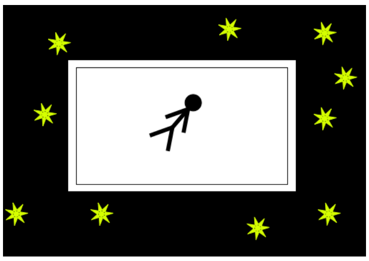
ERŐ-E A GRAVITÁCIÓ?

1

Inerciarendszer (IR): olyan vonatkoztatási rendszer, ahol érvényes Newton első törvénye ($\vec{F}_e = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$)

1. példa:



← ez pl. IR (Newton és Einstein egyetért)

Inerciarendszerben tett felfedezések:

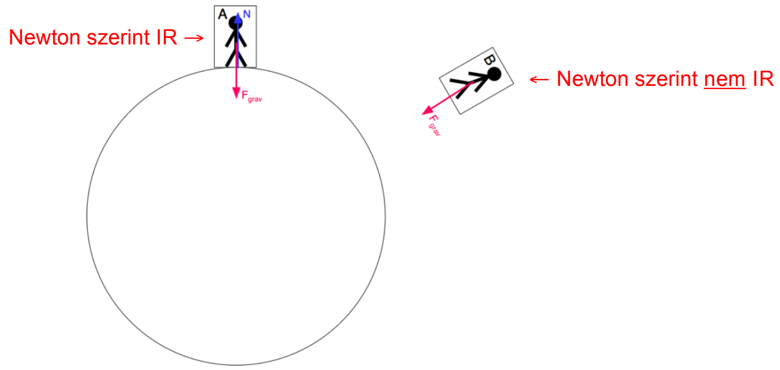
(1) Amikor valaki gyorsul (azaz *erő hat rá*, pl. a fal megüti, egy gumikötél meghúzza), azt becsukott szemmel is *érzi*.

(2) Érvényes az ún. Maximális Öregedés Elve (M.Ö.E.): két esemény között az az óra regisztrálja a legtöbb eltelt időt, amelyre a két esemény között nem hatott erő.

2

2. példa:

Newton szerint: A inerciarendszer, B nem az, a gravitáció pedig erő.



Csakhogy a fenti "IR"-ben a következő felfedezéseket tesszük:

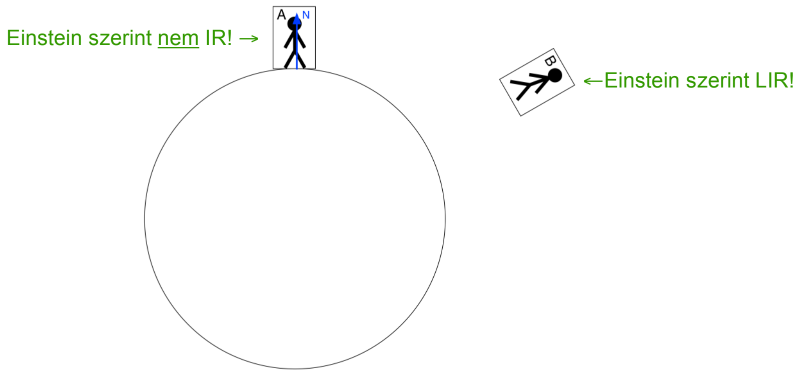
(1) "Amikor valakire erő hat, azt becsukott szemmel is érzi, kivéve a gravitációs erőt (azt ugyanis nem érzi)."

(2) "A M.Ö.E. módosított formában érvényes: két esemény között az az óra regisztrálja a legtöbb eltelt időt, amelyre a két esemény között csak a gravitációs erő hat."

3

2. példa:

Einstein szerint: a gravitáció *nem erő* (pl. azért, mert nem érezzük), és a B az inerciarendszer, nem pedig az A.



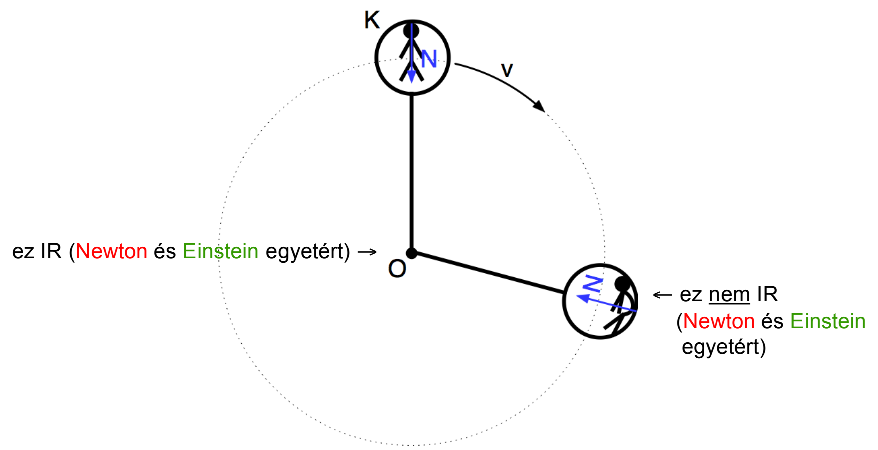
Az eredeti (IR-re tett) megállapítások B-ben változatlanul *érvényben maradnak*:

(1) Amikor valakire erő hat, azt becsukott szemmel is *érzi*.

(2) M.Ö.E.: két esemény között az az óra regisztrálja a legtöbb eltelt időt, amelyre a két esemény között nem hatott erő.

4

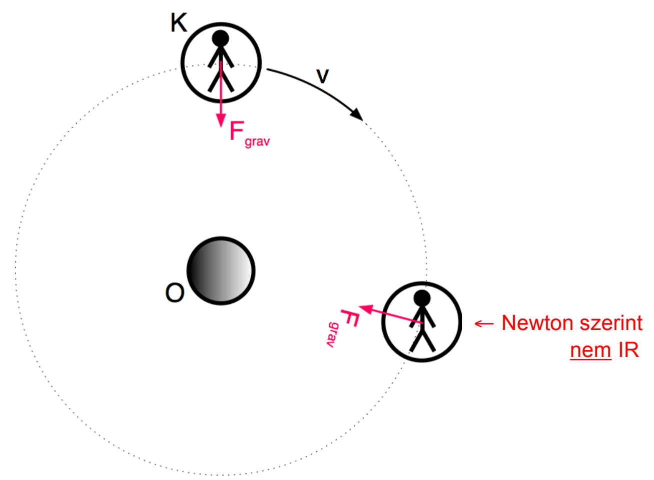
3. példa:



Körhinta inerciarendszerben. A körpályára kényszerítő erő
a felület nyomóereje (vagy a Coulomb- vagy a Lorentz-erő, stb.).

5

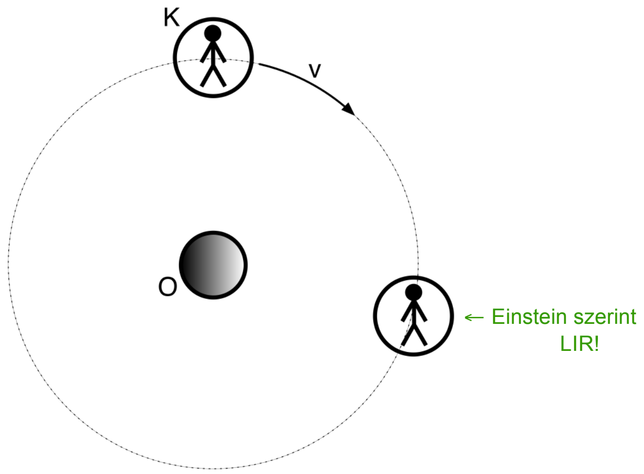
4. példa:



Gravitációs körhinta. A "körpályára" kényszerítő "erő" a gravitáció
(amit a kabin utasa *nem érez*).

6

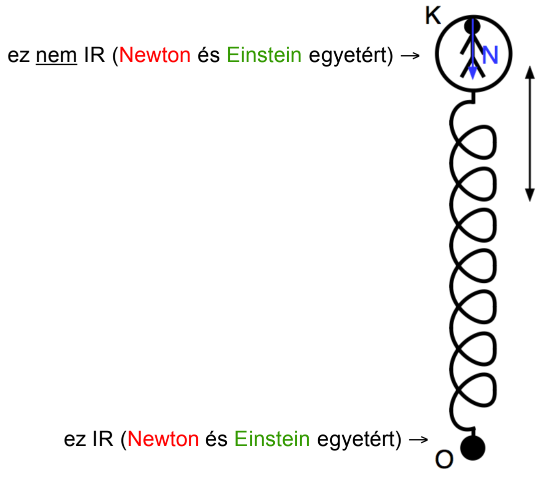
4. példa:



Gravitációs körhinta. “Gravitációs erő” nem létezik!

7

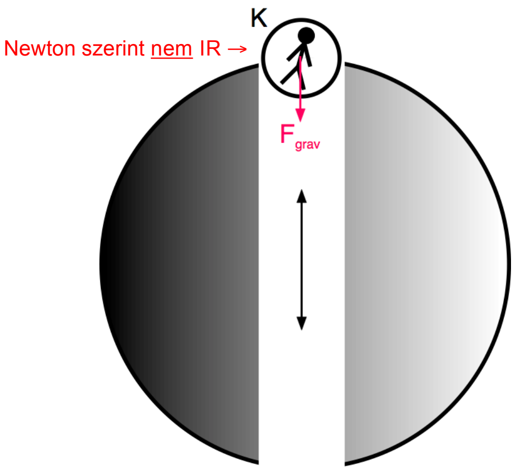
5. példa:



Rugó inerciarendszerben. Az utas szinuszos gyorsulását
a felület nyomóereje okozza.

8

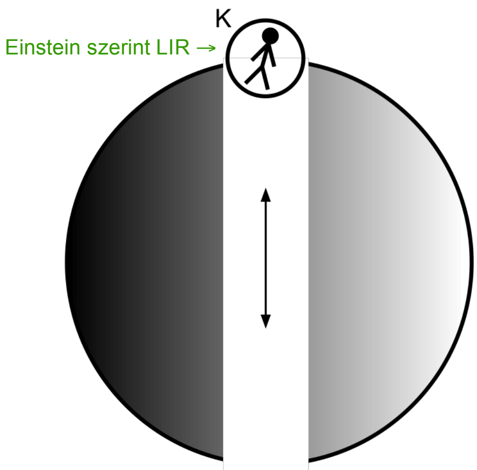
6. példa:



Gravitációs rugó. Az utas “szinuszos gyorsulását” a gravitációs “erő” okozza (amit az utas *nem érez*).

9

6. példa:



Gravitációs rugó. “Gravitációs erő” nem létezik!

10

EKVIVALENCIA-ELV:

Egy csak a gravitáció hatására (azaz “szabadon”) mozgó vonatkoztatási rendszer
(lokálisan*) ugyanolyan, mint
egy gravitáló testektől távoli inerciarendszer.

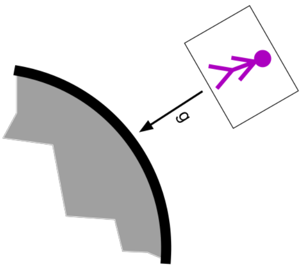
Egy a Földön nyugvó vonatkoztatási rendszer
(lokálisan*) ugyanolyan, mint
egy gravitáló testektől távoli gyorsuló vonatkoztatási rendszer.

*a téridő kis tartományában.

11

EKVIVALENCIA-ELV:

Egy csak a gravitáció hatására (azaz “szabadon”) mozgó vonatkoztatási rendszer
lokálisan ugyanolyan, mint
egy gravitáló testektől távoli inerciarendszer.
[A gravitáció a Földön “kikapcsolható” azzal, ha elengedjük magunkat.]



≈

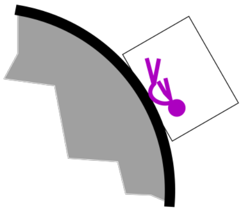
De: ↑ görbült téridő ↑ sík téridő

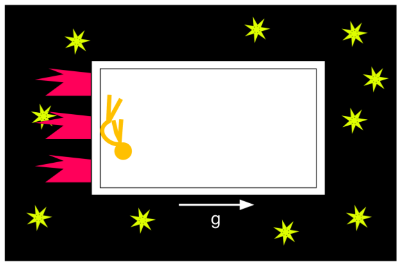
12

EKVIVALENCIA-ELV:

Egy a Földön nyugvó vonatkoztatási rendszer
lokálisan ugyanolyan, mint
egy gravitáló testektől távoli gyorsuló vonatkoztatási rendszer.

[A “gravitáció” az űrhajóban bekapcsolható azzal, ha bekapcsoljuk a hajtóművet.]



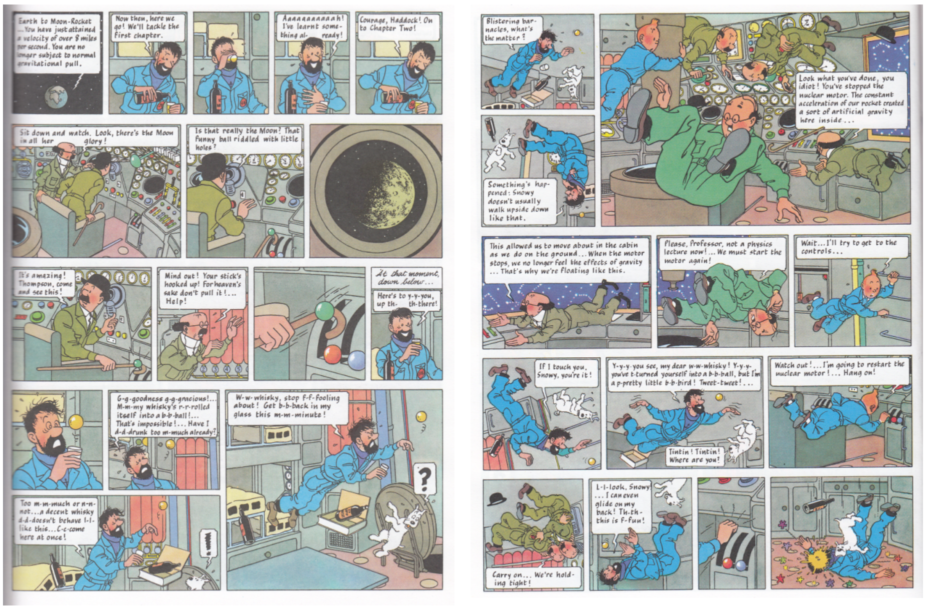


De: görbült téridő ... sík téridő

13

Einstein játéka. (A gravitáció “megszüntethető”!)

14



Tintin és a Holdutazás. (A "gravitáció" bekapcsolható!) 15

AZ EKVIVALENCIA-ELVBŐL MÁRIS LEVEZETHETŐ NÉHÁNY ÁLTALÁNOS RELATIVITÁSELMÉLETBELI EREDMÉNY (ANÉLKÜL, HOGY A TÉRIDŐ GÖRBÜLTSÉGÉT FIGYELEMBE VENNÉNK):

1. Fénysugár elhajlása gravitációs térben.

2. A gravitációs kék-, ill. vöröseltolódás.

16

Erő-e a gravitáció? NEM.

MI A GRAVITÁCIÓ?
A TÉRIDŐ GÖRBÜLETE.

Egy nagy tömegű test begörbíti maga körül a téridőt, és ebben a görbült téridőben - erőhatás híján - a “lehető legegyenesebb” (geodetikus) világvonalon halad a szabad tömegpont.

17

Közbevetett kérdések:

1. “A Nap kering a Föld körül, vagy a Föld a Nap körül?”

2. Tehát: Kopernikusznak v Ptolemaiosznak van-e igaza?

18

A GEODETIKUSRÓL

(1) A 2D, 3D, stb. *tér* geodetikus vonalai:

A geodetikus (egyenes) vonal: a “legtermészetesebb” (“kanyarmentes”) vonal két adott pont között.

Precíz definíciója: az a vonal, amelynek ha az *érintővektorát* elkezdjük *párhuzamosan eltolni* a vonal mentén, akkor az mindvégig a vonal érintővektora marad.

Járulékos felfedezés: az ilyen vonalra $\int_P^Q dl = \min$.

(Két pont között a legrövidebb út az egyenes.)

A “MINIMÁLIS TÁVOLSÁG ELVE”.

19

A GEODETIKUSRÓL

(2) A 4D *téridő* geodetikus világvonalai:

A geodetikus (egyenes) világvonal: a “legtermészetesebb” (erőmentes) világvonal két adott esemény között.

Precíz definíciója: az a világvonal, amelynek ha az *érintővektorát* elkezdjük *párhuzamosan eltolni* a világvonal mentén, akkor az mindvégig a világvonal érintővektora marad.

Járulékos felfedezés: az ilyen világvonalra $\int_A^B d\tau = \max$!

(“Két esemény között a *leghosszabb* út az egyenes.” Hogyan lehet két esemény között a legtovább élni? Relaxálva.)

A MAXIMÁLIS ÖREGEDÉS ELVE

20

Erő-e a gravitáció? NEM.

A GRAVITÁCIÓ: A TÉRIDŐ GÖRBÜLETE.

Hogyan *mutatható ki méréssel* ez a görbület?
“Egy vektort párhuzamos eltolással végigviszünk egy *zárt világvonalon**, és ellenőrizzük, hogy a a vektor a végén ugyanarra mutat-e, mint az elején.”

Nem használható módszer. (*Zárt világvonalon nem tudunk közlekedni!)

21

Erő-e a gravitáció? NEM.

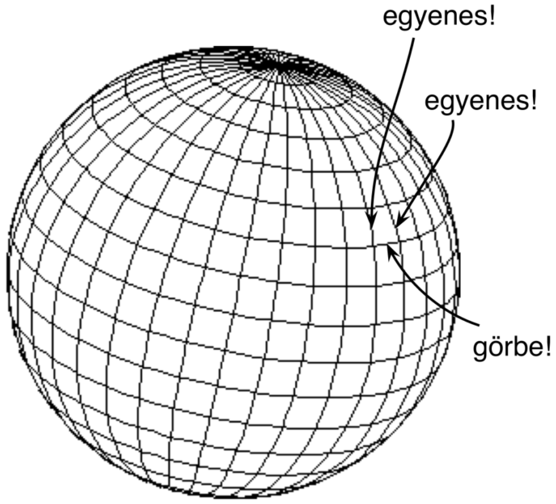
A GRAVITÁCIÓ: A TÉRIDŐ GÖRBÜLETE.

Hogyan *mutatható ki méréssel* ez a görbület?
Két szabad tömegpont mozgásának követésével.
(“Két geodetikus világvonal egymáshoz képest hogyan viselkedik?”)

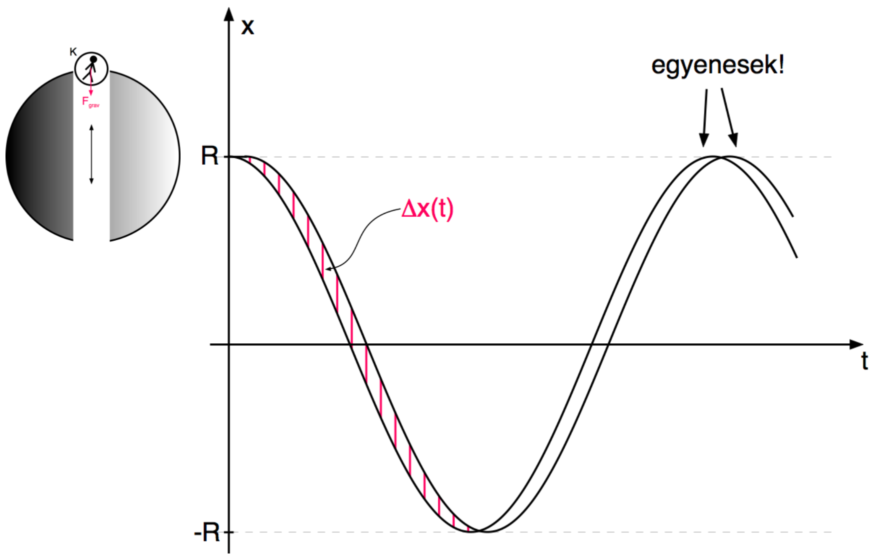
Hogyan *érezhető* ez a görbület? Az <u>árapály-erő</u> hatásának tapasztalásával. (A Földön: ingerküszöb allatti mértékben kicsi.)

22

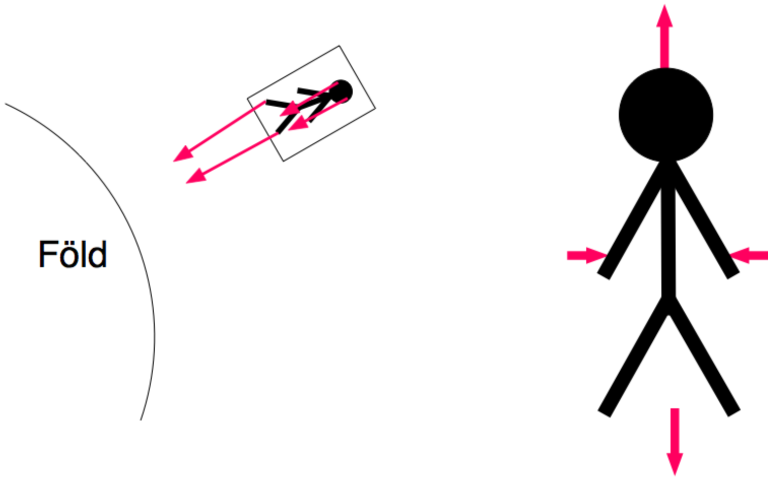
GÖRBÜLT SOKASÁGOK



Egy pontból kiindítunk *két egyenest*.
Ismét metszik egymást! → görbült felület!

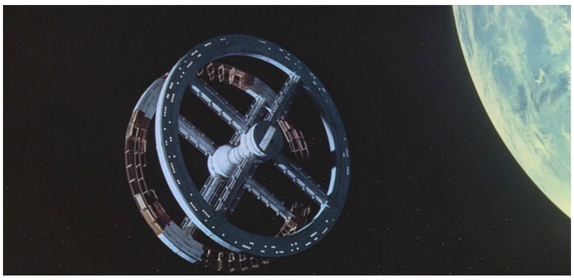


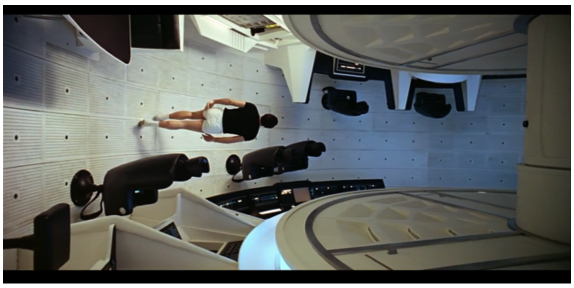
Gravitációs rugó. Két kabint egymás után elengedve vizsgáljuk a két *geodetikus* (*egyenes!*) világvonal egymáshoz képesti viselkedését.
Tapasztalat: többször metszik egymást → következtetés: görbült téridő!



"Árapály-erő" → a szabadon eső űrhajós spagettizálódik. (Nem érezzük, mert nagyon kicsi, ~10^{-4}N nagyságú erők)

25





Mesterséges gravitáció forgással. Kényelmes utazás-e ez? Mekkora "árapály-erő" feszíti *itt* az űrhajóst?

26

n-dimenziós sokaság (pl. 2D felület, 3D tér, 4D téridő, stb.) metrikája:

$$ds^2 = g_{11}\left(dx^1\right)^2 + g_{22}\left(dx^2\right)^2 + \ldots + g_{12}\,dx^1 dx^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\,dx^i dx^j = g_{ij}\,dx^i dx^j$$

A metrikát (a fenti egyenletet) a sokaság "lakói" mérésekre alapozva fel tudják állítani:

1. A sokaságot bekoordinátázzák az $x^1, x^2, \ldots, x^n$ (tetszőlegesen) felvett koordinátákkal.
2. Két közeli pont között megmérik a ds távolságot, és ugyanakkor regisztrálják a két pont közötti dx^i koordináta-különbségeket is.
3. A 2-es lépést megismétlik sok közeli pontpárra. Összességében rengeteg adatot összegyűjtenek.
4. Ezekből az adatokból megállapítják a $g_{ij} = g_{ij}\left(x^k\right)$ függvényeket (a metrikus tenzor elemeit).

De: hogyan tudják a "lakók" megállapítani, hogy sokaságuk görbült-e?

27

Emlékeztető: ha sokaságunk 2D felület, alkalmazható a "Theorema Egregium" (Gauss, 1828):

$$K\left(x^1, x^2\right) = \frac{1}{2g}\left[2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\left(\partial x^2\right)^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\left(\partial x^1\right)^2}\right] +$$

$$+\frac{g_{12}}{4g^2}\left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\right) - 2\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right) + \left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)\right] -$$

$$-\frac{g_{22}}{4g^2}\left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\right)\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right) - \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right)^2\right] -$$

$$-\frac{g_{11}}{4g^2}\left[\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2}\right)\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1}\right)^2\right]$$

ahol $g \equiv \det g_{ij} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ [csak 2D felületre alkalmazható!]

28

n-dimenziós sokaság görbültségét kifejező mennyiség:
a Riemann-tenzor (Riemann, 1854)

Ezt is ki tudják számítani a sokaság "lakói" a $g_{\alpha\beta}\left(x^{\gamma}\right)$ metrikus tenzorból:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}$$

ahol $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}\left[\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right]$, és $g^{\alpha\sigma}$ a metrikus tenzor inverze.

[tetszőleges dimenziójú sokaságra alkalmazható!]

29

TOVÁBBI PÉLDÁK

Az n-dimenziós sokaságunk
legyen a *4D téridő*!

30

6. *4D téridő a világűrben, nagy tömegektől távol*; kockarács-hálózat, szinkronizált órák:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

koordináták: $"x^0" = t \quad "x^1" = x \quad "x^2" = y \quad "x^3" = z$

metrikus tenzor: $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Riemann-tenzor: $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \ldots = 0$ SÍK (GÖRBÜLETLEN) TÉRIDŐ!

31

7. *4D téridő a világűrben, nagy tömegektől távol*; gömbhéj-hálózat, szinkronizált órák:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

koordináták: $"x^0" = t \quad "x^1" = r \quad "x^2" = \theta \quad "x^3" = \varphi$

metrikus tenzor: $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$

Riemann-tenzor: $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \ldots = 0$ SÍK (GÖRBÜLETLEN) TÉRIDŐ

32

8. *Gömbszimmetrikus, álló tömeg körüli téridő*; Schwarzschild-koordinátákkal felírva:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

koordináták: $"x^0" = t \quad "x^1" = r \quad "x^2" = \theta \quad "x^3" = \varphi$

metrikus tenzor: $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$

Riemann-tenzor: $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \ldots \neq 0$ GÖRBÜLT TÉRIDŐ!

33

9. *Gömbszimmetrikus, álló tömeg körüli téridő*; Painlevé-Gullstrand-koordinátákkal felírva:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dT^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}}dTdr - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

koordináták: $"x^0" = T \quad "x^1" = r \quad "x^2" = \theta \quad "x^3" = \varphi$

metrikus tenzor: $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & -\sqrt{\frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{2M}{r}} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$

Riemann-tenzor: $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \ldots \neq 0$ GÖRBÜLT TÉRIDŐ

34

10. *Forgó fekete lyuk (+ a Nap + a Föld) körüli téridő*; Doran-koordinátákkal felírva, az egyenlítői síkban:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dT^2 - 2\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}}\, dTdr + 2\left(\frac{2Ma}{r}\right) dTd\varphi +$$

$$+2a\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}}\, drd\varphi - \frac{r^2}{r^2 + a^2} dr^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) d\varphi^2$$

koordináták: $"x^0" = T \qquad "x^1" = r \qquad "x^2" = \varphi$

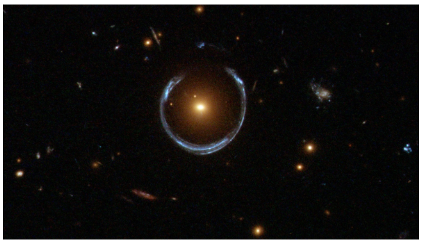
metrikus tenzor: $$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & -\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}} & \frac{2Ma}{r} \\ -\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}} & -\frac{r^2}{r^2 + a^2} & -a\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}} \\ \frac{2Ma}{r} & -a\sqrt{\frac{2Mr}{r^2 + a^2}} & r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \end{pmatrix}$$

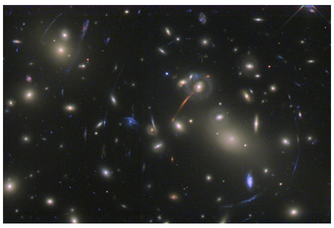
Riemann-tenzor: $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \ldots \neq 0$ GÖRBÜLT TÉRIDŐ!

35

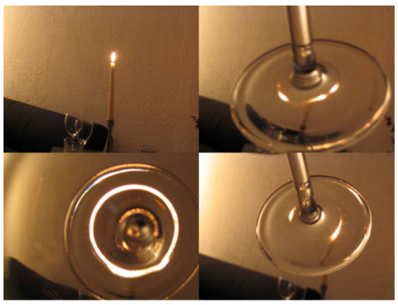
A görbült téridő néhány megfigyelhető következménye (részletesebben ld. később)

1. *gravitációs lencsehatás* (nagy tömegek - pl. galaxisok - begörbítik a fénysugarak útját)





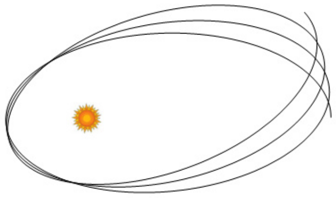
demonstráció házilag:



36

A görbült téridő néhány megfigyelhető következménye (részletesebben ld. később)

2. *a bolygók perihéliumának vándorlása* (a Nap körül a bolygók NEM ellipszispályán keringenek)



A naprendszerben a Merkúrnál a legerősebb az effektus: ~43”/évszázad
~ 43”/(417 körbefordulás)

[A legközelebbi Merkúr-átvonulás: 2016. május 9.]

37

A görbült téridő néhány megfigyelhető következménye (részletesebben ld. később)

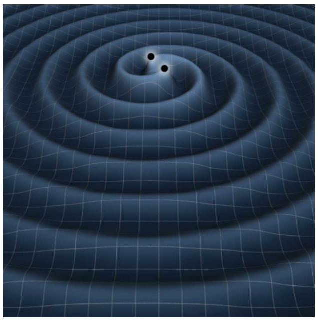
3. *a GPS-nél relativisztikus korrekcióra van szükség* (a Föld tömege begörbíti a téridőt)

Nem egy az egyben a műholdak atomórái által mutatott időt kapják meg a vevőkészülékek, hanem a relativisztikus korrekciókkal (spec.rel. + ált. rel.) módosított értékeket. [Relativisztikus korrekciók nélkül naponta ~10km távolságmérési hiba gyűlhetne össze.]

38

A görbült téridő néhány megfigyelhető következménye (részletesebben ld. később)

4. *gravitációs hullámok* (pl. két nagy tömegű objektum egyesülésekor)



pl. z-irányban terjedő, +-polarizációjú gravitációs hullám metrikája:

$$ds^2 = dt^2 - (1+h)dx^2 - (1-h)dy^2 - dz^2$$

39