Fizika 1i, 2018 őszi félév, 2. gyakorlat

Szükséges előismeretek: differenciálszámítás, deriválási szabályok (összeg, szorzat, hányados deriváltja, láncszabály); integrálszámítás, határozatlan és határozott integrál, területszámítás; kinematika: elmozdulásvektor, pillanatnyi sebesség és átlagsebesség, relatív sebesség, gyorsulás, egyenletes mozgás, egyenletesen gyorsuló mozgás, ferde hajítás;

Jelölések

helyvektor: $\vec{r}$

sebességvektor: $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{r}}$

gyorsulásvektor: $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{v}} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} \equiv \ddot{\vec{r}}\,.$

Feladatok

Differenciál- és integrálszámítás

F1. Határozzuk meg a következő függvények deriváltját!

a) $y(t) = A\sin(\omega t)\cos(\omega t)\,,$

b) $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{\sin x} + x\right)\,,$

c) $g(x) = \sqrt{1 + \mathrm{e}^{-x}}\,.$

F2. Derékszögű háromszög oldalhosszúságainak négyzetösszege 50 cm^2. Mekkoráknak válasszuk az oldalakat, hogy a háromszög területe maximális legyen?

F3. Adjuk meg a $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 12$ polinom szélsőértékeit és vázoljuk a függvényt!

F4. Számítsuk ki az $y = x^2$ egyenletű parabolának az y tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest térfogatát az $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$ határok között!

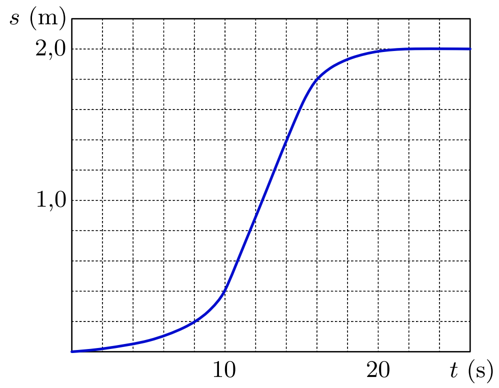
F5. Egy test nyugalomból indulva egy egyenes mentén mozog úgy, hogy gyorsulása zérus értékről időben egyenletesen növekszik, másodpercenként 2 m/s^2 értékkel. Mekkora a test sebessége az indulást követően 4 másodperc után?

Pillanatnyi sebesség és átlagsebesség

F6. Egyenes vonalban mozgó test a teljes útjának felét v_0 sebességgel tette meg; a maradék út megtételéhez szükséges idő felében v_1, másik felében pedig v_2 sebességgel mozgott. Mekkora a test egész útra számított átlagsebessége?

F7. Egy egyenes vonalban haladó autó nyugalomból indul $a = 5{,}0$ m/s^2 gyorsulással, majd bizonyos ideig állandó sebességgel mozog, végül $a = -5{,}0$ m/s^2 gyorsulással lassítva megáll. A mozgás teljes ideje $\tau = 25$ s. Az autó teljes útra számított átlagsebessége $\langle v\rangle = 72$ km/h. Milyen hosszú ideig mozgott az autó egyenletes sebességgel?

F8. Egy pontszerű test egyenes vonalban mozog végig azonos irányban. A megtett s utat a t idő függvényében az alábbi *ábra* mutatja.



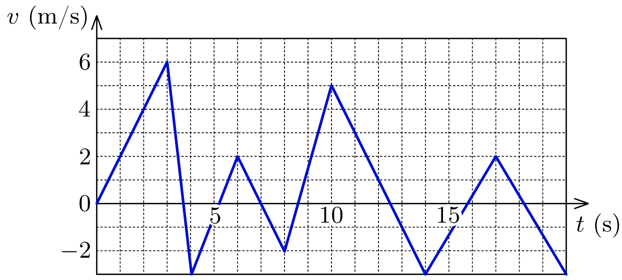
A grafikon segítségével határozzuk meg:

a) a test átlagsebességét a mozgás teljes ábrázolt időtartamára;

b) a test legnagyobb sebességét;

c) azt a t_0 időpillanatot, amikor a test pillanatnyi sebessége éppen megegyezik a mozgás első t_0 időtartamára vonatkozó átlagsebességével.

F9. Egyenes vonalban haladó, pontszerű test az origóból indul, sebességét az idő függvényében az alábbi grafikon szemlélteti. Mikor van a test a legtávolabb az origótól? Mekkora ez a legnagyobb távolság?



Relatív mozgás

F10. Egy motorcsónak folyásirányban haladva az A pontban megelőz egy, a folyón lefelé sodródó ladikot. $T = 60$ perccel később a motorcsónak megfordul, és valamennyi idő múlva újra a ladikhoz ér, amely $d = 6{,}0$ km-re sodródott az A ponttól. Feltételezve, hogy a motorcsónak sebességének nagysága állandó, határozzuk meg a folyó sebességét!

F11. Három kicsi csiga egy 60 cm oldalú szabályos háromszög egy-egy csúcspontjában helyezkedik el. A csigák 5 cm/perc nagyságú sebességgel elindulnak: az első csiga a második felé, a második a harmadik felé, a harmadik pedig az első irányába. A csigák mozgásuk közben mindvégig állandó nagyságú sebességgel a kiszemelt társ irányába haladnak. Mennyi idő múlva és mekkora út megtétele után találkoznak?

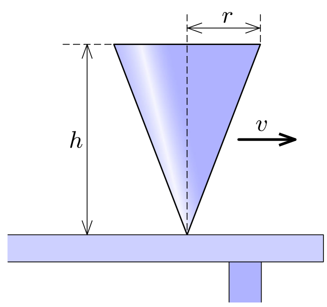
F12. Két utasszállító repülőgép ugyanabban a magasságban halad vízszintesen, egyenes vonalban, $v_1 = 800$ km/h, illetve $v_2 = 600$ km/h állandó sebességgel úgy, hogy pályájuk egymásra merőleges. Ahogy a repülők közelednek egymáshoz, egy adott időpillanatban mindkét gép $L = 20$ km-re van a pályák egyenesének metszéspontjától. Határozzuk meg a repülőgépek legkisebb távolságát a további mozgásuk során!

Hajítások és szabadesés

F13. Milyen magasról esett le az a kezdősebesség nélkül elengedett test, amely mozgásának utolsó másodpercében 50 m utat tett meg? (A légellenállást hanyagoljuk el, $g = 9{,}8$ m/s^2.)

F14. Két pontszerű test indul azonos pontból vízszintes irányban, egymással ellentétes $v_1 = 3{,}0$ m/s és $v_2 = 4{,}0$ m/s nagyságú sebességgel. Mekkora távolságra lesznek egymástól a testek abban a pillanatban, amikor sebességvektoruk közötti szög 90°? A nehézségi gyorsulás $g = 9{,}8$ m/s^2.

F15. Egy kúp alakú búgócsiga magassága h, alapkörének sugara r. A játékot sima asztallapon gyors forgásba hozzuk az *ábrán* látható helyzetben, és az asztal széle felé indítjuk. Legalább mekkora legyen a búgócsiga középpontjának v sebessége, hogy az asztal szélébe a kúp alkotója ne csapódjon be? (A búgócsiga forgástengelye mindvégig függőleges marad.)

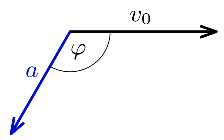


F16. Két pontszerű testet egyszerre hajítunk el azonos $v_0 = 25$ m/s nagyságú kezdősebességgel ugyanabból a pontból: az egyiket függőlegesen felfelé, a másikat a vízszinteshez képest felfelé, $\alpha = 60°$-os szögben. A légellenállást elhanyagolva határozzuk meg a testek távolságát az indítást követően $t = 1{,}70$ s múlva!

F17. Két pontszerű testet egyszerre hajítunk el az azonos magasságban lévő, egymástól d távolságra lévő A és B pontból. Az egyik (A pontból induló) test függőlegesen felfelé indul v_1 sebességgel, míg a B pontból induló test kezdősebessége v_2 nagyságú, iránya pedig az A pont felé mutat. Mekkora minimális távolságra közelítik meg egymást a testek mozgásuk során?

(A nehézségi gyorsulás g, a légellenállást hanyagoljuk el! A testek a minimális távolság eléréséig nem esnek le a talajra.)

F18. Az *ábra* egy pontszerű test sebességét és gyorsulását mutatja a mozgás kezdőpillanatában. A test gyorsulásának iránya és nagysága állandó.



a) Mennyi idő múlva lesz a test sebességének nagysága ugyanakkora, mint a kezdőpillanatban volt?

b) Mikor lesz a sebessége minimális?

(Adatok: $a = 6$ m/s^2, $v_0 = 24$ m/s, $\varphi = 120°$)

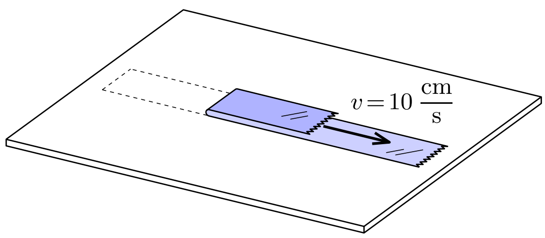
F19. Egy hosszú, a vízszinteshez képest α hajlásszögű lejtőre h magasságból függőlegesen ráejtünk egy kicsiny, rugalmas labdát. Mutassuk meg, hogy a labda egymást követő pattanási helyeinek távolsága számtani sorozat szerint növekszik, és határozzuk meg a sorozat differenciáját (különbségét)!

(Az ütközéseket tekintsük tökéletesen rugalmasnak, és a közegellenállást hanyagoljuk el!)

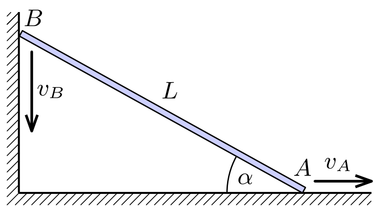
Útmutatás: Használjunk olyan koordináta-rendszert, melynek tengelyei a lejtő síkjával párhuzamosak, illetve merőlegesek!

Kényszerek

F20. Egy asztallapra felragasztunk egy bizonyos hosszúságú celluxszalagot, majd az egyik végét felhajtva, vízszintesen 10 cm/s sebességgel egyenletesen visszafelé húzzuk. Mekkora sebességgel mozog a szalag mozgásban lévő részének a közepe?

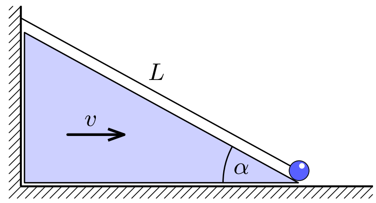


F21. Egy merev rúd egyik (A) vége a talajon, másik (B) vége pedig egy függőleges falhoz támaszkodik. Az A pontot állandó v_A sebességgel húzzuk vízszintes irányban. Mekkora a B pont sebessége abban a pillanatban, amikor a rúd vízszintessel bezárt szöge éppen α? (Tegyük fel, hogy a rúd nem válik el a faltól.)



F22. Egy merev rúd A és B végpontjának pillanatnyi sebességvektora egy adott időpillanatban $\vec{v}_A$ és $\vec{v}_B$. Adjuk meg ugyanekkor a rúd B-hez közelebbi harmadolópontjának sebességvektorát!

F23. Egy pontszerű golyó az α hajlásszögű éken fekszik az *ábrán* látható módon. A golyót az ék legfelső pontjával megegyező magasságban rögzített, L hosszúságú, nyújthatatlan fonál tartja az éken. Az éket vízszintes irányban állandó v sebességgel mozgatni kezdjük.



a) Mennyi idő múlva ér a golyó az ék tetejéhez?

b) Mekkora a golyó sebességének nagysága?

c) Milyen pályán mozog a golyó?

Megoldások

F1. *a*) $y'(t) = A\omega\cos(2\omega t)$

c) $g'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{1+\mathrm{e}^{-x}}}$

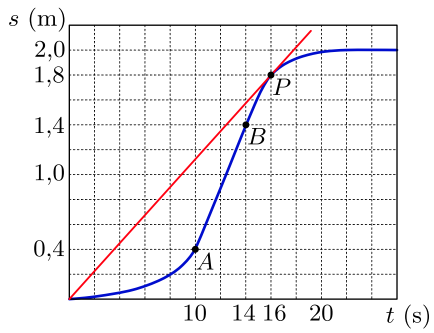
F5. $v = (\dot{a}/2)t^2 = 16$ m/s .

F7. 15 másodpercig.

F8. *a*) 8,7 cm/s

b) 25 cm/s (az AB szakasz meredeksége)

c) 16 s (a P pont időpillanata)



F10. 3 km/h (a folyóhoz viszonyított sebességeket érdemes használni)

F15. $v > r\sqrt{\dfrac{g}{2h}}$

F16. $d = 2v_0 t \sin\left(\dfrac{90° - \alpha}{2}\right) = 22{,}0$ m

F18. *a*) $t_1 = \dfrac{2v_0\sin(\varphi - 90°)}{a} = 4$ s .

b) $t_2 = t_1/2 = 2$ s .

F20. 7,5 cm/s .

F21. $v_A/\tan\alpha$ (vagy a rúdirányú sebességkomponensek egyenlőségéből vagy deriválásból)