1. Kinetikus gázelmélet

Tóth Miklós

feltevések:
- részecskék kis gömbök, $d \ll l$ (szabad úthossz)
  két ütk. közt eltelt átl. út
- tökéletesen rugalmas ütk.
- nincs kitüntetett irány, rendezetlen mozgás

leírás: 6 dim. fázistér $(\underline{r}, \underline{v})$

$d\tau$ elemi tart. $[x,\ x+dx]$, $[y,\ y+dy]$, $[z,\ z+dz]$, $[v_x,\ v_x+dv_x]$, $[v_y,\ v_y+dv_y]$, $[v_z,\ v_z+dv_z]$

N részecske, $d\tau$-ban dN

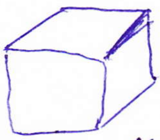
$$\frac{dN}{N} = f(\underline{r}, \underline{v}, t)\, d\tau$$

↑ sűrűségfv.: rendszert jellemző info.

adott fizikai meny. részecske értéke: $q(\underline{r}, \underline{v}, t)$

$$\bar{q} = \int_{\text{tér}} f(\underline{r}, \underline{v}, t) \cdot q(\underline{r}, \underline{v}, t)\, d\tau$$

nyomás kin. értelmezése:



m_0 töm. részecskék ütköznek rugalmasan a kocka falával

Δt időnként: $\Delta t = \frac{2L}{v_x}$

$V = L^3$

imp. átadás: $\Delta p = 2 m_0 v_x$

falra ható erő: $F_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{2 m_0 v_x^2}{2L} = \frac{m_0 v_x^2}{L}$

teljes falra ható erő: $\frac{N m_0 v_x^2}{L}$

nyomás: $\frac{F}{A} = \frac{N m_0 \cdot v_x^2}{A \cdot L}$, a mozgás izotróp: $v_x^2 = \frac{1}{3} \bar{v}^2$

$$p = \frac{N}{V} \frac{1}{3} m_0 \cdot \bar{v}^2$$

$$p = \frac{1}{3} n_v \cdot m_0 \bar{v}^2 \qquad \frac{1}{2} m_0 \bar{v}^2 = \varepsilon_m \text{ (átl. mozg. energia)}$$

$$\boxed{p = \frac{2}{3} n_v \cdot \varepsilon_m}$$

gázkeverék: Dalton-t.

$$p = \sum_i p_i = \frac{2}{3} \sum_i n_{v_i} \cdot \varepsilon_{m_i}$$

hőmérséklet:

$$pV = nRT = N k_B T \qquad k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\ \frac{J}{K}$$

$$\left.\begin{aligned} p &= n_V k_B T \\ p &= n_V \frac{2}{3}\varepsilon_m \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon_m = \frac{3}{2} k_B T$$

ekvipartíció tétele: az egy szabadsági fokra jutó átl. energia $\frac{1}{2} k_B T$

megj: • csak magas hőmérsékleten
• stat. fizből
• az energia egyenlően oszlik el a szabadsági fokok közt.

szabadsági fok: az energia kifejezésében szereplő négyzetes tagok száma

egyatomos: $f = 3$ transzláció

kétatomos: • csak transl. és forgás: $f = 5$ $\quad E_{forg.} = \frac{1}{2}\Theta_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2}\Theta_2 \omega_2^2$

• rezgés is: $f = 7$ $\quad E_{rezg.} = \frac{1}{2} D x^2 + \frac{1}{2}\mu v_x^2$ (x: tkp-hoz való elm. μ: redukált töm.)

N atomos:

$3 \times N$ – kényszerek = normálrezgések

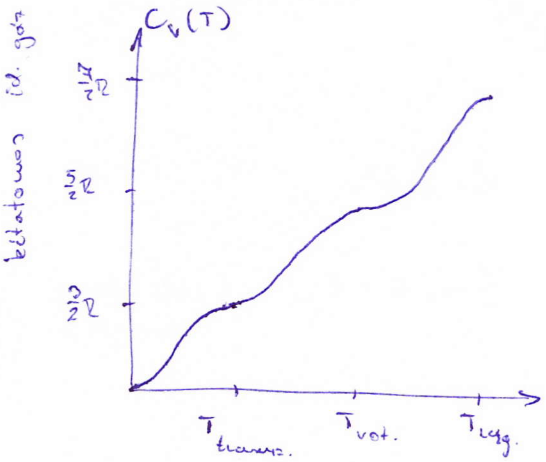
belső energia:

a részecskék összenergiája: $U = N \cdot \bar{\varepsilon}_m = \frac{f}{2} N k_B T$ (id. gáz)

fajhő kapacitás:

$C := \frac{dU}{dT}$ (C: fajhő) $\quad C_m$: mólhő $\qquad$ id. gáz: $U = \frac{f}{2} N k_B T = \frac{f}{2} nRT$

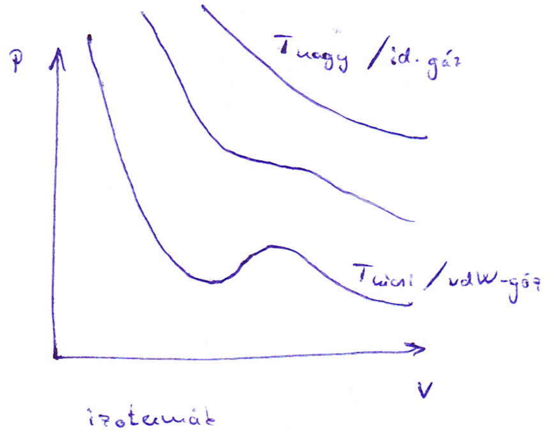
áll. V-n vett mólhő: $C_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$



2. Valódi gázok, transzportfolyamatok

Reális gázok: van der Waals gáz

- ideális gáz kibővítése 2 empirikus paraméterrel
  - véges kit. → kizárt térfogat
  - vonzás → kohézió



- $p = \frac{nRT}{V} \Rightarrow V \to V - nb \longrightarrow p = \frac{nRT}{V-nb}$

  emp. par.

- kok. ~~emp.~~ nyomás $\Rightarrow p \to p + \frac{an^2}{V^2}$

$$\boxed{\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)\left(V - nb\right) = nRT}$$

belső energia függ V-től

$$U_{vdW}(V) - U_{vdW}(V=\infty) = \int_\infty^V F(V')\, d\,s$$

$$dW = -F_k ds = -Ap\, ds = -p dV$$

$dW = -pdV$

összenyom. → munkavégzés

tágulás → külső munka neg.

koh. nyomás munkavég.

$$p_{koh} = -\frac{an^2}{V^2} < 0$$

$$U(V) - U(V=\infty) = -\int_\infty^V p_{koh}\, dV' = -an^2\left[-\frac{1}{V'}\right]_\infty^V = -\frac{an^2}{V}$$

$$U_{vdW} = \frac{f}{2} N k_B T - \frac{an^2}{V} \to U_{vdW} = U(T,V) \qquad \left(c_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \right)$$

Transzport fog.

- egy fiz. meny. egyenlőtlen eloszlása esetén a gradiens nem 0

  → áramlások (anyag → diffúzió, töltés, hő)

Boltzmann-egyenlet: $f(\underline{r}, \underline{v}, t)$ sűrűségfv.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{erő} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{diff.} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{ütközés}$$

ált. megoldás csak spec. esetben ismert

részecske mozgás:

- ütközés, ha két részecske kp-jának távolsága d-nél kisebb (d sugarú erő)
- erő térf.: $dV = \bar{v} \cdot d^2\pi\, dt =: \sigma \bar{v} dt$ σ: hatáskeresztmetszet

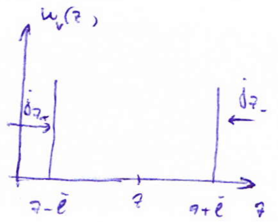
  $\bar{\ell} = \bar{v} dt \to dV = \sigma \cdot \bar{\ell} = \frac{V}{N} = \frac{1}{n_V}$ egy részecskére jutó térfogat

pl.: id. gáz:

$$\frac{V}{N} = \frac{k_B T}{p} \to \bar{\ell} = \frac{k_B T}{p \sigma}$$

kapcs. mikro- és makromenny.-k között

diffúzió:



$n_v(z)$: részecske áram sűr.

$j_{z+,-}$: balról é jobbról jövő részecske áram sűr.

diffúziós részecskeáramlás

$$j_z^{diff} = j_{z+} - j_{z-} \qquad \text{old: } j = \frac{1}{4} n_v \bar{v}$$

$$j_z^{diff} = \frac{1}{4}\bar{v}\left(n_v(z-\bar{l}) - n_v(z+\bar{l})\right)$$

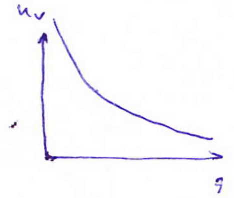
sorbafejtés-kör. $n_v(z-\bar{l}) = n_v(z) - \bar{l}\frac{dn_v}{dz} + \dots$

$n_v(z+\bar{l}) = n_v(z) + \bar{l}\frac{dn_v}{dz} + \dots$ ∫ elhany.

$$j_z^{diff} = -\frac{1}{2}\bar{l}\cdot\bar{v}\cdot\frac{dn_v}{dz}$$

megj.: $\bar{l}\cdot\frac{dn_v}{dz} \approx \Delta n_v$

ábra: –



3D: $j^{diff} = -\frac{1}{2}\bar{l}\bar{v}\,\nabla n_v$

$$\boxed{\underline{j}^{diff} = -D\,\nabla n_v}$$

Fick törvény

$D = \frac{1}{2}\bar{v}\bar{l}$

diffúziós állandó

- a prefaktor pontos értéke dimenziófüggő
- áll. D függ: p, T, m

$$D \sim \frac{1}{\sqrt{m}}$$

- pl.: urándús. $U^{235} \to U^{238}$

D-ben 0.68%-os kül.

hővezetés:

$\bar{E} = \frac{f}{2}k_B T$

$$j_z^{hő} = \frac{f\cdot k_B}{8} n_v \bar{v}(T_+ - T_-) \qquad \left[j_z^{hő}\right] = \frac{J}{m^2 s}$$

innen: $j_z^{hő} = -\lambda\frac{dT}{dz}$ $\qquad \lambda$: hővezetési eh.

3D: $\boxed{\underline{j}^{hő} = -\lambda\,\nabla T}$

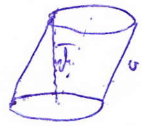
Fourier-tv.

$$\lambda = \frac{f k_B}{8} n_v\cdot\bar{v}$$

részecskeáram-sűrűség:

$f(v)$: a sebesség sűrűségfv-e

$dN_v = N\cdot f(v)\,dv$ azon részecskék száma, melyek sebessége $[v, v+dv]$ int-ban van



$v\,dt$

dA

dt idő alatt dA-n átlépő részecskék

$$dN_{dV,v,\vartheta,\varphi} = dN_v\cdot\frac{d\Omega_{\vartheta,\varphi}}{4\pi}\cdot\frac{dV}{V}$$

(dV-ben, v sebességgel, $d\Omega$ térszögben)

$$dN_{dA,dt} = \underbrace{\int dN_{dV,v,\vartheta,\varphi}}_{\text{féltérre és } \forall \text{ sebességre}} = \underbrace{\int \frac{N}{V} v f(v)\,dv}_{\text{sebességre}}\,\frac{1}{4\pi}\cdot\int_0^{\pi/2}\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi\;dt\,dA =$$

$$= \frac{1}{4}n_v\bar{v}\;dA\cdot dt$$

j: részecske áram-sűr.

$$dN = j\,dA\,dt \;\longrightarrow\; \boxed{j = \frac{1}{4}n_v\bar{v}}$$

3. A hőmérséklet, a barometrikus magasságformula, a Maxwell-féle sebességeloszlás.

Empirikus hőm.

- hőmérséklet: kiegyenlítődő, intenzív fizikai mennyiség, ≠ hőmennyiség

  pl.: melegebb láng ⟺ vastag „több hő van"

- tapasztalat:
  - adott körülmények a testek hőm. áll.
  - érintkező testek kiegyenlítődik
  - fizikai tul. függenek a hőtől

- termikus egyensúly tranzitív:

  $\boxed{A} \leftrightarrow \boxed{B} \wedge \boxed{B} \leftrightarrow \boxed{C} \Rightarrow \boxed{A} \leftrightarrow \boxed{C} \Longrightarrow \exists$ empirikus hőm. skála

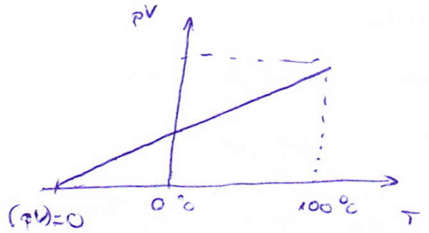
- kell:
  - mérendő tulajdonság
  - skálatörv.
  - egység
  - nullp.

  Celsius-sk.:
  - higany hossza
  - lineáris hőt.
  - 100 °C ~~forrás~~ saját gőzével érintkező víz
  - 0 °C olvadó vízjég keverék
  - 10^5 Pa

- ideális hőm. skála:

  $pV = nRT \rightarrow$ mérjük pV-t

  $$R = \frac{(pV)_{100} - (pV)_0}{n \cdot 100} \quad \text{mérhető}$$

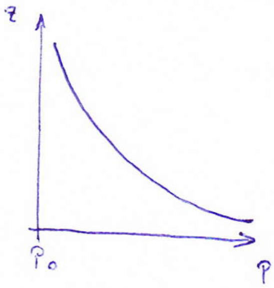


a skála nullpontja:

$$T_0 = \frac{(pV)_0}{nR} = \frac{100\,(pV)_0}{(pV)_g - (pV)_0} \quad \text{extrapolálják} \qquad T_0 = 273{,}15\ \mathrm{K} = 0\ ^\circ\mathrm{C}$$

megj.:
- ideális gázt. csak nagy hőm. és légköri nyomáson jó
- 0 K nem érhető el

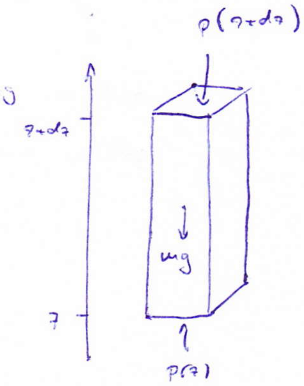
Barometrikus magasságformula:



T = áll, g = áll, z a tengerszint feletti magasság

$p(z) = ?$

mozgás egyenlet:



$$m = \varrho \cdot A \cdot dz$$

$$\big(p(z+dz) - p(z)\big) \cdot A + \varrho g A\, dz = 0$$

$$p(z+dz) = p(z) + \frac{dp(z)}{dz} \cdot dz + o(dz^2)$$

$$\frac{dp(z)}{dz} \cdot dz \cdot A = -\varrho g A\, dz$$

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\varrho g \qquad \varrho = \frac{m}{V} = \frac{N m_0}{V} = n_V \cdot m_0$$

$$p = n_V \cdot k_B \cdot T \rightarrow n_V = \frac{p}{k_B \cdot T}$$

$$\boxed{\frac{dp(z)}{dz} = -\frac{m_0\, g\, p}{k_B T}}$$

$$\boxed{p = p_0 \cdot e^{-\frac{m g z}{k_B T}}}$$

Maxwell-f. sebességeloszl.

$$f(\underline{v}) = A^3 \exp\left(-\alpha\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)\right) \qquad f(\underline{v}) = f_1(v_x) \cdot f_2(v_y) \cdot f_3(v_z)$$

$$f_1(v_x) = A \exp\left(-\alpha v_x^2\right)$$

$$\bar{v}_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 A \exp\left(-\alpha v_x^2\right) dv_x$$

tudjuk, h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot x^2 \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sigma^2 = \bar{x}^2$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\bar{v}_x^2}} \qquad \alpha = \frac{1}{2\,\bar{v}_x^2}$$

$$\boxed{f_1(v_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,\bar{v}_x^2}} \cdot e^{-\frac{v_x^2}{2\bar{v}_x^2}}}$$

ekvipartíció: $\bar{v}_x^2 = \frac{1}{3}\bar{v}^2$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2} m_0 \bar{v}^2 = \frac{3}{2} k_B T \rightarrow \bar{v}_x^2 = \frac{k_B T}{m_0}$$

$$\boxed{f(v) = \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2 k_B T}}}$$

---

hány részecske van $[v, v+dv)$-ban

$4\pi v^2 dv$ a térfogat

$$dN = N\, 4\pi v^2 dv \cdot f(v) = N\, F(v)\, dv$$

$$F(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m_0}{2 k_B T}\right)^{3/2} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2 k_B T}}$$

$F(v)$ tul.

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v\, F(v)\, dv = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m_0}} \qquad \bar{v}^2 = \int_0^{\infty} v^2 F(v)\, dv = \frac{3 k_B T}{m_0}$$

(Stern, Lammert-kísérlet)

átlagseb. $\sim \sqrt{T}$

eltérés $\sim \sqrt{T}$

4. Termodin. állapotjelzős, kh, belső energia, I. főt.

- fenomenologikus hőtan:
  - fizikai mennyiség:
    - extenzív: V, n, S (függ a mérettől) (összeadódik)
    - int.: p, μ, T (nem —11—) (kiegyenlítődik)
  - egyensúly: a rendszer jell. fizikai menny. időben és térben áll.

  0. főtétel: a rendszert magára hagyva eléri az egyensúlyt $\Leftrightarrow \exists$ egyensúly

  - kölcsönhatás: int. mennyiséget kül. hajtja az extenzívek megváltozását

kölcsönhatás	intenzív	extenzív	szigetelés
mechanikai	p	V	merev fal
termikus	~~μ~~ T	~~n~~ S	hőszig.
anyagi	μ	n	anyagáramlást gátló fal
elektromos	φ	Q	elektromosan szig. fal
elektromos dipól-kh.	E	p	—11—
mágneses dipól kh.	B	m	mágnesen árnyékoló fal

- fogalmak:
  - zárt rsz: nincs kh. a környezettel
  - folyamat: áll. jelzőt megvált.
    - kvázistatikus: lassan, egyensúlyi áll-on keresztül
    - reverzibilis: külső hatásokat megfordítva a rsz. a kiindulási áll.-ba jut vissza
  - állítás: ahány kh, annyi ? állapotjelző jellemzi

  topantalad rendszer elég ismerni az összes extenzívet és egy intenzívet

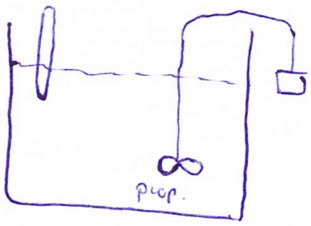
  túlhat. rendszer: több paraméter van $\to$ lesznek összefüggések

  pl. $pV - nRT = 0$

  ÖF: $f(p, V, T, S, \mu, \hat{N}, \ldots) = 0$

1. főtétel

tapasztalat szerint mech. ~~energia~~ munka hővé alakul könn.



Joule-kísérlet:

- mech. munka megváll. a test termikus állapotát
- a ua. 2 állapota közti átmenetkor mindig ugyanannyi munkát kell végezni

$$\Delta E_{mech} = \int \underline{F}\, d\underline{r} = W$$

analógia alapján definiálható a belső energia

jele: U, ext. áll. jelző

$\Delta U_{AB} = U_B - U_A$ útfüggetlen

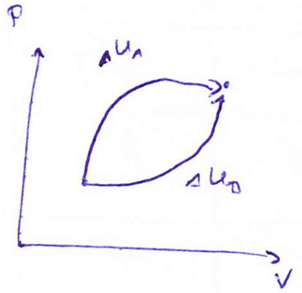
tapasztalat szerint U változtatható hőközléssel:

$$\Delta U_{AB} = W + Q \quad (W \text{ és } Q \text{ előjeles})$$

Q: rendszerrel közölt hő

W: rendszeren végzett munka

elemi folyamatokra:



$\Delta U_A = \Delta U_B$

$$dU = \delta Q + \delta W$$

dU: teljes diff. ← $\exists$, mert U útfüggetlen $\Leftrightarrow$ I. főt.

δQ, δW: útfüggő elemi munka/hő

$U = U(T,V)$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

U skalár menny: $dU = \nabla U \cdot (dT, dV)$

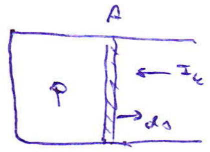
W, Q útfüggő

$$dU = \delta W + \delta Q \rightarrow \delta Q = dU - \delta W = \delta W^{ad} - \delta W$$

5. Általánosított munka, hőkap., fajhő, entalpia

munkavégzés fajtái:

· mechanikai:



$$\delta W = -F_k\, ds = -pA\, ds = -p\,dV$$

tágul → $\delta W < 0$

nyomódik → $\delta W > 0$

· elektromos:

$$\delta W = \varphi\, dQ$$

· anyagi:

$$\delta W = \mu\, dn$$

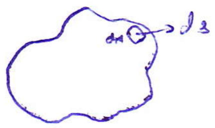
általános:

$$\delta W = \underset{\text{int.}}{X}\, \underset{\text{ext.}}{d\xi}$$

1. főtétel:

$$dU = \underbrace{\sum_i X_i\, d\xi_i}_{\delta W} + \delta Q$$

· mechanikai (ált.)



$$dF_k \cdot ds = -p\, dA\, ds$$

$$\delta W = \oint_A dF_k\, ds = -p \oint_A dA\, ds \Rightarrow \text{véges tef.}$$

$$W_{A\to B} = -\int_A^B p(V)\, dV$$

· tapasztalati hő:

· tapasztalat: egy testtel közölt hő arányos a test hőmérsékletváltozásával

$$\delta Q = k\, dT \qquad k: \text{hőkap.}$$

$$k = \underset{\text{fajhő}}{c} \cdot m = \underset{\text{mólhő}}{C}\, n \qquad k = \frac{dQ}{dT} \qquad c = \frac{1}{m}\frac{\delta Q}{dT} \qquad C = \frac{1}{n} \cdot \frac{\delta Q}{dT}$$

V = áll.

$$dU = \delta Q - p\,dV \rightarrow \delta W = 0$$

$$dU = \delta Q = n\, C_V\, dT$$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

$$\boxed{C_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V}$$

p = áll.

$$dU = \delta Q - p\,dV \qquad \delta Q = dU + p\,dV$$

H entalpia ⇒ $H = U + pV$

$$dH = dU + d(pV) = dU + p\,dV + V\,dp \qquad p = \text{áll.}$$

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT$$

$$dH_p = \delta Q = n\, C_p\, dT$$

$$\boxed{C_p = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p}$$

6. A fajhő spec. értéke, összefüggés, Gay-Lussac, Joule-Thomson

$$C_p = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \qquad C_v = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = n C_v dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$$

$$\delta Q_p = \cancel{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V d} \qquad n C_p dT = dU + p dV = n C_v dT + dV\left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right]$$

$$dT\,(C_p - C_v) = \frac{1}{n}\left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right] dV$$

legyen $V(T,p) \to dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT$ izobár esetben

$$\boxed{C_p - C_v = \frac{1}{n}\left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_T}$$

$$\beta_p = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad \text{izobár hőt. eh.}$$

$$C_p - C_v = \frac{1}{n}\left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right]\beta_p$$

ideális gáz: $pV = nRT$ $\qquad U = \frac{f}{2} nRT$ $\cancel{\ldots \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{f}{2}\ldots}$

$dU_v = n C_v dT$. $\qquad C_v = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{f}{2} R$

$dU_p = n C_p dT - p dV$ $\qquad$ ha dT azonos: $dU_p = dU_v$

$$n C_p dT - p dV = n C_v dT = n C_p dT - nR\,dT$$

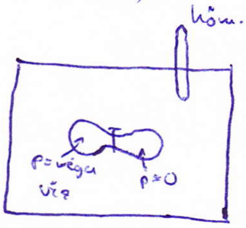
$dV = \frac{nR\,dT}{p}$ $\qquad \boxed{C_p - C_v = R}$ $\qquad C_p = \frac{f+2}{2} R$

ill. $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$ mert $U = U(T)$

$$\beta_p = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \to V = \frac{nRT}{p} \to \beta_p = \frac{nR}{pV} = \frac{1}{T}$$

$C_p - C_v = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{T}\cdot pV = R$ $\qquad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{f+2}{f}$ fajhő eh.

Gay-Lussac



1. csapot kinyitjuk
2. tap. szerint a víz hőm. nem vált.

$\left.\begin{array}{l} dU = 0 \\ \delta Q = 0 \end{array}\right\} \delta W = 0$ nincs munkavégzés de p és T vált.

$\Rightarrow U = U(T)$ (mérési hiba, $C_{víz}$ nagy)

id. gáz konc.

vdW-gázra:

$$U_{vdW} = U_{id} - \frac{an^2}{V} = n C_v dT - \frac{an^2}{V}$$

$dU = \delta Q + \delta W$

nincs hőt., adiabatikus folyg.

$U_1 = U_2$ miközben $V_1 \to V_2$

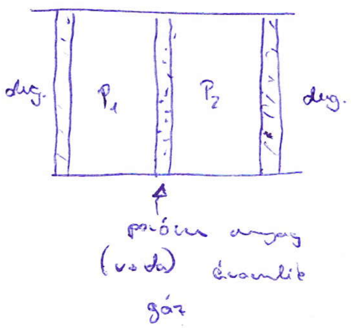
$$n C_v T_1 - \frac{an^2}{V_1} = n C_v T_2 - \frac{an^2}{V_2}$$

$$T_2 - T_1 = \frac{an^2}{n C_v}\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) < 0$$

a gáz lehűl

Joule-Thomson

nincs hőt., a dugattyúk lassan mozognak



p_1 és p_2 áll., $p_1 \neq p_2$

$$dU_1 = -p_1 dV_1$$

$$U_{vég} - U_{kezd.} = -\int_{V_1}^{0} p_1 dV - \int_{0}^{V_2} p_2 dV = \Delta U = p_1V_1 - p_2V_2$$

$$U_{vég} + p_2V_2 = U_{kezd.} + p_1V_1$$

$$H_{vég} = H_{kezd.} \longrightarrow \text{entalpia áll.}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

$$\mu_{J-T} = \frac{1}{nC_p}\left(V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right)$$

$$dH = 0 = \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)}_{nC_p} dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) dp$$

$$nC_p\, dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp = 0$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \mu_{J-T} = -\frac{1}{nC_p}\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T$$

J-T eh.

$\mu_{J-T} > 0$ $T\uparrow$ $p\uparrow$

$\mu_{J-T} < 0$ $T\uparrow$ $p\downarrow$

id. gáz: $U = U(T) \rightarrow H = H(T)$ $\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = 0$

$\mu = 0$

nincs J-T effektus

vdW-gázra:

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \qquad \Big/ \frac{\partial}{\partial T}$$

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - \frac{2an^2}{V^3}(V - nb)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = nR$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{nR}{\underbrace{p + \frac{an^2}{V^2}}_{\frac{nRT}{V-nb}} - \frac{2an^2}{V^3}(V-nb)} = \frac{nR}{\frac{nRT}{V-nb} - \underbrace{\frac{2an^2}{V^3}(V-nb)}_{\frac{2an^2}{V^2}}}$$

$V \gg nb$

$RT \gg \frac{an^2}{V}$

$$= \frac{nR(V-nb)V}{nRTV - 2an^2} = \frac{nR(V-nb)V}{nRTV\left(1 - \frac{2an^2}{nRTV}\right)} \approx \frac{V-nb}{T}\cdot\left(1 + \frac{2an^2}{nRTV}\right)$$

$$\mu_{J-T} = -\frac{1}{nC_p}\left[V - (V-nb) - \frac{V-nb}{V}\cdot\frac{2an^2}{nRT}\right]$$

$$\boxed{\mu_{J-T} = \frac{1}{C_p}\left(\frac{2a}{RT} - b\right)}$$

$$dS = \frac{1}{T}(dH - Vdp)$$

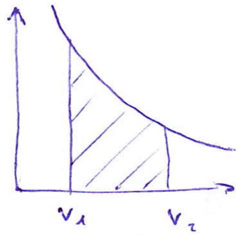
$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp$$

$$dS = \underbrace{\frac{1}{T}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p}_{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p} dT + \frac{1}{T}\left(\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V\right) dp$$

11. Ideális gáz áll. változásai, körfolyamatok

reverzibilis, kvázistatikus állapotváll. → idealizált

• izoterm $T =$ áll.



$pV = nRT =$ konst $\Rightarrow p(V) = \frac{nRT}{V}$

$U =$ áll.

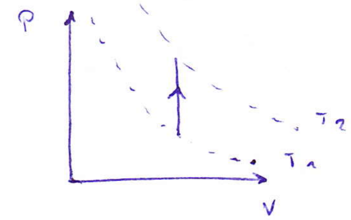
$$W = -\int_{V_1}^{V_2} p(V')\,dV' = nRT \ln\frac{V_1}{V_2}$$

I. főt.

$W = -Q$

hőt vesz fel → tágul
hőt ad Q → összenyomják

• izochor:



$\Delta U = Q$

$W = 0$

$\Delta U = nC_v(T_2 - T_1)$

adiabata / izoterma

meredekség:

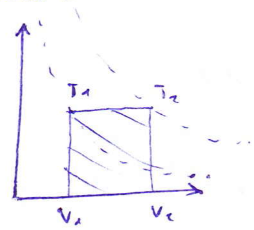
ad: $\frac{dp}{dV} = \cancel{(-1)}\frac{p}{V} - \gamma\frac{p}{V}$

izot: $\frac{dp}{dV} = (-1)\frac{p}{V}$

$\gamma > 1 \to -\gamma < -1$

adiabata meredekebb

• izobár



$\Delta U = Q + W = Q - p\Delta V = U_2 - U_1$

$Q = nC_p(T_2 - T_1)$

$Q = U_1 + p_1V_1 - (U_2 + p_2V_2)$

$Q = \Delta H$

• adiabatikus / izentropikus

$dU = -pdV$

$nC_v dT = -pdV = -\frac{nRT}{V}dV$

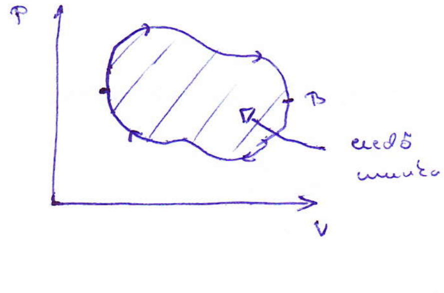
$$\boxed{\frac{dT}{T} = -(\gamma - 1)\frac{dV}{V}}$$

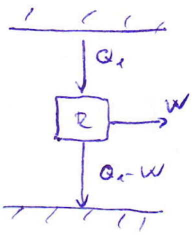
$\frac{R}{C_v} = \frac{C_p - C_v}{C_v} = \gamma - 1$

$T \cdot V^{\gamma-1} =$ áll, $pV^{\gamma} =$ áll

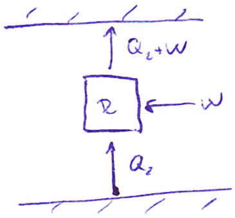
$T = \frac{pV}{nR}$

Körfolyamatok:





$W < 0$
hőerőgép



$W > 0$
hűtőgép

$\Delta U_{körf.} = 0$

$Q = -W$

Σ a felvett / leadott hők előjeles összege

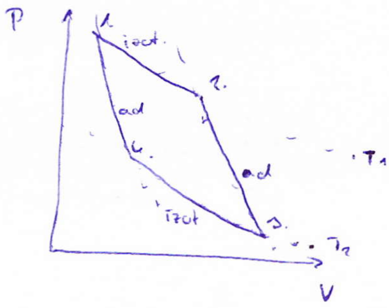
$$\eta := \frac{W_{gáz}}{Q_{fel}} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} < 1$$

mert $Q_2 < 0$ és $|Q_2| < Q_1$

hatásfok

Carnot-körf.

$T_1 > T_2$



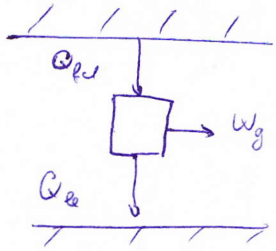
1→2 $\quad Q_1 = Q_{1\to2} = -W_{12} = nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} > 0$

2→3 $\quad W_{23} = U_3 - U_2 = nC_v(T_2 - T_1) < 0$

3→4 $\quad Q_2 = Q_{3\to4} = nRT_2 \ln\frac{V_4}{V_3} < 0$

4→1 $\quad W_{41} = U_4 - U_1 = nC_v(T_1 - T_2) > 0$

$$W_g = \sum_i -W_i = nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} + nRT_2 \ln\frac{V_4}{V_3}$$



hatásfok: $\eta = \frac{W_g}{Q_{fel}} = \frac{W_g}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_{le}}{Q_{fel}}$

$$\eta = 1 + \frac{nRT_2 \ln\frac{V_4}{V_3}}{nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}}$$

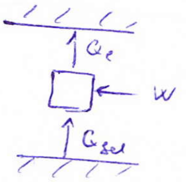
adiabata: $T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_4^{\kappa-1}$

$T_1 \cdot V_2^{\kappa-1} = T_2 V_3^{\kappa-1}$

$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_4}{V_3}$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$$

inverz Carnot



$Q_{le} = W + Q_{fel}$ $\qquad k_H = \frac{Q_{le}}{W} > 1$ $\qquad k_H = \frac{1}{\eta} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} > 1$

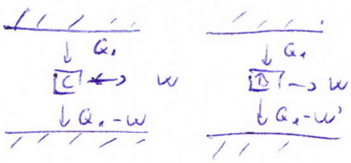
jósági tényező

pl.: inverter klíma

Carnot-tétel: két hőt. között működő reverzibilis hőtőgép hatásfoka max, és anyagi minőségtől független

Áll. Carnot-körf. is igen max hatásfokú

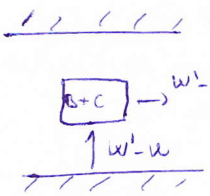
Biz indirekt



$\eta_C = \frac{W}{Q_1}$ $\quad \eta_D = \frac{W'}{Q_1}$

$\eta_D > \eta_C \to W' > W$

összekötve Carnot + inv. + D hőgép.



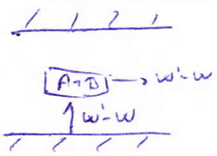
II. főt. miatt nem lehet

Áll. Carnot-körf. hatásfoka anyagi min. független

két Carnot összekötve

A: id. gáz $\quad \eta_A = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ $\qquad$ legyen $\eta_D > \eta_C$

D: bármi más $\quad \eta_D$



II. főt. miatt $W' - W = 0$

$\eta_D = \eta_C$

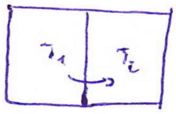
A Carnot-körf. max. hatásfokú ($\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$), és a hatásfok anyagi min.-től független

8. A hőtan II. főtétele, entrópia, Clausius-egyenlőtlenség, fundamentális egyenlet

II. főtétel:
· megfigy: - meleg tárgy lehűl a körny. hőmérsékletére
- meleg + hideg: meleg hűl, hideg melegszik
- mechanikai energia hővé alakul
- leesett tárgyak [illegible]

· jelenségek fordítottja nem mond ellent az I. főtételnek

$T_1 < T_2$



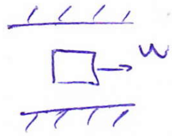
redukált hő:

$$\sum_i \frac{Q_i}{T_i} = -\frac{Q}{T_1} + \frac{Q}{T_2} = Q\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) \stackrel{<}{\neq} 0$$ ⇒ egyért. előjel

megfogalmazás:

Carnot: nem lehet tettel úgy hőt közölni, h. teljesen munkává alakítja

Thomson: nincs olyan, h. egy rendszer energiája csökken, és ez teljesen munkává alakul



Clausius: nincs olyan spontán folyamat, ami csak abból áll, h. hő megy hidegebb helyről melegebbre

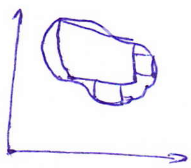
Planck: $\eta < 1$ ⇔ hőerőgépként működő folyamat hatásfoka kisebb, mint 1
⟺ nincs másodfajú perpetuum mobile

megj.: I. főt.: milyen folyamatok mehetnek végbe
II. főt.: ténylegesen melyik fog végbemenni

entrópia: Carnot-ra: $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ áll. reverzibilis folyamat.

reverzibilis folyamatra:

$$\oint \frac{\delta Q_{rev}}{T} = 0$$



közelíthető sok pici Carnot-val

Clausius: a red. hő egy állapotfv. teljes differenciálja ⇒ $\sum_i \frac{\delta Q_i}{T_i} = 0$
⇒ ez az entrópia

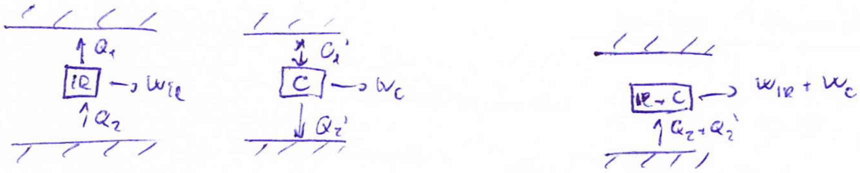
$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$

extenzív, adiabatikus ⇒ S=áll.

rev: $S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \int_A^B dS$ csak hőcserével változhat az entrópia reverzibilis esetben

fázisátalakulás: $\Delta S = \frac{\Delta Q_{rev}}{T}$ ← látens hő, T – fix irreverzibilis esetben:

összekötve: $Q_1' = -Q_1$



II. főt.: $W_{ir} + W_c \le 0$

IR: $W_{ir} = Q_1 + Q_2$

C: $W_c = Q_1' + Q_2'$ $\quad \frac{Q_1'}{T_1} + \frac{Q_2'}{T_2} = 0 \to Q_2' = T_2 \frac{Q_1'}{T_1}$

$W_{ir} + W_c = Q_2 + Q_1 \frac{T_2}{T_1} \le 0 \qquad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \le 0$

irrev. kf.: $\oint \frac{\delta Q^{irrev}}{T} < 0$

$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$

$\int_A^B \frac{\delta Q_{rev}}{T} + \int_B^A \frac{\delta Q_{irrev}}{T} < 0 \to \int_A^B \frac{\delta Q^{irrev}}{T} < S_B - S_A$

Clausius-egyenlőtlenség:

$\oint \frac{\delta Q}{T} \le 0 \qquad \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \le S_B - S_A \qquad \frac{\delta Q}{T} \le dS$

mivel $\delta Q^{irrev} < TdS \Rightarrow \exists\, dS^{prod} > 0$

$dS = dS^{prod} + \frac{\delta Q^{irrev}}{T}$

zárt rsz.: $\delta Q = 0$

$dS = dS_{prod}$

véges folyg.

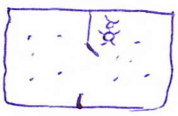
$S_B - S_A \ge \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = 0 \to S_B - S_A \ge 0$

entrópianöv. tétele:

folyamatok iránya egyértelmű, az entrópia mindig nő, nem csökkenhet

diszkusszió:

- zárt rsz. egyensúly: $S = max$
- univerzum „hőhalál": nem létezik az idő
- fekete lyuk entrópia → Hawking-sug.
- reversible computing: Landauer, inf. entrópia
  1 bit $k_B T \ln 2$ energia
- Maxwell-démon



lassú bal, gyors jobb
energiát emel a magától,
így nem megy meg semmi

fundamentális egyenlet:

$dU = \delta Q + \delta W$ $\quad$ irrev. nem igaz: $\delta Q \ne TdS$, $\delta W \ne -pdV$

rev: $dU = TdS - pdV$

egyben igaz

$$\boxed{TdS - pdV = \delta Q + \delta W = dU}$$

ált. (pl. anyagi)

$dU = TdS - pdV + \mu dn$

$$\boxed{dU = TdS + \sum_i x_i \, d\xi_i}$$

$\delta W^{rev}_{rev} + \delta Q^{rev} = \delta W^{irrev} + \delta Q^{irrev}$

$dS = dS^{prod.} + \frac{\delta Q^{rev}}{T} \qquad TdS - pdV = \delta Q + \delta W$

$\delta W = -pdV + W_*^{irr}$

$$\boxed{TdS^{prod} = W_*^{irr.}}$$

$TdS - pdV = TdS - TdS^{prod.} - pdV + W^{irr.}$

9. Ideális gáz ent. , Gay-Lussac kísérlet

ideális gáz entrópiája

$U = U(T)$ $\quad pV = nRT$ $\quad dS = \frac{1}{T}dU + \frac{p}{T}dV$

$$dU = n C_v dT$$

$dS = n C_v \frac{dT}{T} + \frac{p}{T}dV$ $\qquad \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{nC_v}{T} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{p}{T} = \frac{nR}{V}$

$S = S(T,V)$ $\qquad dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$

$$S_B - S_A = \int_A^B dS$$

$S(T,V) = S_0(T_0,V_0) + nC_v \ln\frac{T}{T_0} + nR\ln\frac{V}{V_0}$ $\qquad T \to 0 : \; S = -\infty$ BAJ

id. gáz koncepció nem jó alacsony hőm.-n

$S(p,V) = S_0 + nC_v \ln\frac{p}{p_0} + nC_p \ln\frac{V}{V_0}$

$S(p,T) = S_0 + nC_v \ln\frac{p}{p_0} - nR\ln\frac{T}{T_0}$

Gay-Lussac:

$V_1 \to V_2$ tágul $\quad \Delta U = 0 \quad \Delta T = 0$

$p_1 \to p_2$ csökken $\quad W = 0 \quad Q = 0$

$S_1(T_1,V_1) = S_0 + nc_v \ln\frac{T_1}{T_0} + nR\ln\frac{V_1}{V_0}$ $\qquad \Delta S = nR\ln\frac{V_2}{V_1} > 0 \Rightarrow$ spontán végbemegy irreverzibilis

$S_2(T_1,V_2) = S_0 + nc_v \ln\frac{T_1}{T_0} + nR\ln\frac{V_2}{V_0}$

egyszerre izoterm és adiabat. ξ → kilép a p-V diagramból
→ az áll. jelzőt nem jól veszi.

kiegyenlítődési folyamat

T_1, p_1	T_2, p_2
V_1, U_1	U_2, V_2

$dV = dV_1 + dV_2 = 0 \to dV_1 = -dV_2$ $\qquad dS_1 = \frac{dU_1}{T_1} + \frac{p_1}{T_1}dV_1$

$dU = dU_1 + dU_2 = 0 \to dU_1 = -dU_2$ $\qquad dS_2 = \frac{dU_2}{T_2} + \frac{p_2}{T_2}dV_2$

$\left.\begin{matrix} dS_1 \\ dS_2 \end{matrix}\right\} dS = dS_1 + dS_2$

$$\boxed{dS = dU_1\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) + dV_1\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right)}$$

izobár: $p = p_1 = p_2 \quad T_1 > T_2$

$$dS = \underbrace{\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)}_{0} \cdot \underbrace{\left(dU_1 + p\,dV_1\right)}_{\delta Q_1 < 0}$$

1. hőt ad le

izoterm: $T_1 = T_2 = T \quad p_1 > p_2$

$$dS = \frac{dV_1}{T}\cdot(p_1 - p_2) > 0 \qquad dV_1 > 0$$

1. nő

belső energia térf. függése

$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = ?$ $\qquad U = U(T,V)$ $\qquad dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV$

$dS = \frac{1}{T}(dU + p\,dV)$

$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$

$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ $\qquad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \frac{p}{T}$

Young-t.: $\cancel{\frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V}} = -\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + \cancel{\frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V}} - \frac{p}{T^2} + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$

$$\boxed{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = -p + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}$$

ált.

$$\boxed{\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_T = X - T\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_\xi}$$

entrópia és entalpia

$$H = U + pdV$$

$$dH = dU + d(p \cdot V) = dU + pdV + Vdp \qquad dH = TdS + Vdp$$

$$\boxed{dS = \frac{1}{T}\left(dH - Vdp\right)}$$

10. A statisztikus fiz. alapjai, Boltzmann-eloszl. kvantumstat.

az entrópia stat. értelmezése:

fenomenológikus $\Leftrightarrow$ statisztikus $\rightarrow$ · Boltzmann-hipotézis: az egyensúly a legvalószínűbb állapot

$\downarrow$ entrópia a kapocs

$$dS = \frac{1}{T}\left(dU - pdV\right)$$

· makroáll.: adott makroszkop. állapotjelzőkkel jellemzett áll. (p, V, u, T)

· mikroáll.: a részecskék összességét jellemző értékek sokasága (p, r)

egy makroáll. több mikroállapotot jelenthet

Boltzmann-hip: az a makroáll. valósul meg, amely a legtöbb mikroállapotot valósít meg

entrópia:
- egyensúlyban max
- jelölje W a mikroáll. számát (nagy $\sim (6\cdot 10^{23})^{10^{23}}$)
- S ext. $\Rightarrow$ alrendszerekkel összeadódik

$W_1, W_2 \rightarrow$ eredő $W = W_1 \cdot W_2$

$S = g(W)$ $\quad S = S_1 + S_2 = g(W_1) + g(W_2) = g(W_1 \cdot W_2)$

$\Rightarrow$ csak ln oldja meg

$$\boxed{S = k_B \ln W}$$

Gibbs-féle entrópiaformalizmus:

$$\frac{S}{N} = -k_B \sum p_i \ln p_i$$

p_i: i-edik mikroáll. valószínűsége

$\downarrow$

S magában statisztikailag, ebből (F.E.-vel) a többi áll.jelző

köv: hőtani folyamatok ~~statisztikai~~ valószínűségi jellegűek (nem abszolútak) $\quad$ S a kapcsolat feno. és stat. közt.

statisztikai modellek

megkülönböztethetetlen részecskék (k db)

ism. perm.

$$W(N_1, N_2, \dots, N_k) = \frac{N!}{\prod N_i!} \qquad \sum N_i = N$$

$\ln W$ maximumát keressük

$$N! = \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N \qquad \ln N! = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln N + N\ln N - N \approx N\ln N - N$$

kényszer: Lagrange multiplikátor ($L(x,y) = f(x,y) + \lambda(g(x,y) - c)$; $dL = 0$)

$$L(N_1, \dots, N_k, \lambda) = \ln W + \lambda\left(\sum_i N_i - N\right)$$

$$\ln W = N\ln N - N - \left[\sum_i (N_i \ln N_i - N_i)\right] = N\ln N - \sum_i N_i \ln N_i$$

$$\frac{\partial \ln W}{\partial N_i} + \lambda \cdot \frac{\partial \sum N_i}{\partial N_i} = -\ln N_i + \lambda = 0$$

$$\ln N_i = \lambda \rightarrow N_i = N_j \quad \forall i,j$$

Maxwell-Boltzmann-eloszlás

a részecskék energia szerint rendezve

$$\sum N_i = N \quad , \quad \sum N_i E_i = E$$

$$L = \ln W + \lambda_1 \left(\sum N_i - N\right) + \lambda_2 \left(\sum N_i E_i - E\right)$$

$$-\ln N_i + \lambda_1 + \lambda_2 E_i = 0 \qquad \boxed{N_i = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2 E_i}}$$

$A = e^{\lambda_1}$, $\beta = -\lambda_2$ és $\sum N_i = N$

$$A \sum e^{-\beta E_i} = N \qquad A = \frac{N}{\sum e^{-\beta E_i}} \qquad z = \sum e^{-\beta E_i} \text{ állapotösszeg}$$

$$N_i = \frac{N}{z} \cdot e^{-\beta E_i} \qquad p_i = \frac{1}{z} \cdot e^{-\beta E_i}$$ i-edik mint betöltési valószínűsége

entrópiával:

$$S = k_B \ln W = k_B N \ln z + k_B \beta E$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right) = \frac{1}{T} \qquad U = V \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right) = k_B \beta = \frac{1}{T} \to \boxed{\beta = \frac{1}{k_B T}}$$

Ezzel az M-B eloszl.

$$N_i = \frac{N}{\sum e^{-\frac{E_i}{k_B T}}} \cdot e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

Gibbs-féle entrópiaform.

$$\frac{S}{N} = -k_B \sum_i p_i \ln p_i \quad , \text{ahol } p_i = \frac{1}{z} \cdot e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

$$\frac{S}{N} = -k_B \sum_i p_i \left(-\ln z - \beta E_i\right) = k_B \ln z + k_B \beta \frac{E}{N}$$

$$\sum p_i E_i = \frac{E}{N}$$

kvantumstatisztikák

Exp. szerint adott energiaszinten két fajta részecske

csak 1 ős → fermionok (e^-, kvark, neutrínó) feles spinű

bármennyi → bozonok (foton, gluon) egész spin

spin: saját impulzusmomentum

fermionok:

- i-edik áll. betöltetlen v. 1-szeresen betöltött
- p_0: i-edik betöltetlen, p_1: betöltött

Boltzmann-arányok

$$\frac{p_1}{p_0} = e^{-\beta E} \qquad p_0 + p_1 = 1$$

E: többletenergia, ha az i-edik áll. betöltött

betöltés várható értéke

$$\langle n \rangle = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 = \frac{1}{1 + e^{\beta E}}$$ ← Fermi-Dirac-eloszlás

véges kémiai pot-nál:

$$f = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1}$$

bozonok:

minden áll. többszörösen is lehet töltve

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon}} \qquad \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$$

$$p_n = \frac{e^{-n\beta\varepsilon}}{1+e^{-\beta\varepsilon}+e^{-2\beta\varepsilon}+\dots+e^{-\beta n\varepsilon}}$$

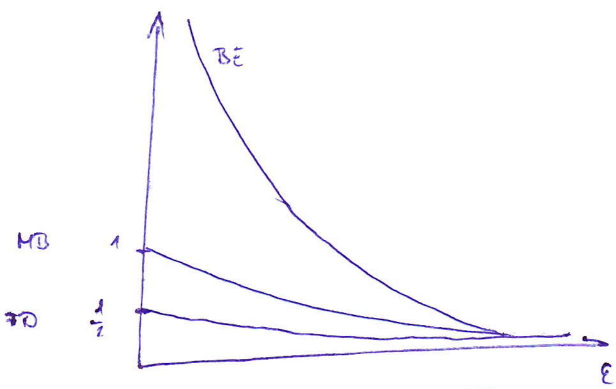
nevező: $Z = \frac{e^{-(n+1)\beta\varepsilon}-1}{e^{-\beta\varepsilon}-1}$ $\quad n \to \infty \quad$ $Z = \frac{1}{e^{-\beta\varepsilon}-1}$

várható érték:

$$\langle n \rangle = \sum_i i\, p_i = \frac{1}{Z}\cdot \sum_i i\, e^{-i\beta\varepsilon} \qquad \frac{\partial}{\partial(-\beta\varepsilon)} e^{-i\beta\varepsilon} = i\, e^{-i\beta\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{Z}\cdot\frac{\partial}{\partial(-\beta\varepsilon)}\cdot\sum_i e^{-i\beta\varepsilon} = \frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial(-\beta\varepsilon)} Z = \cancel{\frac{1}{Z}}\, \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{1-e^{-\beta\varepsilon}}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon}-1}$$ ← Bose-Einstein eloszlás



Fermi-Dirac: $f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon}+1}$ fermion

Bose-Einstein: $f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon}-1}$ bozon

Maxwell-Boltzmann: $f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon}}$ klass.

→ egymásba konvergálnak, ha $\varepsilon \gg k_B T$

11. Termodin. potenciálok

Termodinamikai pot.

- ~~Skon~~ V áll.
  $dS = 0, \cancel{dV = 0 \Rightarrow dU \leq 0}$, egy
- U: belső energia, term. változói: S, V

  $dU = TdS - pdV$ részecskék összes mechanikai energiája
- H: entalpia

  $H = U + pV$

  $dH = dU + d(pV) = dU + Vdp + pdV = TdS + Vdp \Rightarrow H(S,p)$

  kémiai, $dH = \delta Q_p$
- F: szabad energia

  $F = U - TS$

  $dF = \cancel{SH} - pdV - SdT \Rightarrow F(V,T)$

  rendszerből kinyerhető összes mech. energia
- G: szabadentalpia, Gibbs-pot.

  $G = U - TS + pV$

  $dG = Vdp - SdT \Rightarrow G(p,T)$

  nem termikus és ~~kémiai~~ mechanikai munkavégzés

a termodin. pot. term. változóikkal kifejezve fund. ~~e~~ fv-ek

termodin. pot. $\xrightarrow{\text{analóg}}$ mech., elektr. pot

megmaradó mennyiséget

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "-TS"] \arrow[d, "+pV"'] \arrow[dr, "-TS+pV"] & F \arrow[d, "+pV"] \\ H \arrow[r, "-TS"'] & G \end{tikzcd}$$

- Euler-tétel

  λ-szorosára növelt rendszer esetében

  $U(\lambda S, \lambda V, \lambda n) = \lambda U(S,V,n)$

  $H(\lambda S, p, \lambda n) = \lambda \cdot H(S,p,n)$

  $F(T, \lambda V, \lambda n) = \lambda \cdot F(T,V,n)$

  $G(T, p, \lambda n) = \lambda \cdot G(T,p,n)$

Euler-tétel: ha $f(x)$-re igaz, h. $f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x)$, akkor $f(x) = cx$

Biz.:

$$\frac{\partial f(\lambda x)}{\partial \lambda} = \frac{\partial f(\lambda x)}{\partial \lambda x} \cdot \frac{\partial \lambda x}{\partial \lambda} = f'(x) \cdot x$$

$\overset{\shortparallel}{f(x)}$ $\qquad f(x) = f'(x) \cdot f(x)$

Vegyük:

$U = TS - pV + \mu n$

$H = TS + \mu n$

$F = -pV + \mu n$

$G = \mu n$

12. A fund. fv-ek diff. összefüggései, Maxwell-rel., Gibbs-Helmholtz-e.

$dU = TdS - pdV$, $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -p$$

$dH = TdS + Vdp$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p = T \qquad \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S = V$$

$dF = -SdT - pdV$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p$$

$dG = Vdp - SdT$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V \qquad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S$$

Young-tétellel : Maxwell-relációk

$U: \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V$ $\qquad H: \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p$

$F: -\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ $\qquad G: \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$

Gibbs-Helmholtz-e.

$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S \qquad F = U - TS$ $\qquad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S \qquad G = H - TS$

$$\boxed{F = U + T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V} \qquad \boxed{G = H + T\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p}$$

$d\left(\frac{F}{T}\right)$

$\cancel{\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V} = \frac{\cancel{FdT}\; TdF - FdT}{T^2} =$

$= \frac{T(-\cancel{T}dS - pdV) - FdT}{T^2} = \frac{-(F+TS)dT - pdV}{T^2}$

$= \frac{-UdT - pdV}{T^2} = -\frac{U}{T^2}dT - \frac{p}{T^2}dV$

$d\left(\frac{F}{T}\right) = \left(\frac{\partial(\frac{F}{T})}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial \frac{F}{T}}{\partial V}\right) dV$

$$\boxed{-\frac{U}{T^2} = \left(\frac{\partial(\frac{F}{T})}{\partial T}\right)} \qquad \boxed{-\frac{H}{T^2} = \left(\frac{\partial(\frac{G}{T})}{\partial T}\right)}$$

13. A hőtan III. főtétele, adiabat. lemágn., gumiszalag

motiváció:

$S(T=0) = ?$

$U(T=0) = ?$

Carnot: $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ $\quad T_2 = 0 \rightarrow \eta = 1$

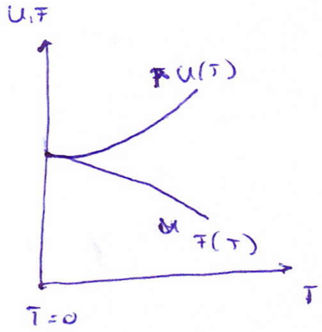
Walter Nernst:

kémiai reakcióhő csökk. és 0-ba tart

Planck III. főt.

$$\lim_{T\to 0} U = \lim_{T\to 0} F, \quad \lim_{T\to 0} \frac{\partial U}{\partial T} = \lim_{T\to 0} \frac{\partial F}{\partial T}$$

első rendben érintkeznek



$$S = \frac{U-F}{T}$$

$$\lim_{T\to 0} S(T) = \lim_{T\to 0} \frac{U-F}{T} \underset{L'H}{=} \lim_{T\to 0} \frac{\frac{\partial U}{\partial T} - \frac{\partial F}{\partial T}}{1} = 0$$

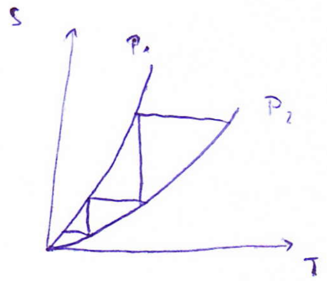
köv:

$$S = S_0 + \int_0^T \frac{\delta Q^{rev}(T')}{T'} = S(T=0) + \int_0^T \frac{C(T')}{T'} dT' \leftarrow \text{0-ba tart}$$

$C(T)$ is legalább lineárisan tart 0-ba

összefoglalva:

- $T \to 0$ $\quad U = F$ és $\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial F}{\partial T}$
- $S(T=0) = 0$
- $C(T=0) = 0$
- $T = 0$ nem érhető el véges lépésben



pl.: $\beta_p(T=0) = 0$ $\qquad -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = V\beta_p$

adiabatikus lemágnesezés:

$\boxed{\swarrow\uparrow\searrow}$ $T, B=0$

$\downarrow +B$

$\boxed{\uparrow\uparrow\uparrow}$ $B, T+\Delta T$

$\downarrow -Q$

$\boxed{\uparrow\uparrow\uparrow}$ B, T

$\downarrow B=0$

$\boxed{\swarrow\uparrow\searrow}$ $B=0, T-\Delta T$

itt hűt $\leftarrow$ $\downarrow +Q$

$\boxed{\swarrow\uparrow\searrow}$ B, T

gumiszalag:

megnyújtom → rendeződés, melegedés

↓

hagyom lehűlni

↓

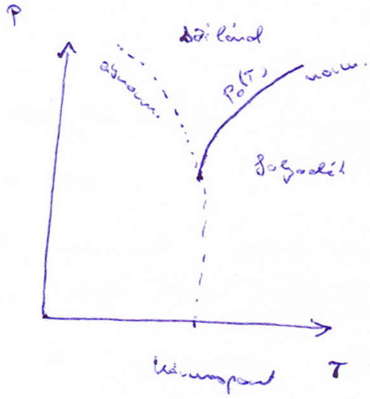
hirtelen elengedem → rendezetlen, hideg

↓

hagyom felmelegedni → hűt

14. Fázisátalakulások

- minden fázis határán áll. változó fázisátalakulás, fordítva nem (szupravez., mágn. f.
- fázishat.: fáz. tul. ugrás, amelyen megváltoznak
- hármaspont: 3 fázis egyensúlya
- krit. pont: folyadék és gáz nem megkülönböztethető



1.) áll. p-n köt. közlünk – csepp., megolvad

$T = $ áll. → energia a kötések felszakítására fordul

– olvadáshő, fagyáshő

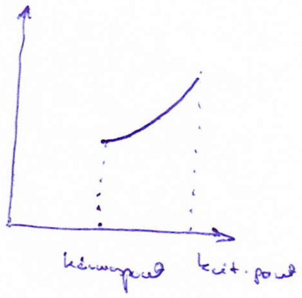
Le Chatelier–Braun-elv: a rendszer külső hatásra úgy reagál, h. a hatást csökkentse

abnorm.: $p\uparrow$ $T_0\downarrow$

norm.: $p\uparrow$ $T_0\uparrow$

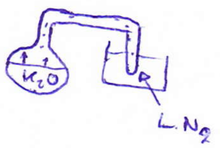
$P = P_0(T)$ olvadási görbe

2.) párolgás ↔ csepp.



telített gőz: időegység alatt elpárolgó részecskék = lecsapódó részecskék

pl.: dezodor, kriofor

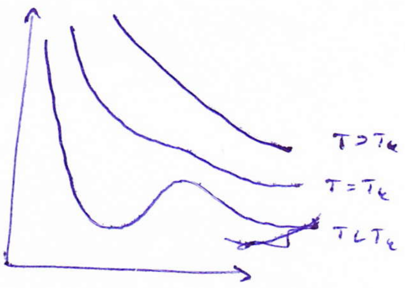


$$\left(p + \frac{a}{V_M^2}\right)(V_M - b) = RT$$

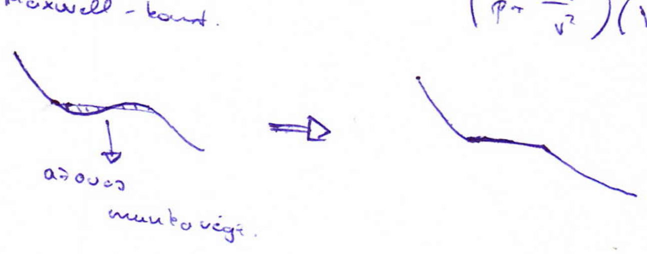
$$V_M = \frac{V}{n}$$

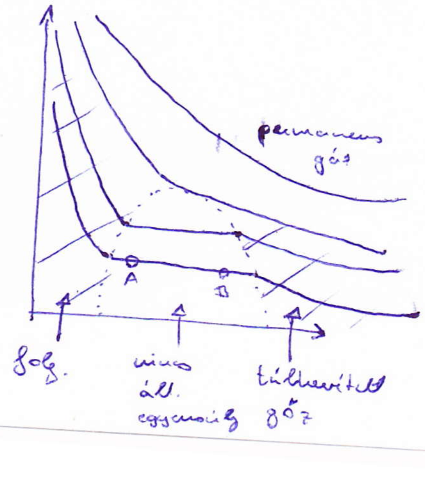
$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

Valódi gázok:



Maxwell-konst.



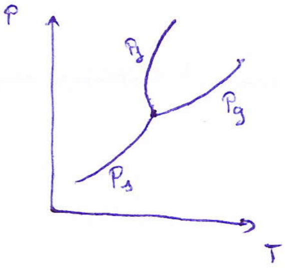


krit. hőm. érinti a burkolót

A: $\boxed{G / L}$

B: $\boxed{G / L}$

3., szilárd - gáz átmenet



szublimáció

∃ krit. pont <=> ∄ rendezett - rendezetlen átmenet

kísérletek:

- jégtömbön drót + súly => átvágja, de a jég visszafagy
  => a jég abnormális,
- sós vízben lassabban olvad el a jégkocka, mert a sós víz nehezebb, az édes lesz felül, kevesebb hőt tud elvonni
- He diffundál a PET palackból
- szárazjég szublimál, hármasponton van fölf.

15. Fázisegyensúly felt., Clausius - Clapeyron - e.

Zárt rsz: $\sum U =$ áll, $\sum V =$ áll, $\sum n =$ áll.

egyensúly: $S = \max$, $dS = 0$

$$S = S_1(U_1, V_1, n_1) + S_2(U_2, V_2, n_2)$$

$$dU_1 = -dU_2 \qquad dS = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right) dU + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right) dV + \left(\frac{\partial S}{\partial n}\right) dn$$

$$dV_1 = -dV_2$$

$$dn_1 = -dn_2$$

$$dS = \left(\frac{\partial S_1}{\partial U_1} - \frac{\partial S_2}{\partial U_2}\right) dU_1 + \ldots = 0 \qquad dS = \frac{1}{T}\left(dU + p\,dV - \mu\,dn\right)$$

$$\left.\frac{\partial S_1}{\partial U_1}\right|_{n_1, V_1} = \left.\frac{\partial S_2}{\partial U_2}\right|_{n_2, V_2} \Rightarrow T_1 = T_2$$

$$\left.\frac{\partial S_1}{\partial V_1}\right|_{U_1, n_1} = \left.\frac{\partial S_2}{\partial V_2}\right|_{U_2, n_2} \Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow p_1 = p_2$$

$$\left.\frac{\partial S_1}{\partial n_1}\right|_{U_1, V_1} = \left.\frac{\partial S_2}{\partial n_2}\right|_{U_2, V_2} \Rightarrow \mu_1 = \mu_2$$

fázishatáron: $T_1 = T_2$, $p_1 = p_2$, $\mu_1 = \mu_2$

$$d\mu_1 = 0 = \left.\frac{\partial \mu_1}{\partial T}\right|_p dT + \left.\frac{\partial \mu_1}{\partial p}\right|_T dp = \left.\frac{\partial \mu_2}{\partial T}\right|_p dT + \left.\frac{\partial \mu_2}{\partial p}\right|_T dp \Rightarrow \frac{dp}{dT} = \frac{\left.\frac{\partial \mu_1}{\partial T}\right|_p - \left.\frac{\partial \mu_2}{\partial T}\right|_p}{\left.\frac{\partial \mu_2}{\partial p}\right|_T - \left.\frac{\partial \mu_1}{\partial p}\right|_T}$$

emellett:

$$G = \mu n \to \mu = \frac{G}{n} \qquad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S_M \cdot n, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V_M \cdot n$$

Clausius - Clapeyron:

$$\boxed{\frac{dp}{dT} = \frac{S_{M_2} - S_{M_1}}{V_{M_2} - V_{M_1}}}$$

fázisátalakuláskor:

$\Delta S_M = \dfrac{Q_{M_{12}}}{T}$ ← látenshő

$$\boxed{\frac{dp}{dT} = \frac{Q_M}{T\,\Delta V_M}} \qquad \text{Clapeyron - e.}$$

értelmezés:

1. foly. - gáz

$V_{M_g} > V_{M_f}$

$Q_M > 0$

↓

$\frac{dp}{dT} > 0$

2. szil. - folyad.

$Q_M > 0$

norm. $V_{M_f} \gtrsim V_{M_sz}$

$\frac{dp}{dT} > 0$ (nagy)

abnorm. $V_{M_sz} \gtrsim V_{M_f}$

$\frac{dp}{dT} < 0$

3. szilárd - gáz

$Q_M > 0$

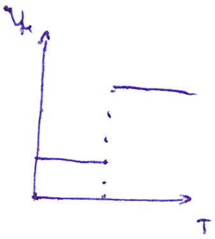
$V_{M_sz} \ll V_{M_g}$

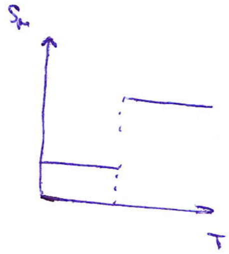
$\frac{dp}{dT} > 0$ (kicsi)

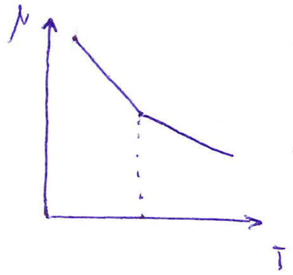
osztályozás :

- elsőrendű :

$$\left.\frac{\partial \mu}{\partial p}\right|_T = V_M \qquad \left.\frac{\partial \mu}{\partial T}\right|_p = -S_M \qquad \text{ugrik}$$







- másodrendű :

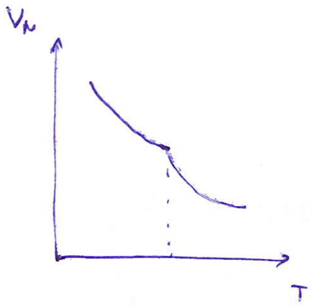
$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2}, \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2}, \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial p \partial T} \quad \text{ugrik}$$

c_p, κ_T, β_p ugrik

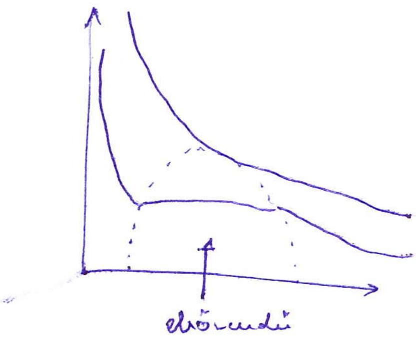
$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} = -\left.\frac{\partial S_M}{\partial T}\right|_p = -\left(\frac{\partial S_M}{\partial H}\right)\cdot\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right) = -\frac{c_p}{T}$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2} = \left(\frac{\partial V_M}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{n} V \cdot \kappa_T$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial p \partial T} = \frac{\partial V_M}{\partial T} = \frac{V}{n}\beta_p$$



nincs értelme a Clausius-Clapeyronnak a másodrendűnél



16. Kvantummechanika alapjai

Feketetest sugárzás

- Kirchhoff: anyag fény elnyelése és kibocsátása összefügg

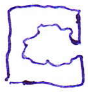
egy anyag termikus egyensúlyban van környezetével => sugárzással éri el azt

$$\frac{\text{emisszió} \to e(\nu,T)}{\text{abszorpció} \to a(\nu,T)} = u(\nu,T)$$

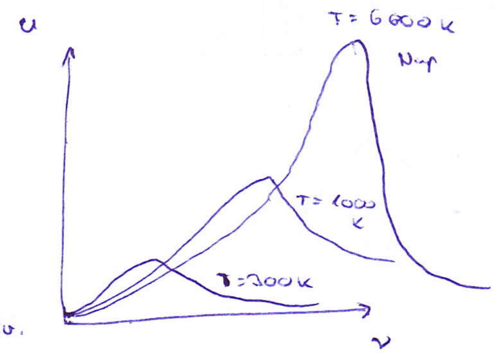
↑ univerzális fv.

abszolút fekete test

$a(\nu,T)=1$ → minden elnyel $e(\nu,T)=u(\nu,T)$



kis lyuk, belül üreges



Stefan-Boltzmann-tv.:

$$\int_0^\infty u(\nu,T)\,d\nu = \frac{4}{c}\sigma T^4$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3}$$

Wien-féle eltolódási tv.

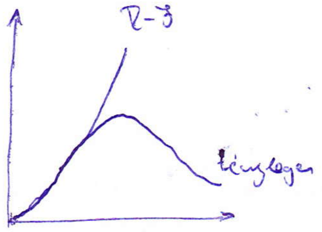
$$\frac{T}{\nu_{max}} = \text{áll.}$$

↑ maxhely.

Rayleigh-Jeans   Maxwell alapján

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi}{c^3} k_B \nu^2 T$$

$\nu \to \infty$-ben nem jó



Planck fittelés:

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi}{c^3} \cdot \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

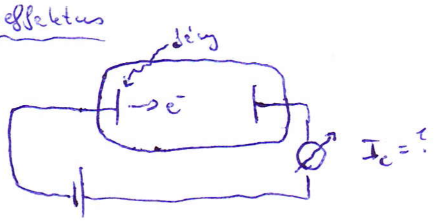
Planck-féle sugárzási tv.

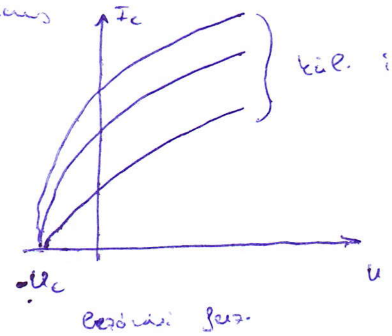
- üregben oszcillátorok termikus egyensúlyban
- $h\nu$ energiaadagokban adnak le energiát → kvantumhipotézis

h: Planck-áll.

Planck { deriválva → Wien-tv.; integrálva → Stefan-Boltzmann; $\nu \to 0$ → Rayleigh-Jeans

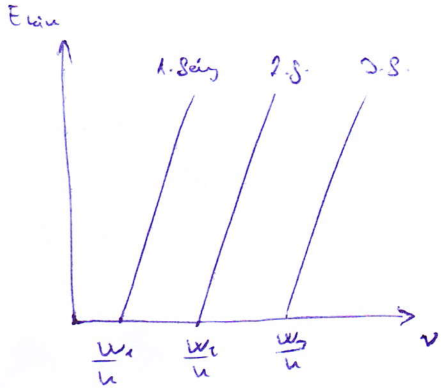
fotoeffektus





különb. intenzitások

lezárási fesz.



Einstein: komolyan véve a kvantumhipotézist

$$E_{foton} = h\nu$$

$$E_{kin} = h\nu - W$$

↑ kilépési munka

következmény: fény egyszerre mutat hullám és részecske tulajdonságot

Fényimp. $E = h\nu$

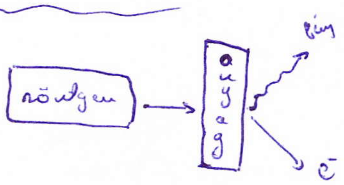
$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$

$$\boxed{p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \qquad p = \hbar \cdot k}$$

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$

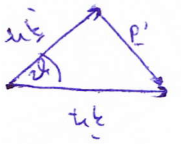
k: hullámszám

Compton-szórás:



imp:

$$p'^2 = \hbar^2k^2 + \hbar^2k'^2 - 2\hbar^2kk'\cos\vartheta$$



energia:

$$m_0c^2 + E_k = E_k' + \underbrace{\sqrt{m_0^2c^4 + p'^2c^2}}$$

$$m_0c^2\sqrt{1 + \frac{p'^2}{m_0^2c^2}} \approx m_0c^2\left(1 + \frac{p'^2}{2m_0^2c^2}\right)$$

$$E_k - E_k' = \frac{p'^2}{2m_0} = \frac{\hbar^2}{2m_0}\left(k^2 + k'^2 - 2kk'\cos\vartheta\right)$$

$$\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = \frac{h^2}{2m_0}\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2} - \frac{2}{\lambda\lambda'}\cos\vartheta\right) \quad \Big/ \cdot \frac{\lambda\lambda'}{hc}$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{2m_0c}\left(\frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda'} - 2\cos\vartheta\right) \qquad \frac{\lambda}{\lambda'} \approx \frac{\lambda'}{\lambda} \approx 1 \quad (*)$$

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}\left(1 - \cos\vartheta\right)} \qquad \lambda_{\text{compton}} = \frac{h}{m_0c}$$

kísérletek:

- optikai rácson fehér fény: nulladrend egyben, magasabb rendek színbontás
- negatívra töltött cinklemez ibolyafénnyel megvilágítva kisül, pozitív nem
- fénymalom: ellentétes irányba forog => a fekete jobban melegszik
- grafitkristály optikai rács elektronnyalábnak
-  elektronok átforgatják a propellert

$(*)$ $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda'} = 1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda} + \frac{1}{1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}} \approx 1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda} + 1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2$$

17. Atommodellek

• Thomson: e^--t felfedezi

$\frac{e}{m}$ kísérlet

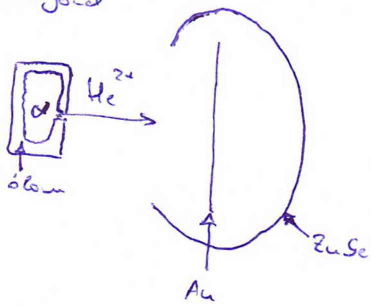
e^- töltése: Millikan

mazsolás puding modell

pozitív töltés, egyenletesen eloszlatva

nagy tömegű az elektronok

• Rutherford



• a fólia előtt is voltak felvillanások

• „olyan, mintha tüzérségi lövedékeket papírlapról visszapattannának"

$\Longrightarrow$ Rutherford-atommodell: atomi naprendszer

nehéz mag körül könnyű elektronok

kicsi (10^{-15} m)

• Bohr

Rydberg vonalas színkép: összefüggés elnyelt v. kibocsátott fény hullámhossza

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$$

$n_1 = 1$, $n_2 = 2, \ldots$	Lyman	UV	energiaszintek kvantáltak
$n_1 = 2$, $n_2 = 3, \ldots$	Balmer	VIS	
$n_1 = 3$, $n_2 = 4, \ldots$	Paschen	IR	

atomi naprendszer problémái:

- gyorsuló elektron sugároz
- a sugárzásnak folytonosnak kéne az energiaspektruma

ad hoc hipotézisek

- gyorsuló elektron nem sugároz
- két állapot között ugró e^- energiát nyel el v. sugároz ki
- csak meghat. pályák jöhetnek létre

$$L = n\hbar \qquad , \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

• a hidrogén Bohr-modellje:

1 e^- képében: $m_0 \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$

$L = n\hbar \qquad m_0 v r = n\hbar$

$$r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_0 v^2} \rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{v} = n\hbar$$

$$v_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{n\hbar}$$

$$v_n = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{c\hbar}}_{\alpha} \cdot \frac{c}{n} = \alpha\frac{c}{n}$$

α: finomszerk. áll. ($\sim \frac{1}{137}$)

ezzel:

$$r_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{m_0\alpha^2}\cdot\frac{n^2}{c^2} = \frac{n^2}{\alpha}\cdot\underbrace{\frac{\hbar}{m_0 c}}_{\frac{\lambda_{compton}}{2\pi}}$$

$$r_n = n^2 \cdot a_0$$

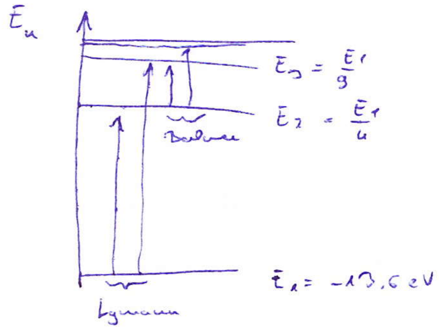
$\uparrow$ Bohr-sugár $= 0.5$ Å

energia:

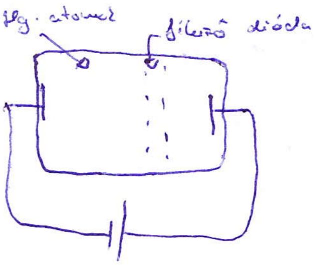
$$\frac{1}{2}m_0 v_n^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n} = \frac{1}{n^2}\left[\frac{m_0\alpha^2c^2}{2} - \frac{c\hbar\alpha\, m_0 c\alpha}{\hbar}\right]$$

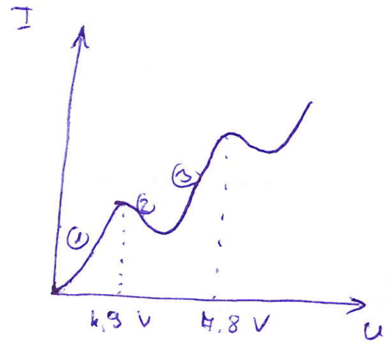
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{m_0\alpha^2c^2}{n^2}$$

$E_1 = -13.6$ eV



Franck-Hertz kísérlet





1., ē energiája csak rugalmas ütközésre elég

→ energiát nem veszít

2., ē energiát veszít, nem jut el az anódra, az áram csökken

→ Hg gerjesztésével energiát veszít

3.) nő az átjutó ē-ok száma

Hg gerjedés után 4,9 eV-os fényt bocsát ki (fényező)

⇒ ē-ok ott vannak az atomban, és mechanikai úton gerjeszthetők

18. A részecske-hullám kettősség

de Broglie: fotonra $\lambda = \frac{h}{p}$ legyen igaz $\bar{e}$-ra is

· $\bar{e}$ rendelkezik anyag és hullámtermészettel

ha ez igaz, $\bar{e}$-t gyorsítva: $\frac{1}{2} m_0 v^2 = eU \to p = \sqrt{2 m_0 eU}$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m_0 eU}}$$

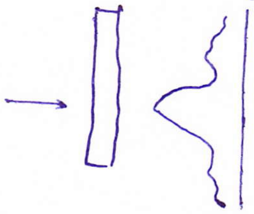
de Broglie + Bohr:

$$m_0 v r = \frac{nh}{2\pi} \to 2\pi r = \frac{nh}{m_0 v} = n\frac{h}{p}$$

az elektron állóhullámként van jelen az atomban

Thomson-Davisson-Germer:

céltárgy $\bar{e}$ diffrakció



fényhez hasonló diffrakciós kép

$\bar{e}$-ok hullámtermészetet mutatnak

→ kéne hullámegyenlet

legyen $\bar{e}$ 1D anyaghullám

$$\Psi(x,t) = A\, e^{i(kx-\omega t)}$$

$E = \hbar\omega = h\nu$

$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$

$E = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\omega \Psi \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2 \Psi$$

$$\hbar\omega\Psi = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}\Psi \to i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

időfüggő Schrödinger-e.

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1D & i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \\ 3D & i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\Psi \end{array}}$$

időfüggetlen: $\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta}\Psi + V(r)\Psi = \underbrace{E}_{\text{energia}}\Psi$

H: Hamilton-op.

$$\boxed{H\Psi = E\Psi}$$

Bohr: $|\Psi^*|^2$ fizikai értelme: részecske megtalálási valószínűsége egységnyi térfogatban

$$\int_{\text{teljes tér}} |\Psi^*|^2 = 1$$

Heisenberg-féle határozatlansági elv

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$$

Δx: hely bizonytalanság, Δp: imp. bizonytalanság

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

pl.: $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$-n, $\Psi(x) = \text{rect}_a(x)$

Fourier-trafó:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}_a(x)\, e^{ikx}\, dx = \text{sinc}\left(\frac{ka}{2}\right)$$

$$\Delta x = a \to \Delta k_x = \frac{4\pi}{a}$$

$$\Delta x \cdot \Delta k_x \cdot \hbar = \Delta x \cdot \Delta p_x \geq 4\pi\,\hbar$$