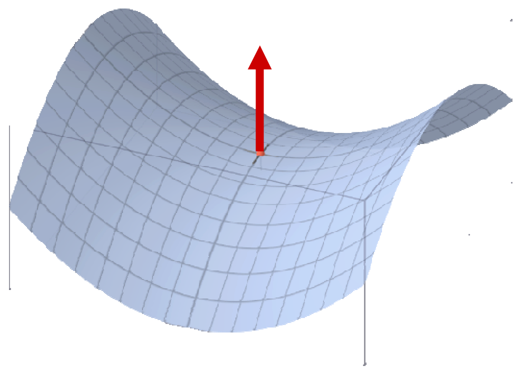
$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad \Rightarrow$$

Az U "nullszintje" tetszőlegesen választható!!!

MATEMATIKA: **A gradiens differenciál-operátor bevezetésével:**

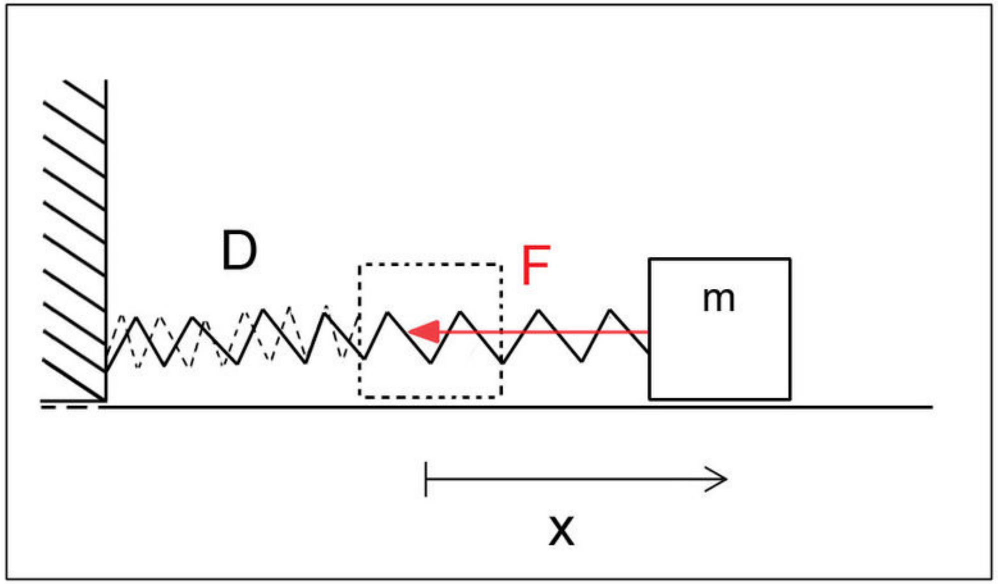
$$\text{grad} = \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \textbf{pl.} \quad \text{grad}\, U = \nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

$$\boxed{\vec{F} = -\,\text{grad}\, U} \quad \textbf{vagy} \quad \left(\vec{F} = -\nabla U\right)$$



Azaz, konzervatív erőtérben az erő a potenciális energia negatív gradienseként állítható elő.

Rezgőmozgás



F: rugóerő

$$F_r = -kx$$

$$F_e = F_r$$

Newton 2. törv.: $F_e = ma$

$$ma = -kx \longrightarrow a = -\frac{k}{m}x \longrightarrow \boxed{\ddot{x} = -\frac{k}{m}x}$$

mozgásegyenlet

Megoldása: $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$

Harmonikus rezgőmozgás:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

A : amplitúdó

ω : körfrekvencia

φ : kezdőfázis

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

A rezgőmozgást végző test sebessége: $v(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$

Maximális sebesség: $v_{\max} = A\omega$

A rezgőmozgást végző test gyorsulása: $a(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$

Maximális gyorsulás: $a_{\max} = A\omega^2$

Kezdeti feltételek: x(t=0) = x_o és v(t=0) = v_o $\Rightarrow$ A = … és φ = …

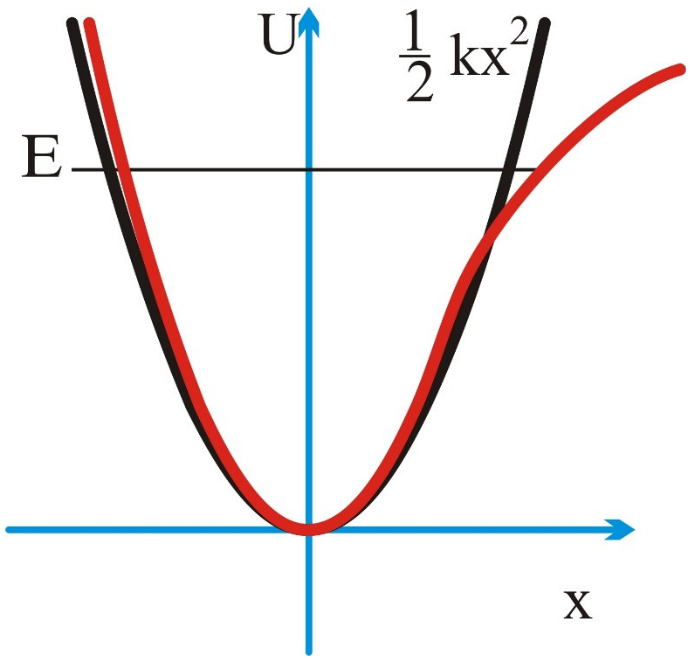
A rezgő test energiája:

$$E = E_k + E_{pot}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m(A\omega)^2\cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi) =$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$



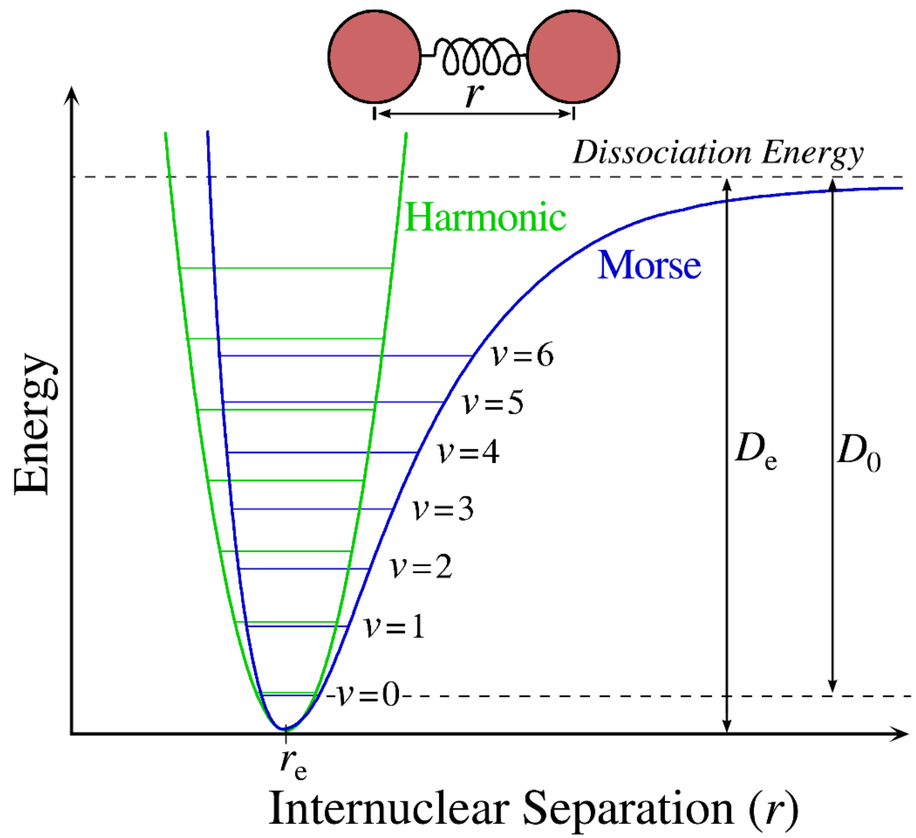
A rezgő test potenciális energiája:

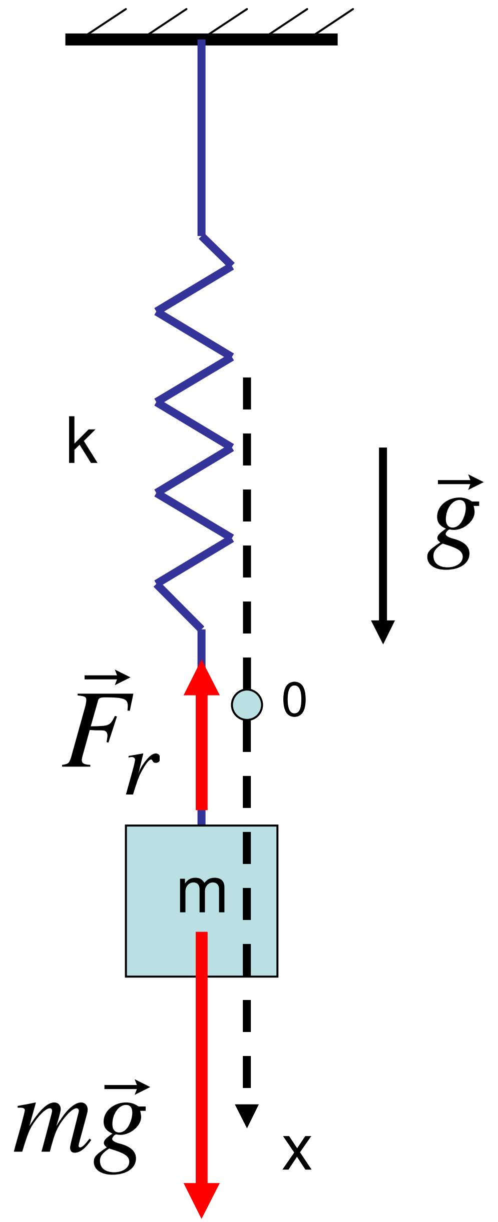
(A rugóban tárolt energiája)

$$U'(x) = bx^2 + \ldots$$

Kis kitérésű rezgések

harmonikus rezgőmozgás





$$\vec{F}_e = m\vec{g} + \vec{F}_r$$

Mozgásegyenlet:

$$ma = -kx + mg$$

Megoldás:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + \frac{mg}{k}$$

Forgatónyomaték

Egy anyagi pontra ható erőnek az origóravonatkozó forgatónyomatéka az anyagi pont $\mathbf{r}(t)$ *helyvektorának és az* $\mathbf{F}(t)$ *erőnek a vektoriális szorzata:*

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Mértékegység: Nm

A forgatónyomaték nagysága:

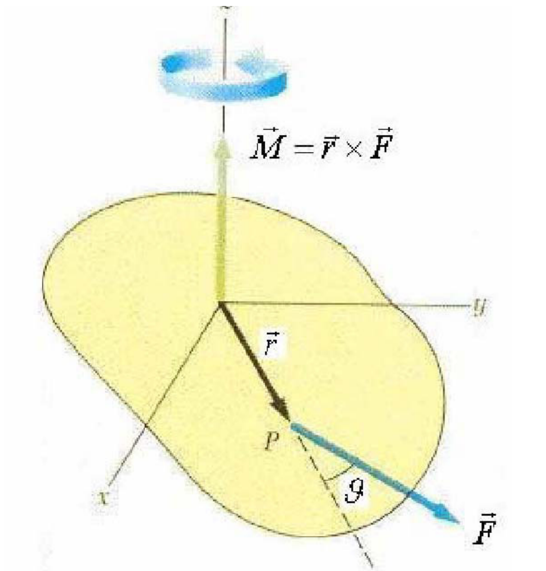
$$M = rF\sin\alpha$$

vagy:

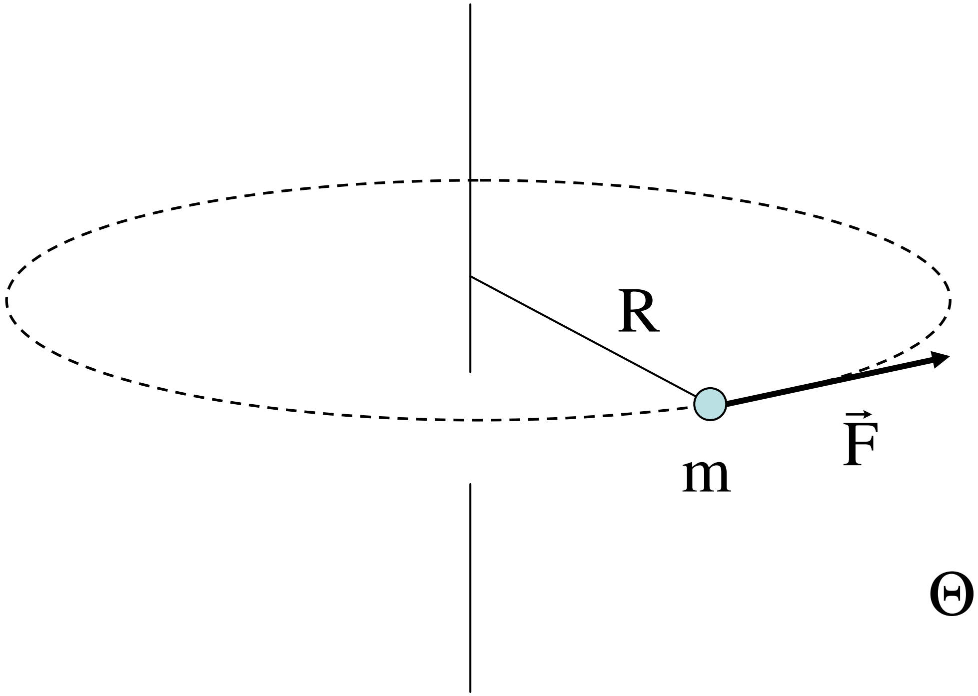
$$M = Fd \quad \text{illetve} \quad M = rF_t$$

erőkar

az erő tangenciális komponense



Newton 2. törvénye rögzített tengely körül forgó merev testre



$$F = ma$$

$$FR = mRa$$

$$a_t = \alpha R$$

$$M = \underbrace{mR^2}\beta$$

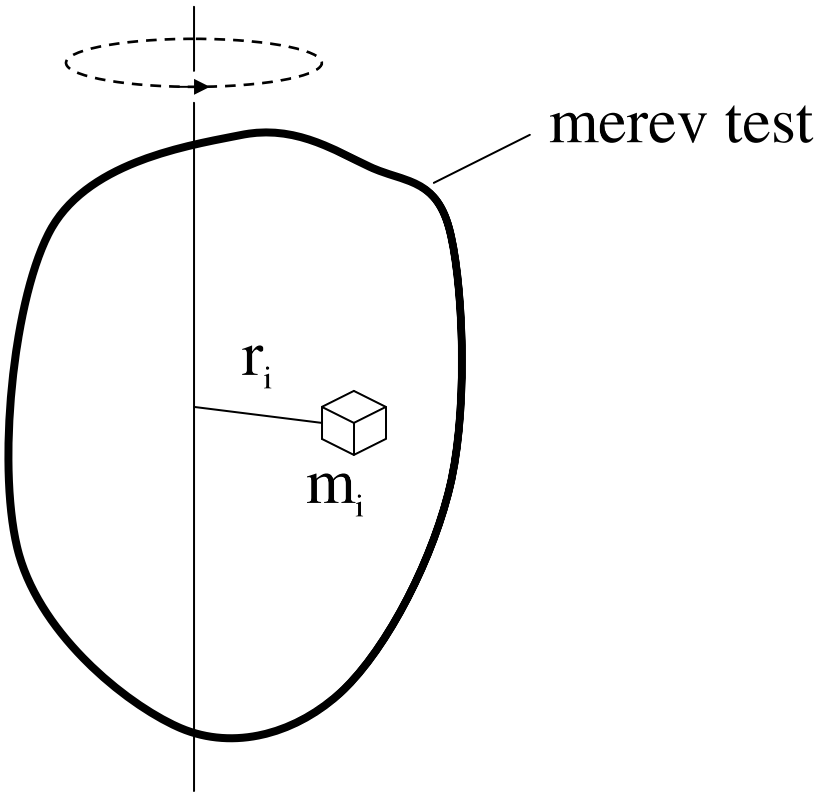
Θ: tehetetlenségi nyomaték

$$\boxed{M = \Theta\alpha}$$

$$\langle F = ma \rangle$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi$$

$$\beta = \ddot{\varphi}$$



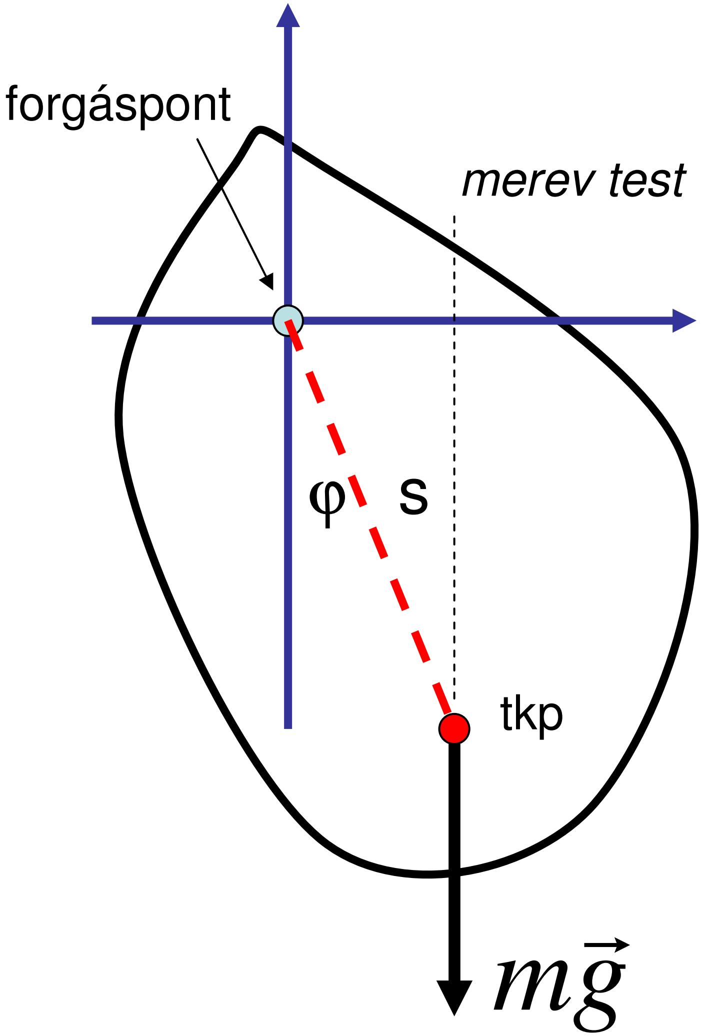
Tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta = \sum_i m_i r_i^2$$

Steiner tétel: $\Theta = \Theta_o + ms^2$

Fizikai inga

$$\left|\vec{M}\right| = mgs\cdot\sin\varphi \qquad M = \Theta\beta$$



$$\Theta\beta = -mgs\cdot\sin\varphi$$

$$/\ \varphi << 1\,rad \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi \approx \varphi\ /$$

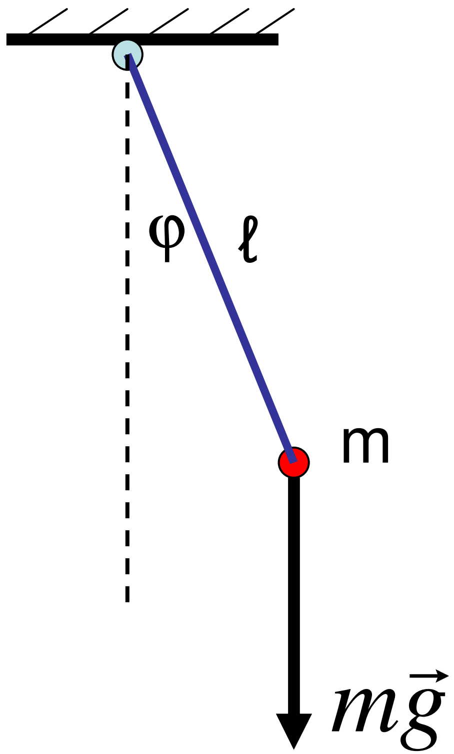
$$\Theta\beta = -mgs\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mgs}{\Theta}\varphi$$

$$/\ \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \ \rightarrow\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ / \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgs}{\Theta}} \ \Rightarrow\ \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mgs}}}$$

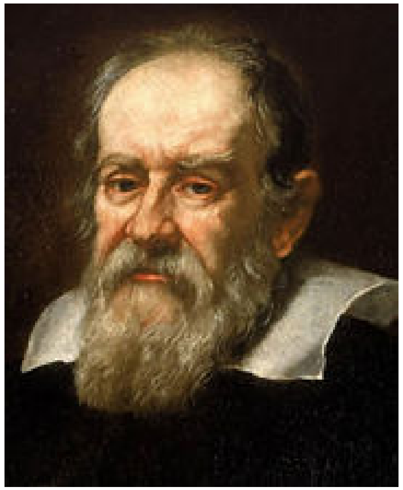
Matematikai inga



$$\Theta = m\ell^2$$

$$s = \ell$$

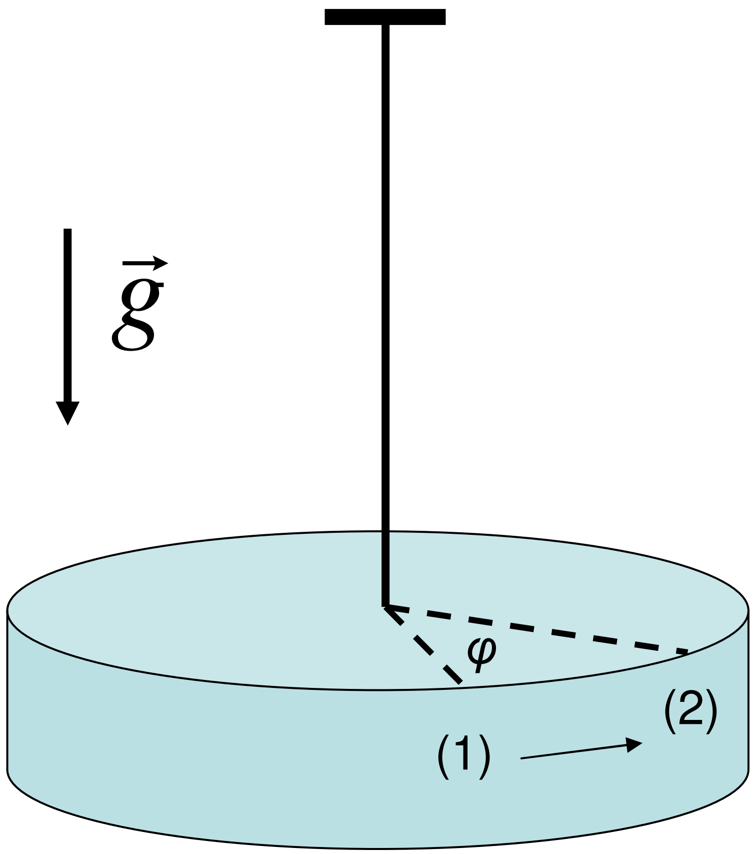
$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$



Galileo Galilei
(1564 – 1642)

$$/\ \varphi << 1\, rad\ /$$

Torziós inga



$$M = -\kappa\varphi$$

$$M = \Theta\beta$$

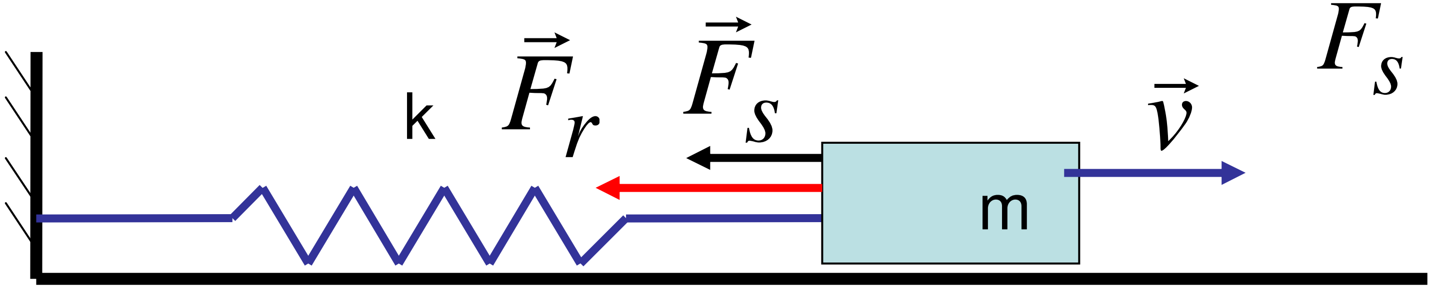
$$\Theta\beta = -\kappa\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\kappa}{\Theta}\varphi$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{\Theta}} \Rightarrow \boxed{\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{\kappa}}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Csillapított rezgőmozgás



$$F_s = -\lambda v$$

$$ma = -kx - \lambda v \longrightarrow m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x}$$

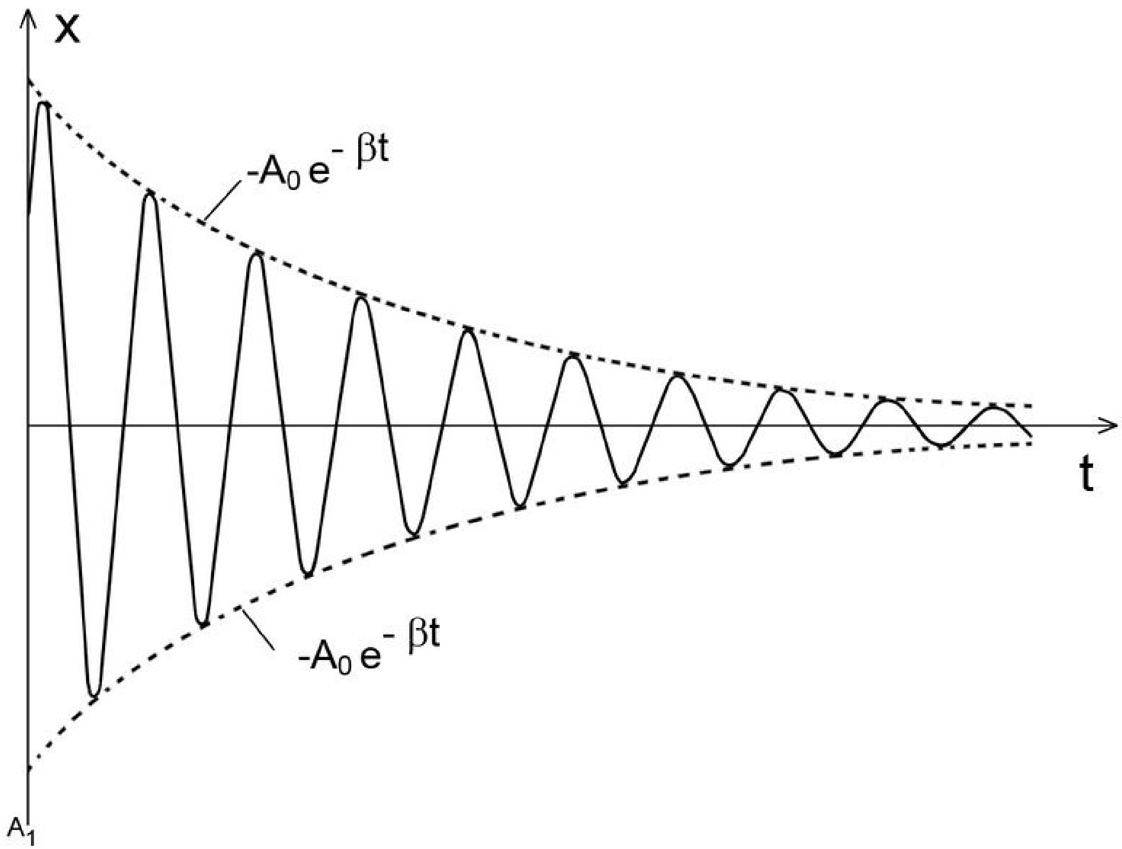
$$\beta = \frac{\lambda}{2m} \quad \text{és} \quad \frac{k}{m} = \omega_o^2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

Mozgástörvény: $$x(t) = Ae^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega_o > \beta \;\;!!!$$

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}$$

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi)$$



Aperiódikus határeset

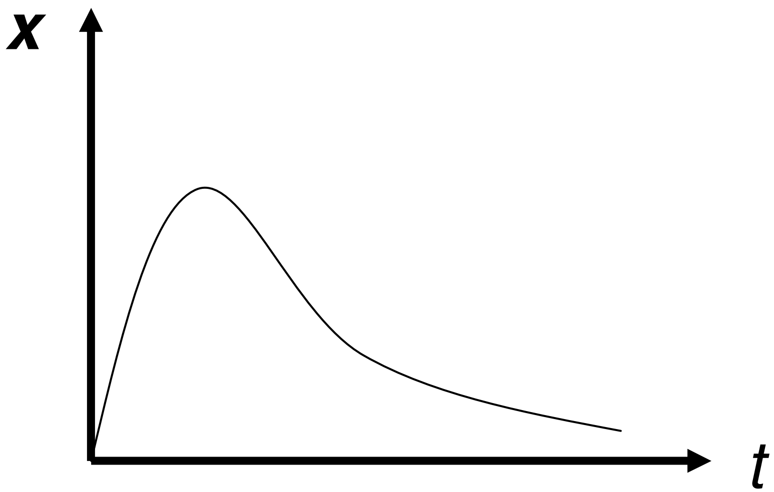
$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = 0 \qquad \omega_o = \beta \;\; !!!$$

$$x(t) = e^{-\beta t}(ct + a)$$

Kezdeti feltételek: $x(t=0) = x_o$ és $v(t=0) = v_o \Rightarrow$ c = … és a = …

Pl.: $x_o = 0$ és $v(t=0) = v_o$

$$x(t) = v_o t e^{-\beta t}$$



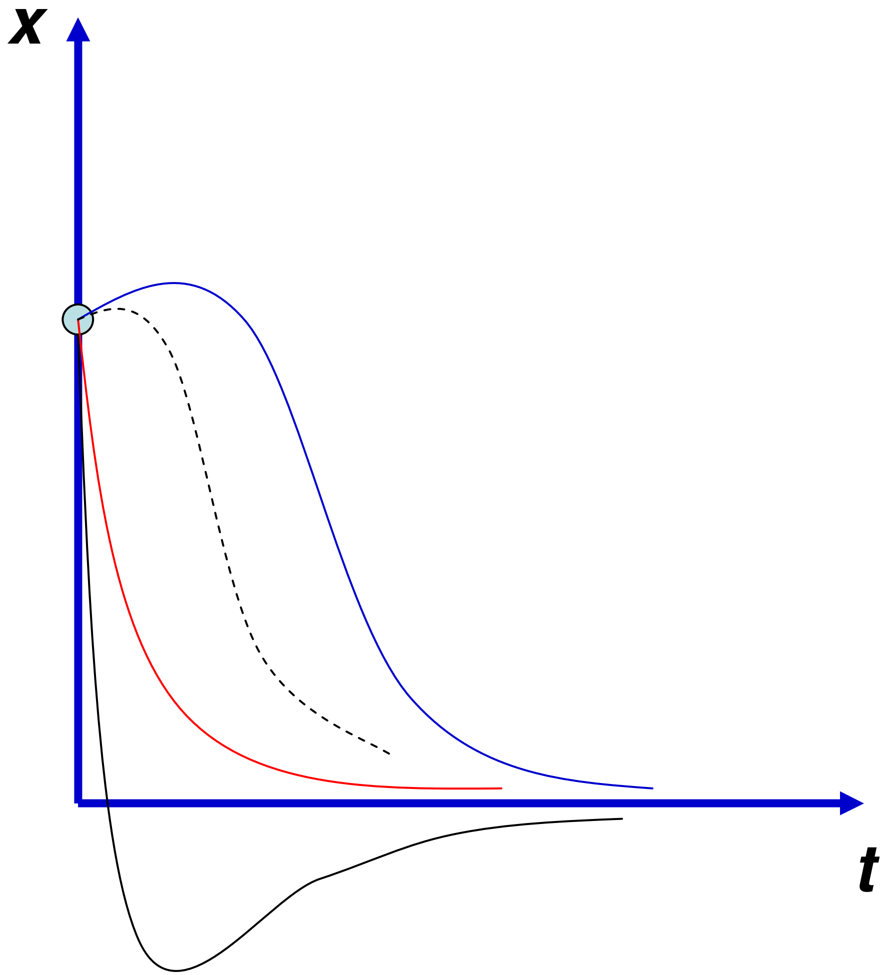
Túlcsillapított rezgés

$$\omega_o < \beta \quad !!!$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

$$x(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}$$

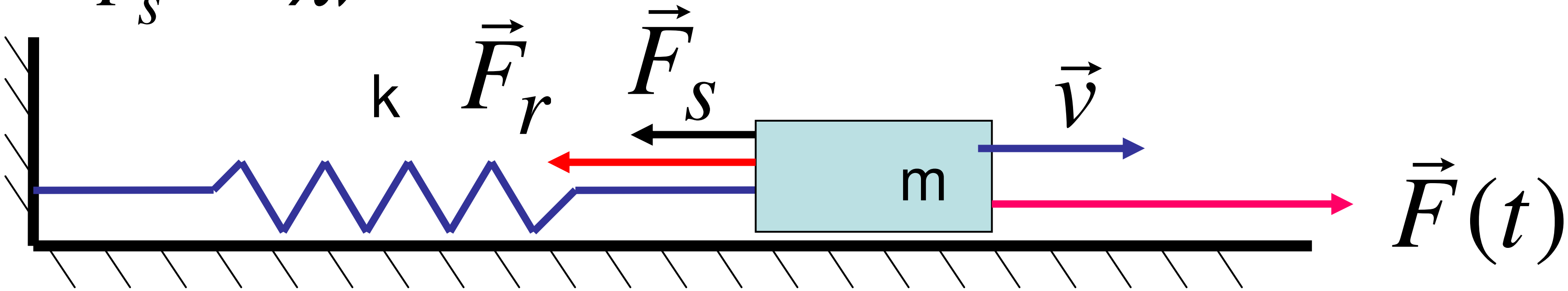
$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2} < 0$$



Kényszerrezgés, rezonancia

$$F_s = -\lambda v$$

$$F(t) = F_o \cos(\omega t)$$



$$ma = -kx - \lambda v + F_o \cos(\omega t)$$

$$f_o = \frac{F_o}{m}$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_o^2 x = f_o \cos(\omega t)$$

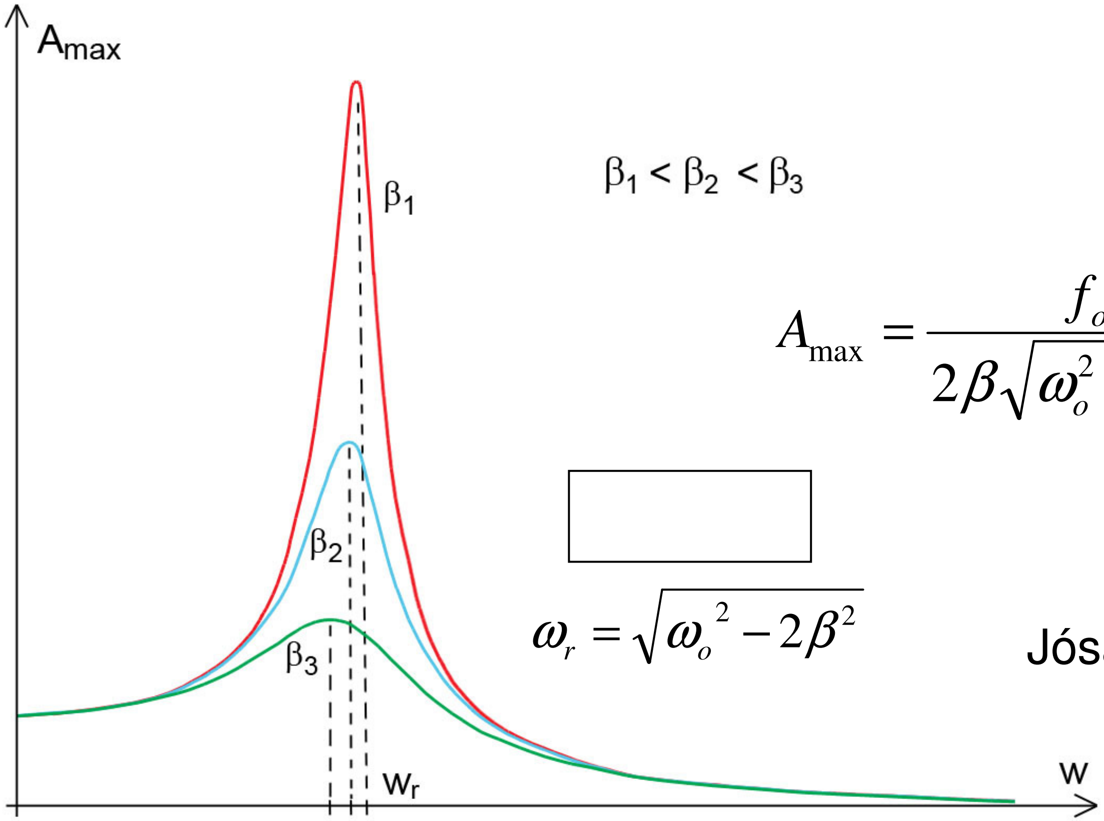
$$x(t) = A\cos(\omega t - \varphi) + ae^{-\beta t}\cancel{\sin\left(\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}\, t + \alpha\right)}$$

$$A = \frac{f_o}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$tg\,\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

Az amplitúdó frekvenciafüggése:

$$A = \frac{f_o}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$



$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}$$

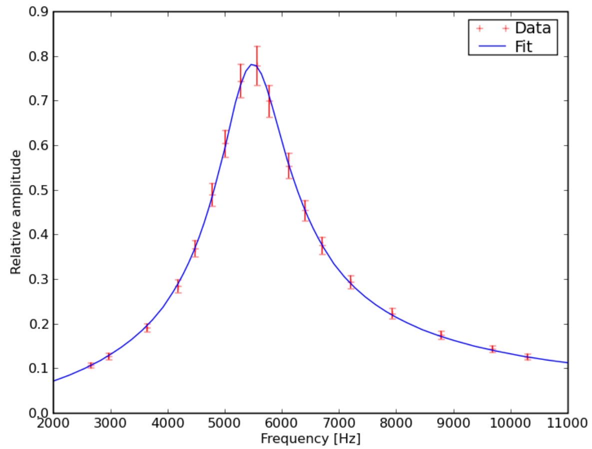
$$A_{\max} = \frac{f_o}{2\beta\sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2}} \approx \frac{f_o}{2\beta\omega_o} \qquad \text{ha} \quad \beta << \omega_o$$

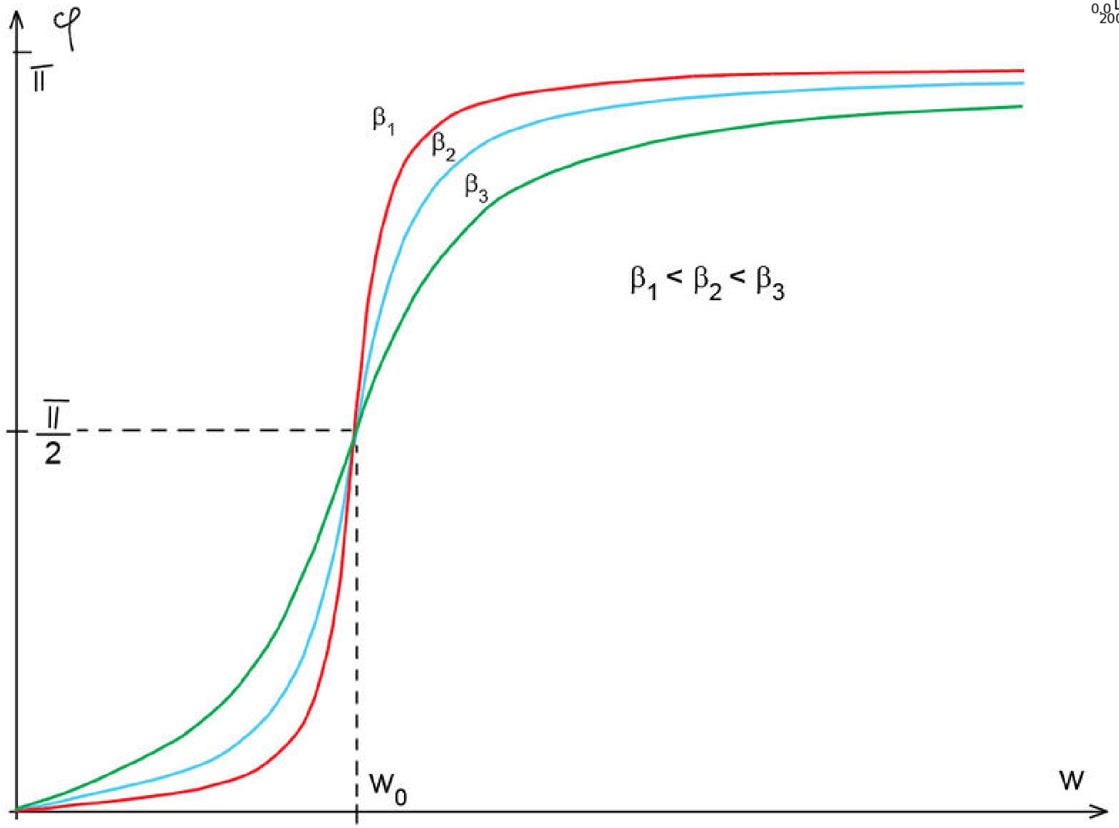
$$\omega_r = \sqrt{\omega_o{}^2 - 2\beta^2}$$

Jósági tényező: $Q = \frac{\omega_o}{2\beta}$

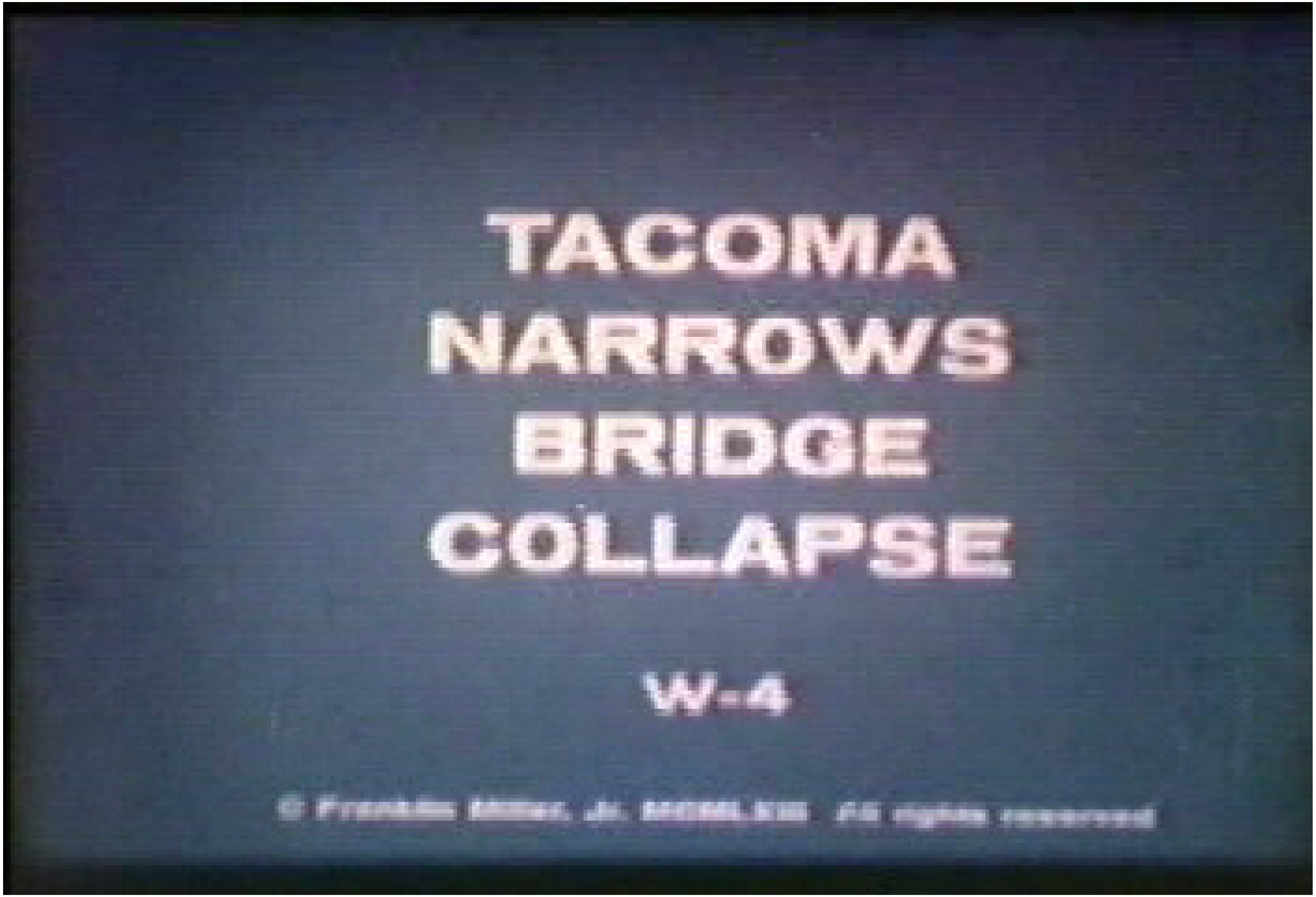
$$\textit{jósági tényező} = \frac{\textit{rendszer energiája}}{\textit{egy periódus alatt disszipált energia}}$$

A fázis frekvenciafüggése:

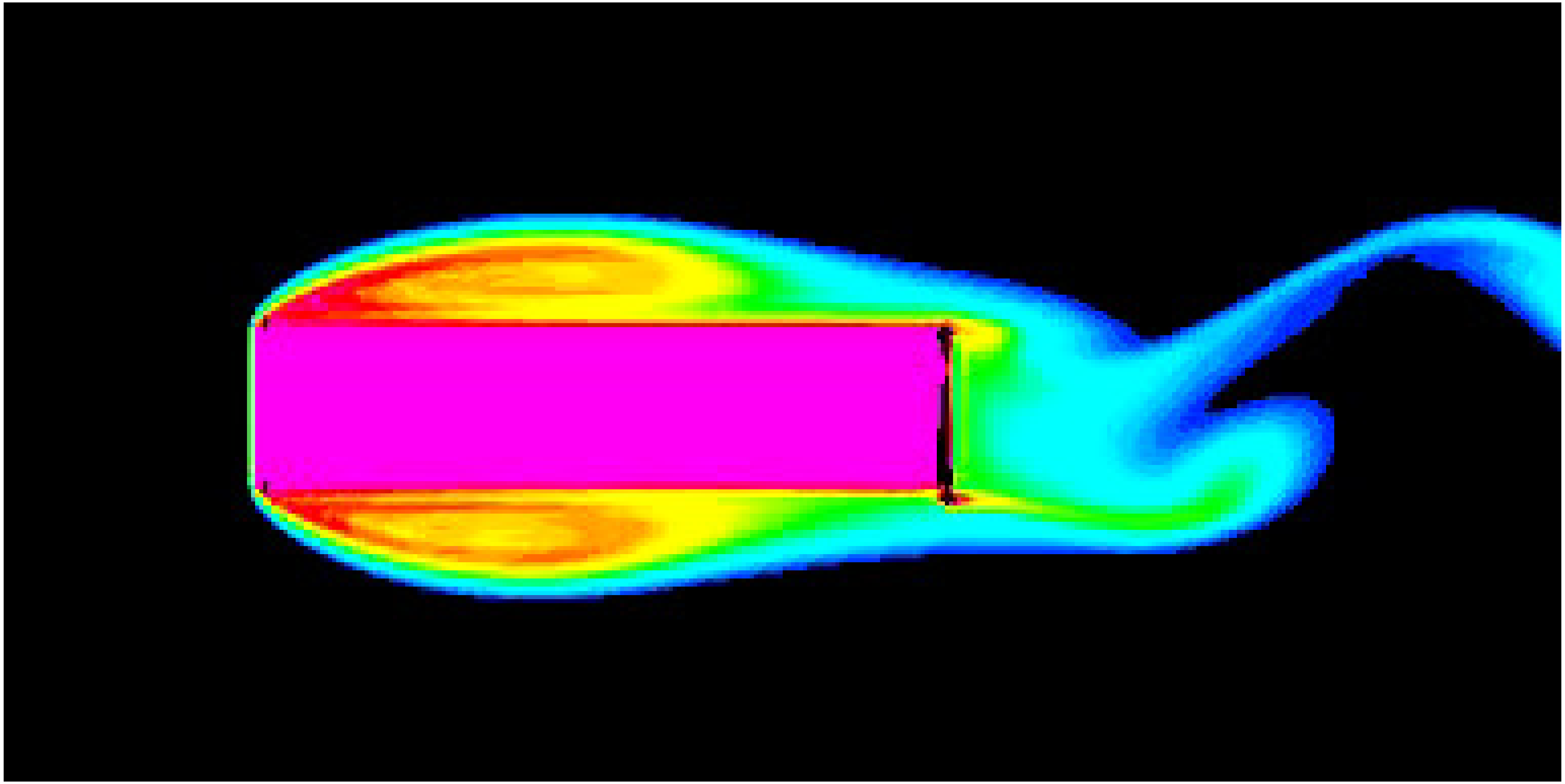




$$tg\,\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

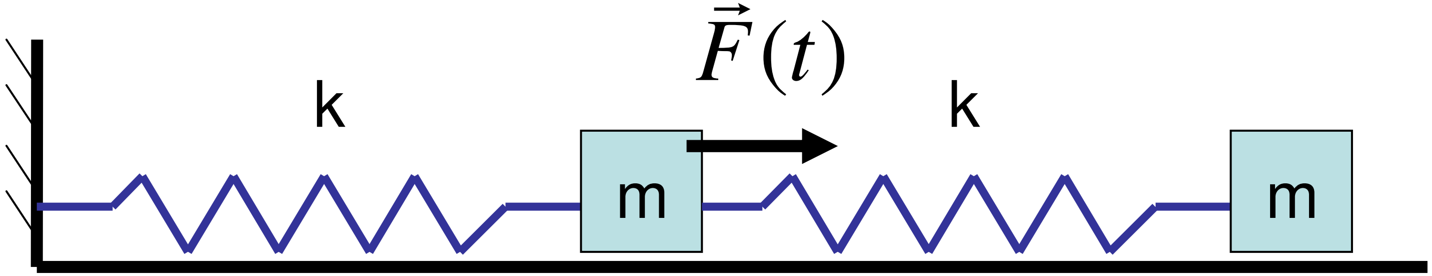


TACOMA
NARROWS
BRIDGE
COLLAPSE
W-4
© Franklin Miller, Jr.
All rights reserved



Rezonanciakatasztrófa:

Dinamikus csillapítás:



Felhőkarcoló kilengésének csökkentése dinamikus csillapítással: