

Fizika feladatok

2019. november 7.

Ez a feladatgyűjtemény a mérnök hallgatók korábbi jogos igényének megfelelően, nagy hiányt pótol. A kitűzött feladatok az I. éves fizika tárgyaknak anyagaihoz illeszkednek. Remélhetőleg érzékelhető segítséget jelent mind a hallgatók, mind a tárgyat oktatók számára, valamint hozzájárul az egységes oktatás megvalósításához.

A gyűjteményben a * jelzés a magasabb nehézségi szintű feladatokat jelöli, míg a **-gal jelölt feladatokat a kihívásokat kedvelő megoldóknak ajánljuk. A feladatgyűjtemény folyamatosan bővül új feladatokkal és megoldásokkal. Javaslatokat új feladatokra, valamint megoldásokat és egyéb észrevételeket szívesen látunk. (Szerk.: Márkus Ferenc, Rakyta Péter, Krafcsik Olga, Barócsi Attila, Sólyom András, Gilyén András, Márkus Bence Gábor, Gambár Katalin, Fehér András, Bokor Nándor, Sarkadi Tamás)

Tartalomjegyzék

1. Feladatok a kinematika tárgyköréből	15
Tömegpontok mozgása egyenes mentén	15
1.1. Feladat	15
1.2. Feladat	15
1.3. Feladat	15
1.4. Feladat	16
1.5. Feladat	16
1.6. Feladat	17
1.7. Feladat	17
1.8. Feladat	18
1.9. Feladat	19
1.10. Feladat	20
1.11. Feladat	21
1.12. Feladat	21
1.13. Feladat	22
1.14. Feladat	22
1.15. Feladat	24
1.16. Feladat	24
1.17. Feladat	25
Tömegpontok síkbeli mozgása	26
1.18. Feladat	26
1.19. Feladat	27
1.20. Feladat	27
1.21. Feladat	28
1.22. Feladat	29
1.23. Feladat	30
1.24. Feladat	31
1.25. Feladat	31
1.26. Feladat	32
1.27. Feladat	32
1.28. Feladat	33
1.29. Feladat	34
1.30. Feladat	34
1.31. Feladat	35

1.32. Feladat	36
1.33. Feladat	37
Tömegpontok síkbeli mozgása	38
1.34. Feladat	38
2. Feladatok körmozgás tárgyköréből	38
Kerületi sebesség	38
2.1. Feladat	38
2.2. Feladat	39
Szöggyorsulás	39
2.3. Feladat	39
2.4. Feladat	40
Centripetális és tangenciális gyorsulások	41
2.5. Feladat	41
2.6. Feladat	42
2.7. Feladat	43
2.8. Feladat	43
3. Feladatok a dinamika tárgyköréből	44
Newton három törvénye	44
3.1. Feladat	44
3.2. Feladat	45
3.3. Feladat	45
3.4. Feladat	46
3.5. Feladat	47
3.6. Feladat	47
Centripetális erő	48
3.7. Feladat	48
3.8. Feladat	49
3.9. Feladat	49
3.10. Feladat	50
3.11. Feladat	51
Súrlódási erő	52
3.12. Feladat	52
3.13. Feladat	53
3.14. Feladat	53
3.15. Feladat	54

3.16. Feladat	55
3.17. Feladat	55
3.18. Feladat	56
3.19. Feladat	56
3.20. Feladat	57
3.21. Feladat	57
3.22. Feladat	59
3.23. Feladat	60
3.24. Feladat	60
3.25. Feladat	61
3.26. Feladat	62
3.27. Feladat	63
3.28. Feladat	63
Közegellenállási erők	64
3.29. Feladat	64
3.30. Feladat	65
3.31. Feladat	65
3.32. Feladat	66
3.33. Feladat	68
4. Feladatok munkavégzés és konzervatív erőterek tárgyköréből. Munkatétel	69
Munkavégzés	69
4.1. Feladat	69
4.2. Feladat	69
4.3. Feladat	70
4.4. Feladat	71
4.5. Feladat	71
4.6. Feladat	71
4.7. Feladat	72
4.8. Feladat	74
4.9. Feladat	74
Munkatétel	74
4.10. Feladat	74
4.11. Feladat	76
4.12. Feladat	76
4.13. Feladat	77

4.14. Feladat	78
Munkavégzés konzervatív erőterben. Potenciális energia	78
4.15. Feladat	78
4.16. Feladat	79
4.17. Feladat	80
4.18. Feladat	80
4.19. Feladat	81
4.20. Feladat	82
4.21. Feladat	83
4.22. Feladat	83
Energiatétel	84
4.23. Feladat	84
4.24. Feladat	85
5. Feladatok a gyorsuló koordináta-rendszerek tárgyköréből	87
Centrifugális erő	87
5.1. Feladat	87
5.2. Feladat	88
5.3. Feladat	88
Coriolis-erő	89
5.4. Feladat	89
5.5. Feladat	90
5.6. Feladat	90
5.7. Feladat	91
5.8. Feladat	91
6. Feladatok rugalmas és rugalmatlan ütközések tárgyköréből	92
Impulzustétel	92
6.1. Feladat	92
6.2. Feladat	93
6.3. Feladat	93
6.4. Feladat	94
6.5. Feladat	94
Impulzusmegmaradás törvénye	95
6.6. Feladat	95
Rugalmatlan ütközések	95
6.7. Feladat	95

6.8. Feladat	96
6.9. Feladat	96
6.10. Feladat	97
6.11. Feladat	97
6.12. Feladat	98
6.13. Feladat	99
6.14. Feladat	100
Rugalmas ütközések	101
6.15. Feladat	101
6.16. Feladat	101
6.17. Feladat	102
6.18. Feladat	103
6.19. Feladat	105
6.20. Feladat	105
Rugalmas ütközések	106
6.21. Feladat	106
Folytonos közegek impulzusváltozása	106
6.22. Feladat	106
6.23. Feladat	107
6.24. Feladat	108
6.25. Feladat	108
6.26. Feladat	109
6.27. Feladat	110
7. Feladatok a gravitációs erő tárgyköréből. Kepler törvényei	111
Centrális erőter. Potenciális energia	111
7.1. Feladat	111
7.2. Feladat	111
7.3. Feladat	112
7.4. Feladat	112
7.5. Feladat	113
7.6. Feladat	114
7.7. Feladat	114
7.8. Feladat	115
7.9. Feladat	116
Kepler törvényei	116

7.10. Feladat	116
8. Feladatok merev testek fizikájának tárgyköréből	117
Forgatónyomaték, impulzusmomentum, impulzusmomentum tétel	117
8.1. Feladat	118
8.2. Feladat	118
8.3. Feladat	119
8.4. Feladat	120
8.5. Feladat	121
8.6. Feladat	122
8.7. Feladat	122
8.8. Feladat	123
8.9. Feladat	124
8.10. Feladat	125
8.11. Feladat	126
8.12. Feladat	126
8.13. Feladat	127
8.14. Feladat	128
8.15. Feladat	130
8.16. Feladat	131
8.17. Feladat	131
Impulzusmomentum megmaradása	132
8.18. Feladat	132
8.19. Feladat	134
Forgási energia	135
8.20. Feladat	135
8.21. Feladat	136
8.22. Feladat	136
9. Feladatok a rezgőmozgás és a mechanikai hullámok tárgyköréből	137
Harmonikus rezgőmozgás	137
9.1. Feladat	137
9.2. Feladat	138
9.3. Feladat	139
9.4. Feladat	139
9.5. Feladat	140
9.6. Feladat	140

9.7. Feladat	141
9.8. Feladat	142
9.9. Feladat	142
9.10. Feladat	143
9.11. Feladat	144
9.12. Feladat	144
9.13. Feladat	145
9.14. Feladat	147
9.15. Feladat	147
9.16. Feladat	148
9.17. Feladat	149
Csillapodó és gerjesztett rezgések	149
9.18. Feladat	149
9.19. Feladat	150
Rugalmas közegekben terjedő hullámok	150
9.20. Feladat	151
9.21. Feladat	151
9.22. Feladat	152
9.23. Feladat	152
9.24. Feladat	153
10. Feladatok a termodinamika tárgyköréből	154
Hővezetés, hőterjedés sugárzással	154
10.1. Feladat	154
10.2. Feladat	154
10.3. Feladat	154
Ideális gázok állapotegyenlete	155
10.4. Feladat	155
10.5. Feladat	155
10.6. Feladat	155
10.7. Feladat	156
10.8. Feladat	156
Körfolyamatok ideális gázzal	157
10.9. Feladat	157
10.10. Feladat	158
10.11. Feladat	159

10.12. Feladat	159
10.13. Feladat	159
10.14. Feladat	161
10.15. Feladat	161
10.16. Feladat	163
Hőátadás	163
10.17. Feladat	163
10.18. Feladat	164
10.19. Feladat	165
10.20. Feladat	165
11. Feladatok az elektrosztatika tárgyköréből	166
Coulomb-törvény	166
11.1. Feladat	166
11.2. Feladat	166
11.3. Feladat	167
11.4. Feladat	168
11.5. Feladat	169
11.6. Feladat	170
11.7. Feladat	170
11.8. Feladat	172
11.9. Feladat	172
11.10. Feladat	173
11.11. Feladat	175
11.12. Feladat	176
11.13. Feladat	176
11.14. Feladat	178
11.15. Feladat	179
11.16. Feladat	181
Gauss-törvény	182
11.17. Feladat	183
11.18. Feladat	183
11.19. Feladat	184
11.20. Feladat	184
11.21. Feladat	186
11.22. Feladat	186

11.23. Feladat	187
11.24. Feladat	188
11.25. Feladat	189
11.26. Feladat	190
Az elektromos potenciál	191
11.27. Feladat	191
11.28. Feladat	192
11.29. Feladat	193
11.30. Feladat	193
11.31. Feladat	193
11.32. Feladat	194
11.33. Feladat	195
11.34. Feladat	196
11.35. Feladat	197
11.36. Feladat	198
Kondenzátorok	200
11.37. Feladat	200
11.38. Feladat	200
11.39. Feladat	201
11.40. Feladat	202
11.41. Feladat	203
11.42. Feladat	203
11.43. Feladat	203
11.44. Feladat	204
11.45. Feladat	206
11.46. Feladat	207
11.47. Feladat	208
11.48. Feladat	208
11.49. Feladat	209
11.50. Feladat	210
12. Feladatok az elektromos áram tanából	210
Az elektromos áram	210
12.1. Feladat	210
12.2. Feladat	211
12.3. Feladat	211

12.4. Feladat	212
12.5. Feladat	212
12.6. Feladat	212
12.7. Feladat	214
12.8. Feladat	214
RC-körök	214
12.9. Feladat	214
12.10. Feladat	215
12.11. Feladat	216
12.12. Feladat	216
12.13. Feladat	217
12.14. Feladat	219
13. Feladatok a mágneses erőtér témaköréből	219
Elektromosan töltött részecskék mozgása mágneses erőtérben	219
13.1. Feladat	219
13.2. Feladat	220
13.3. Feladat	220
13.4. Feladat	221
13.5. Feladat	222
Áramvezetőre ható erő mágneses erőtérben	222
13.6. Feladat	222
13.7. Feladat	223
13.8. Feladat	224
13.9. Feladat	225
13.10. Feladat	225
13.11. Feladat	225
13.12. Feladat	226
13.13. Feladat	226
Biot-Savart törvény, Ampère-törvény	227
13.14. Feladat	227
13.15. Feladat	227
13.16. Feladat	228
13.17. Feladat	229
13.18. Feladat	230
13.19. Feladat	230

13.20. Feladat	231
13.21. Feladat	232
13.22. Feladat	233
14. Feladatok a mágneses indukció témaköréből	234
Faraday-törvény	234
14.1. Feladat	234
14.2. Feladat	234
14.3. Feladat	235
14.4. Feladat	236
14.5. Feladat	236
14.6. Feladat	237
14.7. Feladat	238
14.8. Feladat	238
14.9. Feladat	239
14.10. Feladat	239
14.11. Feladat	240
14.12. Feladat	241
14.13. Feladat	241
14.14. Feladat	242
14.15. Feladat	243
14.16. Feladat	243
14.17. Feladat	244
Váltakozó áramú áramkörök	244
14.18. Feladat	244
14.19. Feladat	245
14.20. Feladat	246
14.21. Feladat	246
14.22. Feladat	247
14.23. Feladat	247
14.24. Feladat	247
14.25. Feladat	249
15. Feladatok az elektromágneses hullámok témaköréből	249
Az eltolódási áram	249
15.1. Feladat	249
15.2. Feladat	250

Elektromágneses hullámok	250
15.3. Feladat	250
15.4. Feladat	251
15.5. Feladat	251
15.6. Feladat	252
15.7. Feladat	253
15.8. Feladat	253
15.9. Feladat	253
15.10. Feladat	255
15.11. Feladat	256
16. Feladatok a geometriai optika témaköréből	258
Fénytörés	258
16.1. Feladat	258
16.2. Feladat	258
16.3. Feladat	259
17. Feladatok a hullámoptika témaköréből	259
Interferencia	259
17.1. Feladat	259
17.2. Feladat	260
17.3. Feladat	260
17.4. Feladat	262
17.5. Feladat	263
17.6. Feladat	263
17.7. Feladat	264
17.8. Feladat	265
17.9. Feladat	266
17.10. Feladat	266
17.11. Feladat	266
18. A kvantummechanika előzményei	267
A kvantummechanika előzményei	267
18.1. Feladat	267
18.2. Feladat	267
18.3. Feladat	267
18.4. Feladat	268

18.5. Feladat	268
18.6. Feladat	269
18.7. Feladat	270
18.8. Feladat	271
18.9. Feladat	274
18.10. Feladat	275
19. Feladatok a speciális relativitáselmélet tárgyköréből	276
Relativisztikus kinematika	276
19.1. Feladat	276
19.2. Feladat	277
Relativisztikus dinamika	277
19.3. Feladat	277
19.4. Feladat	278
19.5. Feladat	279
19.6. Feladat	279
19.7. Feladat	280

1. Feladatok a kinematika tárgyköréből

Tömegpontok mozgása egyenes mentén

1.1. Feladat: Mekkora az átlagsebessége annak pontnak, amely mozgásának első szakaszában v_1 sebességgel s_1 utat, második szakaszában v_2 sebességgel s_2 utat tesz meg?

Megoldás: Az átlagsebességet az összesen megtett útmennyiség és az ehhez szükséges teljes időtartam hányadosaként kapjuk meg: $\bar{v} = \frac{\sum_i s_i}{\sum_i t_i}$. Az eltelt időtartamok: $t_1 = \frac{s_1}{v_1}$ és $t_2 = \frac{s_2}{v_2}$. Így

$$\bar{v} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}}. \quad (1.1.1)$$

1.2. Feladat: Két mozdony s_1 távolságból, egymáshoz képest v sebességgel közeledik egymás felé az egyenes vasúti pályán. Az egyik fényjelet ad, amely a szélvédőkről visszaverődik. Mekkora utat tesz meg a fény, amíg s_2 távolságra lesznek egymástól?

Megoldás: Az eltelt idő:

$$t = \frac{s_1 - s_2}{v}, \quad (1.2.1)$$

amely idő alatt a fény

$$s = ct = c \frac{s_1 - s_2}{v} \quad (1.2.2)$$

utat tesz meg.

1.3. Feladat: Egyenes vasúti pályán egy mozdony halad v sebességgel, s közben Δt ideig dudál. Milyen hosszúnak hallja a pálya mellett álló utas a dudaszót, ha a vonat nem halad el mellette?

Megoldás: Tegyük fel, hogy a mozdony s távolságban van, amikor elkezd dudálni. A hangot

$$t_1 = \frac{s}{c} \quad (1.3.1)$$

idő elteltével hallja meg a megfigyelő. Ezt követően Δt idő múlva már csak $s - v\Delta t$ távolságban lesz a mozdony, amely ekkor befejezi a dudálást. A dudaszó vége

$$t_2 = \Delta t + \frac{s - v\Delta t}{c} \quad (1.3.2)$$

idő elteltével jut a megfigyelőhöz. A dudaszót a megfigyelő tehát

$$t_2 - t_1 = \Delta t + \frac{s - v\Delta t}{c} - \frac{s}{c} = \frac{c - v}{c} \Delta t \quad (1.3.3)$$

hosszúnak hallja. *Megjegyzés:* Távolodó mozdony esetén a dudaszó

$$t_2 - t_1 = \Delta t + \frac{s + v\Delta t}{c} - \frac{s}{c} = \frac{c + v}{c} \Delta t \quad (1.3.4)$$

időtartamúnak hallatszik.

1.4. Feladat: Egy gépkocsi 54 km/h sebességről 5 m/s² lassulással egyenletesen lefékez. Mekkora a teljes fékút?

Megoldás: Legyenek $v_0 = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}$ és $a = -5 \text{ m/s}^2$. A sebesség az idő függvényében a

$$v(t) = v_0 + at, \quad (1.4.1)$$

összefüggéssel adható meg. Ennek segítségével a gépkocsi megállásáig eltelt idő

$$t = -\frac{v_0}{a} = 3 \text{ s}. \quad (1.4.2)$$

A teljes fékút pedig

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = 22,5 \text{ m}. \quad (1.4.3)$$

1.5. Feladat: Egy tömegpont az x tengely mentén mozog -4 m/s^2 állandó gyorsulással. Az $x = 0$ helyen a sebessége 20 m/s, az időt ekkor kezdjük el mérni. Mikor lesz a test először az $x = 18 \text{ m}$ helyen?

Megoldás: Legyenek $v_0 = 20 \text{ m/s}$, $a = -4 \text{ m/s}^2$. A tömegpont helye, mint az idő függvénye az

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \quad (1.5.1)$$

összefüggéssel adható meg. Oldjuk meg az egyenletet a t változóra az $x = 18 \text{ m}$ helyettesítés mellett:

$$18 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \quad (1.5.2)$$

Az egyenlet gyökei: $t_1 = 1 \text{ s}$ és $t_2 = 9 \text{ s}$. A tömegpont először a t_1 időpillanatban éri el az $x = 18 \text{ m}$ helyet.

1.6. Feladat: (HN 2B-18) Egy futó a 100 m-es vágtszámot 10,3 s-os eredménnyel nyerte meg. Egy másik futó 10,8 s-os idővel futott be. Feltéve, hogy az atléták az egész távon egyenletesen futottak, határozzuk meg, hogy milyen távol volt a második futó a céltől, amikor a győztes átszakította a célszalagot!

Megoldás: Az adatokat jelöljük az alábbi módon: $s = 100$ m; $t_1 = 10,3$ s; $t_2 = 10,8$ s. A másodikként célba érkező futó sebessége

$$v = \frac{s}{t_2} = 9,26 \text{ m/s} \quad (1.6.1)$$

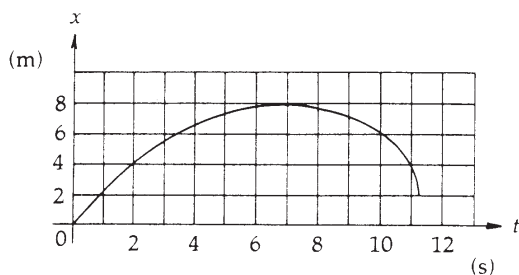
volt. Mivel a hátránya $t = t_2 - t_1 = 0,5$ s volt, így $d = vt = 4,63$ m-re volt a célvonalától.

1.7. Feladat: (HN 2B-19) Az 1. ábra egy egyenesvonalú pályán mozgó részecske út-idő grafikonját mutatja.

(a) Határozzuk meg a mozgás átlagsebességét a $t_1 = 2$ s és $t_2 = 5$ s időintervallumra!

(b) Melyik időpillanatban zérus a mozgás sebessége?

(c) Mekkora a $t = 10$ s időpontban a pillanatnyi sebessége?



1. ábra.

Megoldás:

(a) A grafikonról leolvasható, hogy a $t_1 = 2$ s időpillanatban $x_1 = 4$ m a helykoordináta, valamint a $t_2 = 5$ s időpillanatban $x_2 = 7$ m. Az átlagsebességet a teljesen megtett út és hozzá tartozó idő hányadosaként kapjuk meg:

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 1 \text{ m/s.} \quad (1.7.1)$$

(b) A mozgás sebessége ott zérus, ahol a görbéhez húzott érintő meredeksége zérus. Ez jó közelítéssel láthatóan a

$$t' = 7 \text{ s} \quad (1.7.2)$$

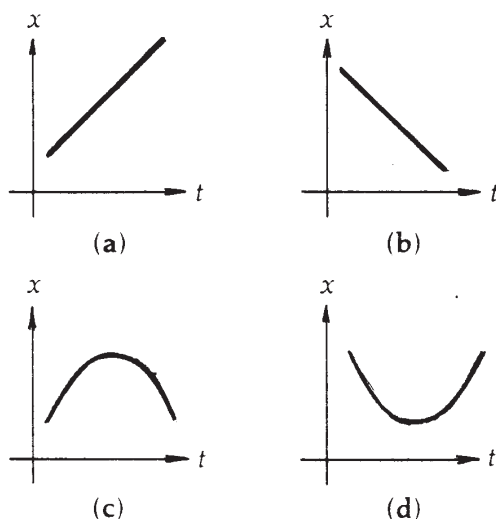
időpillanatban áll fenn.

(c) A $t = 10$ s-beli sebesség meghatározása a pontbeli érintő kiszámolását jelenti. Ez azt jelenti, hogy a ponthoz nagyon közeli értékeket kellene leolvasni. Mivel elég nagy a leolvasási pontatlanság – a megértés lényegét pedig nem érinti – az érintő meghatározását úgy végezzük el, hogy tekintjük a $t_9 = 9$ s-hoz és $t_{11} = 11$ s-hoz tartozó $x_9 = 7$ m és $x_{11} = 4$ m helykoordinátákat, és kiszámoljuk a

$$v_{10} = \frac{x_{11} - x_9}{t_{11} - t_9} \sim -1,5 \text{ m/s.} \quad (1.7.3)$$

meredekséget. A negatív előjel arra utal, hogy a pont az origó felé mozog. A mozgás irányának megváltozása a $t' = 7$ s időpillanatban történt.

1.8. Feladat: (HN 2B-22) A 2. ábra négy különböző mozgás hely-idő függvényábráját mutatja. Állapítsuk meg minden esetben, hogy a gyorsulás pozitív, negatív vagy zérus!



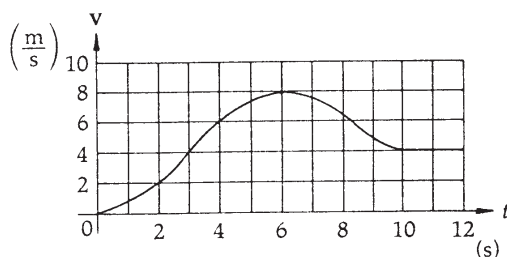
2. ábra.

Megoldás: A 2. (a) és (b) ábráinak grafikonjai lineáris összefüggést írnak le a megtett út és az eltelt idő között. A lineáris grafikonok egyenes sebességű mozgást írnak le, következésképpen a mozgások alatt a gyorsulás zérus. A gyorsulás mellett a tömegpont sebességének iránya is megállapítható a grafikonok meredekségéből: a 2. (a) ábrán pozitív meredeksége van a grafikonnak, tehát a tömegpont pozitív irányba mozog és sebessége pozitív, míg a 2. (b) ábra negatív meredekségű egyenest mutat, mely negatív irányba mozgó tömegpontot ír le negatív sebességgel. A 2. (c) ábra grafikonja olyan mozgást ír le, mely során a tömegpont először pozitív irányba mozog, majd egy adott pillanatban visszafordul. A grafikon meredekségét elemezve az

egy t időpillanatokban megállapítható, hogy kezdetben pozitív irányba mozgott a tömegpont, majd pedig visszafordult, a sebessége negatív lett. A tömegpont gyorsulása ezért negatív volt a mozgás során. Végül a 2. (d) ábra az előző megfontolások alapján egy pozitív irányba gyorsuló tömegpont mozgását írja le.

1.9. Feladat: (HN 2B-24) A 3. ábra egy egyenes úton nyugalomból induló motorkerékpáros sebesség-idő grafikonját mutatja.

- Mekkora a motorkerékpáros átlagos gyorsulása a $t_0 = 0$ s és $t = 6$ s időtartamban?
- Állapítsuk meg (közelítőleg), hogy mikor éri el a gyorsulás maximális értékét és mekkora a gyorsulás ebben a pillanatban?
- Mikor zérus a gyorsulás?
- Mikor veszi fel a gyorsulás legnagyobb negatív értékét és mekkora ez az érték?



3. ábra.

Megoldás:

- (a) A $[t_0, t]$ s időintervallumban a teljes sebességváltozás $\Delta v = 8$ m/s. Az átlag gyorsulás ezért

$$a = \frac{\Delta v}{t - t_0}. \quad (1.9.1)$$

A számértékek behelyettesítése után $a = 1.3$ m/s².

- (b) A legnagyobb gyorsulást akkor éri el a motorkerékpáros, amikor a sebesség-idő grafikonban legnagyobb a mindenkor érintő meredeksége. a 3. ábra alapján ez $t \approx 3$ s pillanatban következik be. Ekkor a motorkerékpáros gyorsulásának közelítő értékét az ábráról leolvasható értékek segítségével határozhatjuk meg. Az ábráról leolvasható adatok pontosságát a felrajzolt négyzet-rács határozza meg. A gyorsulás meghatározásához szükséges sebességek értékét a szomszédos $t_1 = 2$ s és $t_2 = 4$ s időpillanatokban olvashatjuk le. A sebességek értékét a $t \approx 3$ s pillanatban húzott érintő segítségével határozhatjuk meg: $v_1 = 2$ m/s és $v_2 = 6$ m/s. A maximális gyorsulás tehát:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.9.2)$$

Behelyettesítés az értékeket $\bar{a} = 2 \text{ m/s}^2$ adódik.

(c) Mivel a motorkerékpáros gyorsulását a sebesség-idő grafikon pontjaiban húzott érintők meredeksége jelzi, a vízszintes érintőjű pontok a zérus gyorsulású pillanatoknak felelnek meg. A 3. ábra egyetlen olyan pontja melyben az érintő vízszintes, a $t = 6 \text{ s}$ pillanathoz tartozik.

(d) A motorkerékpáros a legnagyobb negatív értékű gyorsulását a $t = 8 \text{ s}$ pillanatban éri el, mivel ebben a pillanatban a legmeredekebb a grafikon érintője. Megszerkesztve a grafikon érintőjét a (b) feladatrészhez hasonlóan megállapítható gyorsulás közelítő értéke, mely $\bar{a}_n \approx 2 \text{ m/s}^2$ -nak adódik.

1.10. Feladat: (HN 2B-26) Egy gépkocsi sebessége 9 s alatt 4 m/s-ról egyenletesen 7 m/s-ra növekszik.

- Mekkora a kocsi gyorsulása?
- Ezután az autó 12 s alatt egyenletesen lassulva megáll. Mekkora a gyorsulás ezen a szakaszon?
- Összesen mekkora utat tett meg a 21 s alatt az autó?
- Mekkora az átlagsebessége?

Megoldás: Legyenek $t_1 = 9 \text{ s}$, $v_1 = 4 \text{ m/s}$, $v_2 = 7 \text{ m/s}$ és $t_2 = 12 \text{ s}$.

- (a) A mozgás első szakaszát leíró gyorsulás

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_1} = \frac{1}{3} \text{ m/s}^2. \quad (1.10.1)$$

- (b) A sebesség időbeli változása

$$v(t) = v_2 + a_2 t_2, \quad (1.10.2)$$

amellyel a megállás tényét is figyelembe véve a

$$0 = 7 + 12a_2 \quad (1.10.3)$$

egyenlet írható fel. A második szakasz gyorsulása tehát

$$a_2 = -\frac{7}{12} \text{ m/s}^2. \quad (1.10.4)$$

- (c) A megtett út az első szakaszra

$$x_1 = v_1 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 49,5 \text{ m}, \quad (1.10.5)$$

a másodikra

$$x_2 = v_2 t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = 42 \text{ m}, \quad (1.10.6)$$

így az összesen megtett út 91,5 m.

(d) Az átlagsebesség

$$\bar{v} = \frac{x_1 + x_2}{t_1 + t_2} = 4,35 \text{ m/s}. \quad (1.10.7)$$

1.11. Feladat: (HN 2A-32) Függőlegesen felfelé hajítunk egy labdát 12 m/s sebességgel. Hol van, mekkora és milyen irányú sebességgel rendelkezik

(a) 1 s és

(b) 2 s időpontban az elhajítás után?

Megoldás: A függőleges felfelé hajításra vonatkozó sebesség-idő és hely-idő összefüggések:

$$v(t) = v_0 - gt \quad (1.11.1)$$

és

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1.11.2)$$

Behelyettesítés után:

(a) $v(1 \text{ s}) = 2 \text{ m/s}$ felfelé (a pozitív előjel ezt mutatja); $y(1 \text{ s}) = 7 \text{ m}$;

(b) $v(1 \text{ s}) = -8 \text{ m/s}$ lefelé (a negatív előjel ezt mutatja); $y(1 \text{ s}) = 4 \text{ m}$.

1.12. Feladat: (HN 2B-33) 50 m mély kútba követ ejtünk. Határozzuk meg, hogy mennyi idő múlva halljuk a kő csobbanását! A hang terjedési sebessége 330 m/s.

Megoldás: A h mélységű kút aljára

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (1.12.1)$$

idő alatt ér le a kő. A h utat a hang

$$t_2 = \frac{h}{c} \quad (1.12.2)$$

idő alatt teszi meg. Így összesen

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c} = 3,31 \text{ s} \quad (1.12.3)$$

idő múlva hallható a csobbanás.

1.13. Feladat: (HN 2B-35) Feldobunk egy érmét 4 m/s sebességgel. Mennyi idő alatt ér fel 0,5 m magasra. Miért kapunk két eredményt?

Megoldás: Az emelkedés út-idő függvénye:

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1.13.1)$$

Az adatokat behelyettesítve a

$$0 = 5t^2 - 4t + 0,5 \quad (1.13.2)$$

másodfokú egyenlet adódik, amelynek megoldásai a $t_1 = 0,155$ s és a $t_2 = 0,644$ s. Azért van két megoldás mert az első időpont után még tovább emelkedik, s a lefele esésnél a második időpontban ugyancsak 0,5 m magasan lesz.

1.14. Feladat: (HN 2C-54) Egy, az origóból induló test a 4. ábra szerinti gyorsulással egyenesvonalú mozgást végez. Rajzoljuk meg a mozgás sebesség-idő és hely-idő függvényvénnyeket!

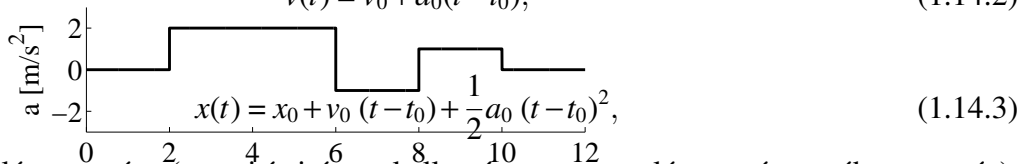
4. ábra.

Tüntessük fel a $t = 2, 6, 8$ és 10 s időpontokhoz tartozó sebesség és helykoordináták értékét.

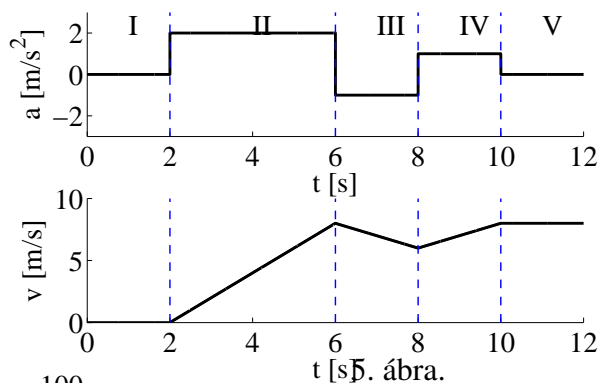
Megoldás: Egyenletesen gyorsuló mozgás esetében a gyorsulás, a sebesség és a megtett út az alábbi egyenletekkel adható meg:

$$a(t) \equiv a_0, \quad (1.14.1)$$

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0), \quad (1.14.2)$$



ahol a_0 a gyorsulás nagysága (a pozitív irányal ellentétesen gyorsuló mozgás esetében negatív), t_0 a mozgás kezdeti időpontja, v_0 a kezdősebesség, x_0 pedig a tömegpont kezdeti koordinátája.



A tömegpont mozgását bontsuk fel az 5. ábra alapján I, II, III, IV és V szakaszokra. Az egyes szakaszokban a v_0 kezdősebesség, x_0 koordináta és t_0 időpont az előző szakasz végpontjában felvett értékekből határozhatóak meg. (A sponr következő összefüggésekben a $\{\xi\}$ jelölés a ξ fizikai mennyiség számértékét jelöli SI mértékegységekben.)

I. szakasz: $0 < t < 2\text{s}$. A kezdeti értékek: $a_0 = 0 \text{ m/s}^2$, $v_0 = 0 \text{ m/s}$, $x_0 = 0 \text{ m}$, $t_0 = 0 \text{ s}$.

Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig $v(t) = 0 \text{ m/s}$ és $x(t) = 0 \text{ m}$ adódik.

A $t = 2 \text{ s}$ pillanatban a sebesség és kitérés értékei: $v(2\text{s}) = 0 \text{ m/s}$ és $x(2\text{s}) = 0 \text{ m}$.

II. szakasz: $2\text{s} < t < 6\text{s}$. A kezdeti értékek: $a_2 = 0 \text{ m/s}^2$, $v_0 = 0 \text{ m/s}$, $x_0 = 0 \text{ m}$, $t_0 = 2 \text{ s}$.

Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig $\{v(t)\} = 2(\{t\} - 2)$ és $\{x(t)\} = (\{t\} - 2)^2$ adódik.

A $t = 6 \text{ s}$ pillanatban a sebesség és kitérés értékei: $v(6\text{s}) = 8 \text{ m/s}$ és $x(6\text{s}) = 16 \text{ m}$.

III. szakasz: $6\text{s} < t < 8\text{s}$. A kezdeti értékek: $a_0 = -1 \text{ m/s}^2$, $v_0 = 8 \text{ m/s}$, $x_0 = 16 \text{ m}$, $t_0 = 6 \text{ s}$.

Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig $\{v(t)\} = 8 - (\{t\} - 6)$ és $\{x(t)\} = 16 + 8(\{t\} - 6) - \frac{1}{2}(\{t\} - 6)^2$ adódik.

A $t = 8 \text{ s}$ pillanatban a sebesség és kitérés értékei: $v(8\text{s}) = 6 \text{ m/s}$ és $x(8\text{s}) = 30 \text{ m}$.

IV. szakasz: $8\text{s} < t < 10\text{s}$. A kezdeti értékek: $a_0 = 1 \text{ m/s}^2$, $v_0 = 6 \text{ m/s}$, $x_0 = 30 \text{ m}$, $t_0 = 8 \text{ s}$.

Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig $\{v(t)\} = 6 + (\{t\} - 8)$ és $\{x(t)\} = 30 + 6(\{t\} - 8) + \frac{1}{2}(\{t\} - 8)^2$ adódik.

A $t = 10 \text{ s}$ pillanatban a sebesség és kitérés értékei: $v(10\text{s}) = 8 \text{ m/s}$ és $x(10\text{s}) = 44 \text{ m}$.

V. szakasz: $10\text{s} < t < 12\text{s}$. A kezdeti értékek: $a_0 = 0 \text{ m/s}^2$, $v_0 = 8 \text{ m/s}$, $x_0 = 44 \text{ m}$, $t_0 = 10 \text{ s}$.

Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig $\{v(t)\} = 8$ és $\{x(t)\} = 44 + 8(\{t\} - 10)$ adódik.

A $t = 12$ s pillanatban a sebesség és kitérés értékei: $v(12\text{s}) = 8$ m/s és $x(12\text{s}) = 60$ m.

1.15. Feladat: (HN 2C-66) Egy leejtett kődarab útjának a talajra érkezés előtti utolsó harmadát 1,0 s alatt teszi meg. Milyen magasról esett le a kő?

Megoldás: Jelölje h az ejtés magasságát, t a teljes esési időt és $t_0 = 1$ s az utolsó harmadhoz tartozó időt. A szabadon eső tömegpont kinematikai összefüggései alapján:

$$h = \frac{1}{2}gt^2. \quad (1.15.1)$$

Az út 2/3-át pedig $t - t_0$ idő alatt teszi meg a kődarab:

$$\frac{2}{3}h = \frac{1}{2}g(t - t_0)^2. \quad (1.15.2)$$

A h változó eliminálásával t -re az alábbi másodfokú egyenlet adódik

$$0 = \frac{1}{6}gt^2 - gtt_0 + \frac{1}{2}gt_0^2. \quad (1.15.3)$$

A másodfokú egyenlet két megoldása $t_1 = 5,45$ s, valamint $t_2 = 0,55$ s. A második megoldás fizikailag nem értelmes, mivel $t_2 < t_0$. A t_1 megoldáshoz tartozó magasság:

$$h = 148,51 \text{ m}. \quad (1.15.4)$$

1.16. Feladat: * (HN 2B-40) Az x tengelyen mozgó részecske sebesség-idő függvényét a $v(t) = 4 + 2t - 3t^2$ függvény adja meg. A $t = 0$ időpillanatban a részecske az $x = 8$ m helyen van.

- Mi az egyes együtthatók mértékegysége?
- Határozzuk meg a mozgás gyorsulás-idő függvényét!
- Határozzuk meg a mozgás hely-idő függvényét!
- Mekkora a részecske legnagyobb $+x$ irányú sebessége?

Megoldás:

(a) $A = 4$ m/s, $B = 2$ m/s², $C = 3$ m/s³: $v(t) = A + Bt - Ct^2$.

(b) A gyorsulás a sebesség idő szerinti deriváltja, azaz

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = B - 2Ct = 2 - 6t. \quad (1.16.1)$$

(c) A kezdeti $t = 0$ s időpillanatban a részecske koordinátája $x = 8$ m. A hely-idő függvény a sebesség idő szerinti integrálásával kapható meg a kezdeti feltételek illesztése mellett. Ezt a

$$dx = v dt \quad (1.16.2)$$

összefüggésből kiindulva a

$$\int_{x_0}^x dx = x(t) - x_0 = \int_{t_0=0}^t (A + Bt - Ct^2) dt \quad (1.16.3)$$

határozott integrál kiszámolásával kaphatjuk. Ennek eredménye

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0=0}^t (A + Bt - Ct^2) dt = \left[At + \frac{1}{2} Bt^2 - \frac{1}{3} Ct^3 \right]_{t_0=0}^t, \quad (1.16.4)$$

ahonnan a hely

$$x(t) = x_0 + At + \frac{1}{2} Bt^2 - \frac{1}{3} Ct^3 = 8 + 4t + t^2 - t^3. \quad (1.16.5)$$

(d) A sebesség akkor a legnagyobb, amikor a gyorsulás zérus. Ez a $t = 1/3$ s időpillanatban következik be. A sebesség értéke ekkor $v = 4,33$ m/s.

1.17. Feladat: * (HN 2B-41) Az x tengelyen mozgó részecske helyzetét az $x(t) = a + bt - ct^2$ függvény adja meg. Az együtthatók számértéke SI egységekben: $\{a\} = 2$, $\{b\} = 3$, $\{c\} = 4$,

- Adjuk meg az egyes együtthatók dimenzióját!
- Határozzuk meg a sebesség-idő függvényt!
- Határozzuk meg a gyorsulás-idő függvényt!
- Határozzuk meg a részecske maximális x irányú elmozdulását és az ehhez tartozó időpontot is!

Megoldás:

(a) Az egyes együtthatók dimenziója: $[a] = \text{m}$; $[b] = \text{m/s}$; $[c] = \text{m/s}^2$

(b) A sebességet a hely idő szerinti deriváltjaként határozhatjuk meg:

$$\{v(t)\} = \frac{d\{x\}}{dt} = 3 - 8t. \quad (1.17.1)$$

(c) A gyorsulás pedig a sebesség idő szerinti deriváltjával egyenlő:

$$\{a(t)\} = \frac{d\{v\}}{dt} = -8. \quad (1.17.2)$$

(d) A maximális elmozdulás pillanatában a test sebessége zérus ($\{v(t)\} = 0$), ami a

$$t = \frac{3}{8} \text{ s}, \quad (1.17.3)$$

pillanatban következik be. A maximális elmozdulás pedig

$$x = \frac{51}{16} \text{ m}. \quad (1.17.4)$$

Tömegpontok síkbeli mozgása

1.18. Feladat: * Jelölje egy folyó partját az x tengely. A víz a parttal párhuzamosan folyik, az x irányú sebesség a parttól való távolság függvénye, amely a $v_x(y) = ky$ lineáris összefüggéssel adható meg, ahol $0 < k$, y pedig a parttól mért távolság. (A túloldali part sokkal távolabb van, mint a távolság, melyen a sodrási sebességet leíró lineáris összefüggés érvényes.) A parton lévő úszó a parttól d távolságra lévő stéghez szeretne úszni.

(a) Mekkora távolsággal előbb kell a vízbe mennie, ha a folyásirányra merőlegesen állandó u sebességgel fog úszni?

(b) Milyen a lesz a pályagörbe alakja?

Megoldás:

(a) Az úszó a parttól az idő függvényében

$$y(t) = ut \quad (1.18.1)$$

távolságra jut. Közben az x irányú sebessége is folyamatosan változik a

$$v_x(t) = ky = kut \quad (1.18.2)$$

összefüggésnek megfelelően. A mozgás x irányú vetülete lényegében egy állandó gyorsulású mozgással azonosítható, ahol a gyorsulás $a_x = ku$:

$$x = \frac{1}{2} a_x t_s^2. \quad (1.18.3)$$

A sodródás ideje

$$t_s = \frac{d}{u}, \quad (1.18.4)$$

így meghatározható az a távolság is, amellyel az úszónak előrébb kell a vízbe mennie:

$$x = \frac{1}{2} a_x t_s^2 = \frac{1}{2} kut_s^2 = \frac{1}{2} \frac{kd^2}{u}. \quad (1.18.5)$$

(b) A pályagörbe meghatározásához válasszunk olyan koordinátarendszert, hogy a stég a

$$\left[\frac{1}{2} \frac{kd^2}{u}; d \right] \quad (1.18.6)$$

koordinátájú pontban legyen. Ekkor az origóból indulva éppen ehhez a ponthoz jut. Az (1.18.1) és (1.18.1) egyenletekből küszöböljük ki a t változót. Ekkor a pályagörbére az

$$y^2(x) - \frac{2ux}{k} = 0 \quad (1.18.7)$$

összefüggést kapjuk, ami egy parabola egyenlete.

1.19. Feladat: Egy repülőgép 360 km/h sebességgel vízszintesen repül. A repülőgépből egy-egy pisztollyal felfelé és lefelé lőnek azonos pontból. Milyen messze van egymástól a két lövedék $t = 0,8$ s múlva? Mindegyik lövedék kezdeti sebessége a repülőgéphez képest $v_0 = 160$ m/s. (A közegellenállás elhanyagolható.)

Megoldás: Vízszintesen mindkét lövedék 360 km/h sebességgel halad, így ez nem befolyásolja a kettejük távolságát. A függőleges irányban mindkettőnek $-g$ gyorsulása van, az egyiknek $+v_0$, a másiknak $-v_0$ a kezdősebessége. Mivel mindkét lövedék ugyanazzal a gyorsulással esik, a távolodásukat a kezdősebességük határozzák meg. A két lövedék közötti távolság tehát

$$d = \left(v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right) - \left(-v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right) = 2v_0 t = 256 \text{ m.} \quad (1.19.1)$$

1.20. Feladat: (HN: 3B-21) Egy 25 m magas hídról vízszintes irányban hajítunk el egy követ. A kő becsapódási helyét 45° -os irányban látjuk.

- (a) Mekkora sebességgel hajítottuk el a követ?
 (b) Mekkora és milyen irányú sebességgel csapódott a kő a vízbe?

Megoldás:

(a) A feladat feltétele szerint a kő becsapódási helyét a vízszinteshez képest lefelé 45° -os szög alatt látjuk. Ennek alapján a kő ugyanakkora távolságot tett meg vízszintesen mint függőleges irányban. Helyezzük a koordináta-rendszer kezdőpontját az eldobás pontjába. Ekkor becsapódás koordinátái: $[x_0, H] = [25; -25]$ m. A v_0 sebességgel elhajított kő mozgását leíró kinematikai egyenletek pedig

$$x(t) = v_0 t \quad (1.20.1)$$

és

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2. \quad (1.20.2)$$

A becsapódás pillanatában:

$$x_0 = v_0 t \quad (1.20.3)$$

és

$$H = -\frac{1}{2}gt^2. \quad (1.20.4)$$

Az két egyenletből a hajítás idejére $t = 2,24$ s, az eldobás sebességére pedig $v_0 = 11,18$ m/s adódik.

(b) Az eldobott kő mindenkori sebességének komponensei

$$v_x(t) = v_0 \quad (1.20.5)$$

és

$$v_y(t) = -gt. \quad (1.20.6)$$

A $t = 2,2$ s repülési időt behelyettesítve a sebesség vektora $\mathbf{v} = [11,18; 22,36]$ m/s-nak adódik.

A becsapódás α szöge a sebességkomponensek segítségével meghatározható a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = 2 \quad (1.20.7)$$

egyenlet segítségével, amiből $\alpha = 63,44^\circ$ adódik.

1.21. Feladat: Egy $h = 35$ m magas torony tetejéről, a vízszinteshez képest $\alpha = 25^\circ$ -os szög alatt ferdén felfelé egy labdát hajítunk el $v_0 = 80$ m/s kezdősebességgel.

(a) Határozzuk meg a földetérésig eltelt időt!

(b) Határozzuk meg a labda földetérési helyének távolságát a toronytól!

(c) Határozzuk meg a labda becsapódási sebességének nagyságát és irányát!

Megoldás:

(a) Helyezzük a koordináta-rendszer kezdőpontját a torony lábához. A labda x és y koordinátái az idő függvényében ekkor az

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha \quad (1.21.1)$$

és

$$y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 + h \quad (1.21.2)$$

összefüggésekkel adhatóak meg. A repülés teljes ideje a

$$0 = v_0 t_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}gt_0^2 + h \quad (1.21.3)$$

egyenletből határozható meg. A másodfokú egyenlet fizikailag értelmes megoldása

$$t_0 = 7,67 \text{ s.} \quad (1.21.4)$$

(b) A repülési időt behelyettesítve az (1.21.1) egyenletbe megkapjuk a becsapódás távolságát, ami

$$d = x(t_0) = v_0 t_0 \cos \alpha. \quad (1.21.5)$$

Behelyettesítve az értékeket $d \approx 556,1 \text{ m}$ adódik.

(c) A becsapódás pillanatában sebességvektor komponensei

$$v_x(t_0) = v_0 \cos \alpha \approx 72,5 \text{ m/s} \quad (1.21.6)$$

és

$$v_y(t_0) = v_0 \sin \alpha - g t_0 \approx -42,9 \text{ m/s.} \quad (1.21.7)$$

A sebesség nagysága pedig az egyes komponensek segítségével számolható ki a $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ összefüggéssel. Behelyettesítve a számadatokat $v \approx 84,2 \text{ m/s}$ adódik. A becsapódás szöge pedig

$$\beta = \arctg \frac{v_y}{v_x} = -30,61^\circ. \quad (1.21.8)$$

1.22. Feladat: A talajról a vízszintessel $\alpha = 30^\circ$ -os szöget bezáró szögben $v_0 = 50 \text{ m/s}$ nagyságú kezdősebességgel kilövünk egy lövedéket. A lövedék a szemközt lévő függőleges falba csapódik. Milyen magasan van a becsapódás helye, ha a fal $d = 80 \text{ m}$ távolságra van a kilövés helyétől?

Megoldás: A kinematikai alapösszefüggéseket alkalmazva a sebesség vízszintes és függőleges komponensei a

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad (1.22.1)$$

és

$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha - g t. \quad (1.22.2)$$

összefüggésekkel adhatóak meg. Helyezzük koordináta-rendszer kezdőpontját a kilövés pontjába. Ekkor a lövedék koordinátái az idő függvényében

$$x(t) = v_0 \cos \alpha t \quad (1.22.3)$$

és

$$y(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1.22.4)$$

A lövedék repülésének időtartama a

$$d = x(t_0) = v_0 t_0 \cos \alpha, \quad (1.22.5)$$

egyenlettel határozható meg. Az emelkedési magasság pedig

$$h = y(t_0) = v_0 t_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_0^2. \quad (1.22.6)$$

Az (1.22.5) egyenletből a

$$t = \frac{d}{v_0 \cos \alpha} \quad (1.22.7)$$

repülési időt kifejezve és behelyettesítve az (1.22.6) egyenletbe $h \approx 29,14$ m emelkedési magasság adódik.

1.23. Feladat: (HN: 3C-29) A kinematikai egyenletekből kiindulva határozzuk meg egy a vízszintes síkhoz képest θ szög alatt, v_0 kezdősebességgel kilőtt lövedék röppályájának egyenletét és az R lőtávolságot!

Megoldás: Az elhajított test gyorsulásvektora $\mathbf{a} = (0; -g)$, a $t = 0$ kezdőpillanathoz tartozó sebesség vektora pedig $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \theta; v_0 \sin \theta)$. A kinematikai alapösszefüggéseket alkalmazva a sebesség vízszintes komponense

$$v_x(t) = v_0 \cos \theta, \quad (1.23.1)$$

míg a függőleges komponense

$$v_y(t) = v_0 \sin \theta - gt. \quad (1.23.2)$$

A koordináta-rendszer kezdőpontját a hajítás pontjába választva, az eldobott test $\mathbf{r}(t) = (x(t); y(t))$ helyvektorának komponensei

$$x(t) = v_0 t \cos \theta, \quad (1.23.3)$$

és

$$y(t) = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1.23.4)$$

A pálya általános egyenletét megkapjuk, ha a fenti két egyenletből (melyeket a röppálya paraméteres egyenleteinek is nevezhetünk) kiküszöböljük a t paramétert. Ekkor a röppálya általános egyenlete:

$$y(x) = x \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \theta}. \quad (1.23.5)$$

Az 1.23.5 egy száraival lefelé álló parabolát ír le, amely átmegey az origón. A lőtávolságnak megfelelő $x = R$ koordinátában az y emelkedési magasság zérus, vagyis a lőtávolságot az $y(x = R) = 0$ egyenlet megoldásával kaphatjuk meg:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta. \quad (1.23.6)$$

Megjegyzés: Adott v_0 és g esetén a lőtávolság akkor a legnagyobb, ha $\sin 2\theta = 1$. Ebből a $\theta = 45^\circ$ -os szög következik.

1.24. Feladat: * (HN: 3C-30) A ferde hajítás röppálya egyenletének differenciálásával mutassuk meg, hogy a maximális lőtávolságot $\theta = 45^\circ$ kilövési szög esetén ériük el!

Megoldás: A hajítási távolság mint a θ kilövési szög függvénye az (1.23.6) egyenlettel adott. A függvénynek szélsőértéke van, ha az elsőrendű derivált nulla, azaz

$$\frac{dR}{d\theta} = 0. \quad (1.24.1)$$

A differenciálás műveletét elvégezve:

$$0 = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos 2\theta. \quad (1.24.2)$$

Az egyenletet megoldva, a hajítási szögre $\theta = 45^\circ$ adódik. Egy függvény szélsőértéke azonban a lokális maximum mellett jelenthet lokális minimumot is. Ahhoz, hogy biztosan állíthassuk, hogy egy függvény szélsőértéke lokális maximumnak felel meg, meg kell vizsgálnunk a függvény másodrendű deriváltját is a kérdéses pontban.

$$\frac{d^2R}{d\theta^2} = -4 \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta. \quad (1.24.3)$$

A másodrendű derivált a $\theta = 45^\circ$ helyettesítési értékben negatív, ezért a talált szélsőérték valóban egy lokális (esetünkben globális) maximumot találtunk.

1.25. Feladat: (HN: 3C-32) Határozzuk meg, hogy milyen θ kilövési szög esetén lesz egy lövedék D lőtávolsága egyenlő a H emelkedési magassággal?

Megoldás: A lövedék $y(x)$ röppályája az (1.23.5) egyenlettel adható meg, a hajítás távolságát

pedig az (1.23.6) egyenlettel adtuk meg egy korábbi feladatban. Az emelkedés H magasságát a $H = y(\frac{D}{2})$ összefüggés adja meg, azaz

$$H = \frac{D}{2} \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{2} g \frac{D^2}{4v_0^2 \cos^2 \theta}. \quad (1.25.1)$$

A feladat szövegének megfelelően a $D = H$ feltételből a

$$\cos \theta = \frac{1}{4} \sin \theta \quad (1.25.2)$$

trigonometriai egyenlet adódik. Ennek fizikailag értelmes megoldása:

$$\theta = 76^\circ. \quad (1.25.3)$$

1.26. Feladat: (HN: 3C-38) Egy szöcske vízszintes irányban legfeljebb $R_{max} = 1$ m távolságra tud elugrani. Feltételezve, hogy az elugráshoz szükséges idő elhanyagolható, határozzuk meg, hogy vízszintes úton mekkora sebességgel halad a szöcske, ha mindig a maximális távolságba ugrik!

Megoldás: A vízszintes hajítás R távolságát egy korábbi feladatban az (1.23.6) egyenlettel adtuk meg. A hajítási távolság a maximális értékét (a röppálya szimmetria-tulajdonságai miatt) a $\theta = 45^\circ$ hajítási szög mellett veszi fel:

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (1.26.1)$$

Ebből az ugrás sebessége

$$v_0 = \sqrt{R_{max} g}. \quad (1.26.2)$$

A szöcske vízszintes haladási sebességét a v_0 sebesség vízszintes komponense adja meg. Mivel a hajítási szög $\theta = 45^\circ$, így

$$v_x = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{R_{max} g}{2}} \quad (1.26.3)$$

adódik.

1.27. Feladat: (HN 3C-39) Egy lövedéket θ kilövési szöggel lövünk ki. Határozzuk meg, hogy a lövedék röppályájának tetőpontja mekkora φ szög alatt látszik a kilövési pontból!

Megoldás: A korábbi feladatok megoldásaiból tekintsük a hajítási röppálya (1.23.5 egyenletét

és az (1.23.6) egyenlettel adott hajítási távolságot. A pálya szimmetria-tulajdonságai miatt a röppálya tetőpontjának x koordinátája

$$x = \frac{D}{2} = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\theta. \quad (1.27.1)$$

Az ehhez tartozó $y = H$ emelkedési magasság pedig

$$H = y \left(\frac{D}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \theta. \quad (1.27.2)$$

Az (1.27.1) és (1.27.2) egyenletek segítségével

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta \quad (1.27.3)$$

adódik a keresett szögre.

1.28. Feladat: ** A falhoz támasztott L hosszúságú létra földdel érintkező P pontját v_0 állandó sebességgel mozgatjuk az x tengely mentés, pozitív irányban. Az xy sík merőleges a falra, az x koordináta pedig a faltól mért távolságot méri. A P pont a $t = 0$ időpillanatban legyen az x_0 koordinátájú helyen.

- Adjuk meg a létra felső A pontjának sebességét és
- gyorsulását az idő függvényében!

Megoldás:

(a) Az alsó pont helye az idő függvényében: $x_P(t) = v_0 t + x_0$. Ha az A pont nem válik el a faltól, az A pont $y_A(t)$ koordinátája és a P pont vízszintes $x_P(t)$ koordinátája között az alábbi összefüggés érvényes:

$$x_P^2(t) + y_A^2(t) = L^2, \quad (1.28.1)$$

ahonnan $y_A(t) = \sqrt{L^2 - x_P^2(t)}$ adja meg a legfelső pont talajtól mért távolságát. Az A pont sebességét az (1.28.1) egyenletet idő szerinti deriválásával kaphatjuk meg:

$$x_P(t)x_P'(t) + y_A(t)y_A'(t) = 0 \quad (1.28.2)$$

Az egyenletben az A pont sebessége $v_A(t) = y_A'(t)$ a P pont sebessége pedig $v_P(t) = x_P'(t) \equiv v_0$. A felső pont sebessége tehát

$$v_A(t) = y_A'(t) = -\frac{x_P(t)x_P'(t)}{y_A(t)} = -\frac{(v_0 t + x_0)v_0}{\sqrt{L^2 - (v_0 t + x_0)^2}}. \quad (1.28.3)$$

Megjegyzés: Az $y(t) = \sqrt{L^2 - x^2(t)}$ függvény explicit idő szerinti deriválásával hasonlóan a fenti végeredményhez juthatunk.

(b) Az A pont gyorsulását az

$$a_P(t) = \frac{d}{dt} v_y(t) = - \frac{v_0^2 \sqrt{L^2 - (v_0 t + x_0)^2} + \frac{(v_0 t + x_0)^2 v_0^2}{\sqrt{L^2 - (v_0 t + x_0)^2}}}{L^2 - (v_0 t + x_0)^2} \quad (1.28.4)$$

összefüggéssel számolhatjuk ki.

1.29. Feladat: ** Egy kétágú létra egyik szárának alsó pontját (az origóban) rögzítjük, a másik szár alsó pontját pedig állandó v_0 sebességgel vízszintesen mozgatjuk az x tengely mentén, pozitív irányba. Ennek következtében a létra szétnyílik. A mozgó alsó P pont a $t = 0$ időpillanatban legyen az x_0 koordinátájú helyen. Mekkora a létra felső A pontjának \mathbf{v}_A sebessége az idő függvényében? A létra szárai L hosszúságúak.

Megoldás: A P pont x koordinátája az idő függvényében: $x_P(t) = v_0 t + x_0$. A létra szimmetriatulajdonságai miatt az A pont mozgásának x irányú vetülete $v_0/2$ sebességű mozgással írható le:

$$x_A(t) = \frac{1}{2}(v_0 t + x_0). \quad (1.29.1)$$

Mivel a létra baloldali szára nem nyúlik meg:

$$x_A^2(t) + y_A^2(t) = L^2 \quad (1.29.2)$$

ahol $y(t) = \sqrt{L^2 - x_f^2(t)}$ a felső pont talajtól való távolsága. Az (1.29.2) egyenletet idő szerint deriválva kapjuk a

$$x_A(t)x_A'(t) + y_A(t)y_A'(t) = 0 \quad (1.29.3)$$

egyenletet, ahol az A pont x irányú sebessége $v_x(t) = x_A'(t) = v_0/2$, valamint az y irányú sebessége

$$v_y(t) = y_A'(t) = - \frac{x_A(t)x_A'(t)}{y_A(t)} = - \frac{\frac{1}{4}(v_0 t + x_0)v_0}{\sqrt{L^2 - \frac{1}{4}(v_0 t + x_0)^2}}. \quad (1.29.4)$$

1.30. Feladat: ** Egy $2l$ szélességű folyó az x tengely mentén helyezkedik el úgy, hogy az x tengely a folyó geometriai középvonala. A folyó sebességprofilja a partvonalra merőleges y koordináta függvényében

$$V(y) = v_0 \left(1 - \frac{y^2}{l^2} \right). \quad (1.30.1)$$

Az koordiná-rendszer origójából (a folyó közepéről) a partra merőleges irányban, állandó u sebességgel kezd el úszni egy ember.

- (a) Mekkora távolsággal sodródik le az úszó a folyó mentén?
 (b) Milyen az úszó mozgásának pályagörbéje?

Megoldás:

- (a) Az úszó y koordinátája az idő függvényében

$$y = ut, \quad (1.30.2)$$

így az x tengely irányú sebesség az idő függvényében

$$v_x(t) = V(y(t)) = v_0 \left(1 - \frac{u^2 t^2}{l^2} \right) \quad (1.30.3)$$

összefüggéssel adható meg. A part eléréséhez $t_0 = l/u$ idő szükséges. Az x tengely irányú d elmozdulás az x irányú sebességkomponens integrálásával kapjuk meg:

$$x(t) = \int_0^t v_x(t') dt' = \int_0^t v_0 \left(1 - \frac{u^2 t'^2}{l^2} \right) dt' = \left[v_0 t' - \frac{1}{3} v_0 \frac{u^2 t'^3}{l^2} \right]_0^t = v_0 t - \frac{1}{3} v_0 \frac{u^2 t^3}{l^2}. \quad (1.30.4)$$

A partra úzás alatt az úszó $d = x(t_0)$ távolsággal sodródik le a folyó mentén. Rövid számolással

$$d = \frac{2}{3} \frac{lv_0}{u} \quad (1.30.5)$$

adódik.

- (b) Az úszó pályájának paraméteres egyenletét az (1.30.2) és (1.30.4) egyenletek adják meg. A pályagörbe általános egyenletét a t paraméter kiküszöbölésével határozhatjuk meg.

$$x(y) = v_0 \frac{y}{u} - \frac{1}{3} v_0 \frac{y^3}{ul^2} \quad (1.30.6)$$

* *Megjegyzés:* Általános esetben egy görbe egyenlete $f(x, y) = 0$ implicit formában adható meg.

1.31. Feladat: Egy kocszi vízszintes pályán $v = 30$ m/s állandó sebességgel egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. A mozgó kocsiról egy lövedéket lőnek ki úgy, hogy miután a kocszi $s = 80$ m-t megtett, a lövedék visszaesik a kocsira.

- (a) Mennyi a repülési idő?
 (b) A kocsrhoz képest mekkora relatív sebességgel és a vízszinteshez képest mekkora szög alatt kellett a lövedéket kilőni?

Megoldás:

(a) A lövedék repülési ideje

$$t_0 = \frac{s}{v}. \quad (1.31.1)$$

Behelyettesítve a számadatokat $t_0 \approx 2,67$ s adódik.(b) A lövedéknek a kocsihoz képest csak függőleges irányú sebessége lehetett. Mivel t_0 idő múltán ismét a kocsira esett vissza a lövedék, t_0 idő elteltével a lövedék y koordinátája nulla lesz:

$$y(t_0) = 0 = v_y t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2. \quad (1.31.2)$$

Ebből a lövedék sebességének függőleges komponense:

$$v_y = \frac{1}{2} g t_0. \quad (1.31.3)$$

adódik. Behelyettesítve a számadatokat $v_y = 13,3$ m/s adódik.**1.32. Feladat:** Egy lövedéket $v = 330$ m/s vízszintes irányú kezdősebességgel egy $h = 80$ m magas szikla tetejéről lőnek ki.

- (a) Mennyi ideig tart, amíg a lövedék a Föld felszínére érkezik?
- (b) A szikla aljától mekkora távolságban érkezik a Földre?
- (c) Mekkora és milyen irányú sebességgel csapódik a talajba?

Megoldás:

(a) A lövedék függőleges irányban egyenletesen gyorsuló mozgást végez. A repülés ideje

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (1.32.1)$$

Behelyettesítve a számadatokat $t_0 \approx 4$ s adódik.

(b) A lövedék a szikla aljától

$$x = v t_0 \quad (1.32.2)$$

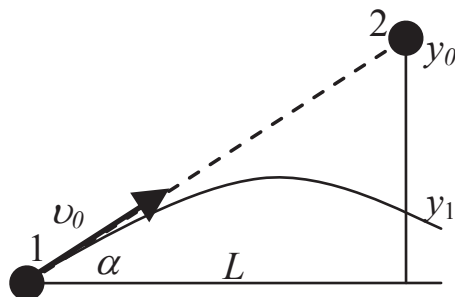
távolságban érkezik a Földre. Behelyettesítve a számadatokat $x \approx 132$ m adódik.(c) A becsapódás pillanatában a sebességkomponensek $v_x = 330$ m/s, valamint $v_y = g t_0 = 40$ m/s. Így a sebesség nagysága

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \approx 332,4 \text{ m/s}, \quad (1.32.3)$$

míg a becsapódás szöge

$$\alpha = \arctg \frac{v_y}{v_x} \approx 6,9^\circ. \quad (1.32.4)$$

1.33. Feladat: A 6. ábrán látható két tömegpontot egyszerre indítjuk úgy, hogy miközben a 2. tömegpontot elengedjük, az 1. tömegpontot a 2. tömegpont kezdeti helyzetének irányába lőjük v_0 kezdeti sebességgel. A két test vízszintes távolsága L . Az (L, α, v_0) adatokkal:



6. ábra.

- Fejezzük ki a 2. test kezdeti y_0 magasságát!
- Bizonyítsuk be, hogy ha a két test pályája metszi egymást, akkor a két test **mindig** találkozik a pályák (L, y_1) metszéspontjában!
- Fejezzük ki a találkozás t időpontját!
- Mekkora az 1. test y_1 magassága a találkozás pillanatában?

Megoldás:

- (a) A 2. test y_0 magassága

$$y_0 = L \tan \alpha. \quad (1.33.1)$$

- (b) Az 1. test emelkedési magassága az idő függvényében

$$y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2, \quad (1.33.2)$$

míg a 2. test esési magassága

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2} g t^2. \quad (1.33.3)$$

Tekintettel arra, hogy

$$L = v_0 t \cos \alpha, \quad (1.33.4)$$

és ezt (az 1.33.2) egyenletbe helyettesítve a két emelkedési magasság egyenlősége közvetlenül látható.

- (c) A találkozásig eltelt idő

$$t = \frac{L}{v_0 \cos \alpha}. \quad (1.33.5)$$

(d) A találkozási idő behelyettesítésével a találkozási magasság

$$y_1 = y_0 - \frac{1}{2}g \frac{L^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1.33.6)$$

Tömegpontok térbeli mozgása

1.34. Feladat: ** Egy pontszerűnek tekinthető labda a térben $\mathbf{v} = at^2\mathbf{i} + bt^2\mathbf{j} + ct^2\mathbf{k}$ m/s sebességgel mozog; $a = -2,5$ m/s³, $b = 4$ m/s³, $c = 1$ m/s³. Mekkora utat tesz meg a labda mozgása első $t = 5$ másodperce alatt?

Megoldás: Az út a pálya ívhossza, azaz

$$s = \int_0^t \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} dt = \int_0^t \sqrt{(at^2)^2 + (bt^2)^2 + (ct^2)^2} dt =$$

$$\int_0^t \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} t^2 dt = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{3} [t^3]_0^t = 200,83 \text{ m}. \quad (1.34.1)$$

2. Feladatok körmozgás tárgyköréből

Kerületi sebesség

2.1. Feladat: (HN 11C-14) Egy kerék a vízszintes talajon csúszás nélkül $v = 6$ m/s sebességgel gördül. Határozzuk meg a kerületén lévő részecske talajhoz viszonyított pillanatnyi sebességét, mikor a részecske a kerék elülső pontjában van!

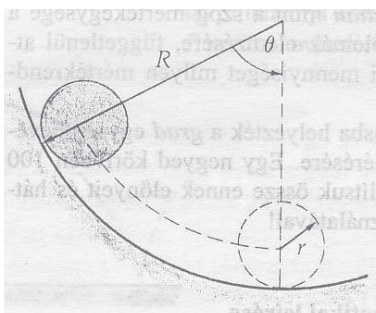
Megoldás: A haladó mozgásból eredően a kerék minden egyes pontja rendelkezik $v_x = 6$ m/s vízszintes irányú haladómozgással. Ugyanakkor a kerületi pontok ugyancsak $v_k = 6$ m/s sebességgel mozognak a kerék középpontja körül. Az elülső pont kerületi sebességének iránya lefelé mutat, azaz $v_y = -6$ m/s. A részecske pillanatnyi sebességvektora tehát

$$\mathbf{v} = (v_x; v_y) = (6; -6) \text{ m/s}. \quad (2.1.1)$$

Megjegyzés: A tiszta gördülés feltétele, hogy a kerék legalsó pontja ne mozogjon a talajhoz képest. A legalsó pont kerületi sebessége épp ellentétes irányú, de azonos nagyságú, mint a

kerék haladó mozgásából származó sebessége. A két mozgás „összegének” eredménye, hogy a kerék legalsó pontjának sebessége zérus a talajhoz képest.

2.2. Feladat: (HN 11C-15) Egy r sugarú henger csúszás nélkül gördül egy függőleges síkban lévő R sugarú körpályáján a 7. ábra szerint. Mutassuk meg, hogy a henger saját tengelye körüli δ elfordulási szöge és a henger tengelyének θ szögelfordulása között fennáll, hogy $\delta = (R-r)\theta/r!$



7. ábra.

Megoldás: Az r sugarú henger középponja által sűrt s ív hosszúságát kétféle módon határozhatjuk meg. Egyrészt a θ szöget felhasználva

$$s = (R-r)\theta, \quad (2.2.1)$$

adódik, másrészt a δ szög- segítségével

$$s = r\delta. \quad (2.2.2)$$

A két egyenletből

$$\delta = \frac{(R-r)\theta}{r}, \quad (2.2.3)$$

adódik, ami éppen a feladat állítása.

Szöggyorsulás

2.3. Feladat: Egy $R = 30$ cm sugarú kerékre szíjat csévélünk. Míg a kerék $f = 2,0$ 1/s-os fordulatszámról egyenletesen lassulva leáll, $s = 25$ m szíj tekeredik le róla.

(a) A folyamat alatt hány fordulatot tesz meg a kerék?

(b) Mekkora a kerék szöggyorsulása?

Megoldás: A kezdeti szögsebesség $\omega_0 = 2\pi f \approx 12,56$ rad/s.

(a) A fordulatok N száma az

$$N = \frac{s}{2R\pi} \quad (2.3.1)$$

összefüggéssel határozható meg. Behelyettesítve a számadatokat $N \approx 13,26$ adódik.

(b) Az N fordulat megtétele alatt a kerék

$$\varphi_0 = 83,33 \text{ rad} \quad (2.3.2)$$

szöget fordul el. A forgásra vonatkozó kinematikai egyenletek segítségével felírhatjuk a mindenkor

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t, \quad (2.3.3)$$

szögsebességet és az elfordulás

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2 \quad (2.3.4)$$

szögét. A megállás pillanatában $\omega(t) = 0$, ekkor $\varphi(t) = \varphi_0$ rad. A

$$0 = \omega_0 + \beta t \quad (2.3.5)$$

és a

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2 \quad (2.3.6)$$

egyenletrendszer megoldva a β és t ismeretlenekre, megkaphatjuk a szöggyorsulás értékét:

$$\beta = -\frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\varphi} \approx -0,95 \text{ rad/s}^2. \quad (2.3.7)$$

2.4. Feladat: Egy autó egyenletesen gyorsulva álló helyzetből 15 m/s-os sebességre tesz szert 20 s alatt.

(a) Mekkora a kerék szöggyorsulása, ha egy kerekének sugara 1/3 m és tisztán gördül a gyorsulás alatt?

(b) Hány fordulatot tett meg a kerék a folyamat alatt?

Megoldás:

(a) Az autó gyorsulása

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0,75 \text{ m/s}^2. \quad (2.4.1)$$

Mivel $a = R\beta$ (a kerék tisztán gördül), a szöggyorsulás értéke

$$\beta = 2,25 \text{ rad/s}^2. \quad (2.4.2)$$

(b) A szögelfordulás nagysága pedig

$$\varphi = \frac{1}{2}\beta t^2 = 450 \text{ rad}, \quad (2.4.3)$$

amelyből a megett fordulatok száma

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = 71,6. \quad (2.4.4)$$

Centripetális és tangenciális gyorsulások

2.5. Feladat: (HN: 4C-25) Egy versenyautó $v_0 = 210 \text{ km/h}$ sebességgel mozog a $s = 2 \text{ km}$ kerületű körpályán, majd egy teljes kört megtéve egyenletesen lassítva megáll.

- Mekkora az autó tangenciális gyorsulása?
- Mekkora a centripetális gyorsulás $d = 1 \text{ km}$ -rel a megállás előtt?
- Mekkora ebben a pillanatban az eredő gyorsulás?

Megoldás:

(a) Az egyenletes kerületi (a_t tangenciális) gyorsulás hatására a versenyautó

$$t_0 = \frac{v_0}{|a_t|} \quad (2.5.1)$$

idő alatt áll meg. Ez alatt az idő alatt a versenyautó

$$s = v_0 t_0 - \frac{1}{2}|a_t|t_0^2 = \frac{v_0^2}{2|a_t|}, \quad (2.5.2)$$

utat tesz meg. A mozgás során az autó gyorsulása ezért:

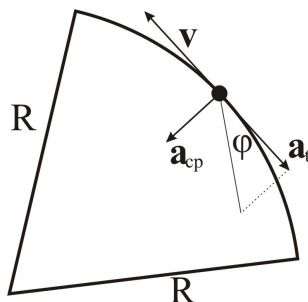
$$|a_t| = \frac{v_0^2}{2s} \approx 0,85 \text{ m/s}^2. \quad (2.5.3)$$

Mivel az autó sebessége 0-ra csökken a mozgás során, a megszokott konvenciókkal $a_t \approx -0,85 \text{ m/s}^2$.

(b) Abban a pillanatban, amikor az autónak még d távolságot kell megtennie a megállásig, a hátralévő út megtételéhez még további

$$t_0 = \sqrt{\frac{2d}{|a_t|}}, \quad (2.5.4)$$

idő szükséges. A megálláshoz szükséges időt úgy kaphatjuk meg a legegyszerűbb módon, ha a lassulás folyamatát időben visszafelé tekintjük. Ekkor egy álló helyzetből, $-a_t$ gyorsulással



8. ábra.

mozgó autó mozgását követjük nyomon. A d távolság megtételéig éppen t_0 idő szükséges. A versenyautó sebességét is hasonló gondolatmenettel számolhatjuk ki ebben a pillanatban:

$$v = |a_t|t_0 \approx 41,3 \text{ m/s.} \quad (2.5.5)$$

Ebben a pillanatban a centripetális gyorsulás

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{2\pi v^2}{d} \approx 5,36 \text{ m/s}^2. \quad (2.5.6)$$

(c) Az eredő gyorsulás pedig

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} \approx 5,43 \text{ m/s}^2. \quad (2.5.7)$$

2.6. Feladat: (HN: 4C-26) Egy $R = 300$ m-es állandó görbületi sugarú úton haladó autó $a_t = -1,2$ m/s^2 gyorsulással fékezni kezd. Határozzuk meg az autó gyorsulásának irányát és nagyságát abban az időpontban, amikor sebessége $v = 15$ m/s . Készítsünk vázlatot a gyorsulásvektor irányának jelzésére!

Megoldás: A kör középpontja felé mutató centripetális gyorsulás

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} \approx 0,75 \text{ m/s}^2. \quad (2.6.1)$$

Az autó a_t gyorsulása a tangenciális gyorsulás, iránya pedig a v sebességgel ellentétes. A tangenciális és centripetális gyorsulás egymásra merőlegesek. Az eredő gyorsulás érintő irányával bezárt φ szögére érvényes (lásd a 8. ábrát), hogy

$$\text{tg } \varphi = \left| \frac{a_{cp}}{a_t} \right| = 0,625. \quad (2.6.2)$$

Így az eredő gyorsulás $\varphi = 32^\circ$ szöget zár be az érintővel, nagysága pedig $|a| = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2} \approx 1,4 \text{ m/s}^2$.

2.7. Feladat: (HN: 4C-27) A fonálra kötött labdát $R = 0,3$ m sugarú, a talaj felett $h = 1,2$ m magasban levő, vízszintes síkú körpályán állandó sebességgel pörgetünk. A fonal hirtelen elszakad és a labda attól a ponttól $s = 2$ m távolságban ér talajt, amelyet úgy kapunk, hogy az elszakadás pillanatában elfoglalt helyzetét függőlegesen a talajra vetítjük. Mekkora volt a labda centripetális gyorsulása, amíg körmozgást végzett?

Megoldás: A köté elszakadásának pillanatában a labda vízszintes irányú sebessége $v = R\omega$, ahol ω a körmozgás körfrekvenciája. A fonál elszakadása után a labda s m utat tesz meg

$$t_0 = \frac{s}{R\omega} \quad (2.7.1)$$

idő alatt. Másrészt a labda függőleges irányban h m magasságból szabadon esik, ezért

$$h = \frac{1}{2}gt_0^2 = \frac{gs^2}{2\omega^2R^2}. \quad (2.7.2)$$

A fonál elszakadásáig körmozgás körfrekvenciája tehát

$$\omega = \sqrt{\frac{gs^2}{2hR^2}} \quad (2.7.3)$$

volt. Ebből a centripetális gyorsulás könnyen meghatározható:

$$a_{cp} = R\omega^2 = \frac{gs^2}{2hR} \approx 55,6 \text{ m/s}^2. \quad (2.7.4)$$

2.8. Feladat: (HN 4C-28) Egy lövedéket a vízszintes síkhoz képest θ szög alatt v_0 sebességgel lövünk ki. Fejezzük ki a röppálya tetőpontjához tartozó R görbületi sugarat a v_0 , θ és g függvényében!

Megoldás: A pálya tetőpontján a pályát érintő sebességkomponens $v_x = v_0 \cos \theta$. A lövedék centripetális gyorsulása

$$a_{cp} = \frac{v_x^2}{R}. \quad (2.8.1)$$

A centripetális gyorsulást a nehézségi gyorsulás biztosítja, ezért $a_{cp} = g$. A két összefüggésből a görbületi sugár kifejezhető:

$$R = \frac{v_x^2}{g} = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g}. \quad (2.8.2)$$

3. Feladatok a dinamika tárgyköréből

Newton három törvénye

3.1. Feladat: Három azonos m tömegű gyöngyszemet fonálra fűzünk, egymástól kis távolságokban a fonálhoz rögzítünk, és az elhanyagolható tömegű fonál végét ujjunkkal fogva függőlegesen lógatunk a g homogén nehézségi erőterben. Majd a t_0 időpillanattól kezdve a gyorsulással emeljük a fonál végét. Mekkora erő ébred az egyes fonalszakaszokban?

Megoldás: Számozzuk meg a gyöngyszemeket. A legalsó legyen az 1-es, a középső a 2-es, a felső a 3-as. A koordináta-rendszer y tengelye mutasson felfele. Mindhárom gyöngyszem a gyorsulással mozog felfele, így a koordináta-rendszerben pozitív értékű. A nehézségi gyorsulás lefele mutat, így negatív: $-g$.

Az 1-es testre a K_1 kötél-erő (az 1-es 2-es testet összekötő fonalszakaszon) hat felfele;

a 2-es testre hat a $-K_1$ kötél-erő lefele (az 1-es 2-es testet összekötő fonalszakaszon) és a K_2 kötél-erő felfele (a 2-es 3-as testet összekötő fonalszakaszon);

a 3-as testre hat a $-K_2$ kötél-erő lefele (az 2-es 3-as testet összekötő fonalszakaszon) és az F kötél-erő felfele (ezt mi fejtjük ki).

A mozgásegyenletek rendre (1-2-3 testre):

$$ma = K_1 - mg, \quad (3.1.1)$$

$$ma = K_2 - K_1 - mg, \quad (3.1.2)$$

$$ma = F - K_2 - mg. \quad (3.1.3)$$

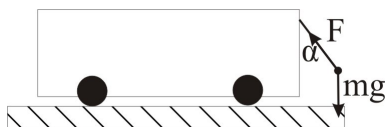
Az egyenletrendszerből a keresett kötél-erők:

$$K_1 = m(a + g), \quad (3.1.4)$$

$$K_2 = ma + K_1 + mg = 2m(a + g), \quad (3.1.5)$$

$$F = ma + K_2 + mg = 3m(a + g). \quad (3.1.6)$$

Megjegyzés: Gyakorlásként általánosítsa a feladatot különböző számú és tömegű gyöngyszemekre!



9. ábra.

3.2. Feladat: Egy mozgó kocsin rögzített fonál végén egy $m = 2$ kg tömegű test lóg. A fonál szakítási szilárdsága $F_{max} = 30$ N. Mekkora egyenletes gyorsulással mozoghat a kocsi, hogy a fonál még éppen el ne szakadjon?

Megoldás: Jelölje α azt a szöveget, amelyet a gyorsítás alatt a kötél bezár a függőlegessel (lásd a 9. ábrát). Ekkor az F kötélerő vízszintes komponense gyorsítja a testet

$$ma = F \sin \alpha, \quad (3.2.1)$$

míg a függőleges komponens a súlyerővel tart egyensúlyt

$$mg = F \cos \alpha. \quad (3.2.2)$$

A két egyenletből a gyorsulás maximális értéke

$$a_{max} = \sqrt{\frac{F_{max}^2}{m^2} - g^2}. \quad (3.2.3)$$

Behelyettesítve a számadatokat $a_{max} \approx 11,18$ m/s² adódik.

3.3. Feladat: (HN 5B-19) Nyugalomból induló test súrlódásmentesen csúszik le a vízszintessel $\alpha = 30^\circ$ -os szöveget bezáró lejtőn.

- Határozzuk meg azt a t_0 időpillanatot amikor a test eléri a $v_0 = 50$ m/s-os sebességet?
- Mekkora s távolságba jut el ezalatt a test?

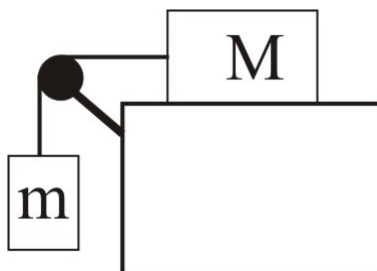
Megoldás:

(a) Az m tömegű test mozgásegyenlete

$$ma = mg \sin \alpha, \quad (3.3.1)$$

amiből a test gyorsulása

$$a = g \sin \alpha. \quad (3.3.2)$$



10. ábra.

A test sebessége az idő függvényében

$$v(t) = g \sin \alpha t. \quad (3.3.3)$$

A t_0 időpillanatban a test eléri a v_0 sebességet, azaz $v(t_0) = v_0$. A sebesség eléréséhez szükséges idő pedig $t_0 = v_0 / (g \sin \alpha)$. Behelyettesítve a számadatokat $t_0 = 10$ s adódik.

(b) A t_0 idő alatt megtett út

$$s = \frac{1}{2} g t_0^2 \sin \alpha. \quad (3.3.4)$$

Behelyettesítve a számadatokat $s = 250$ m adódik.

3.4. Feladat: (HN: 5B-33) Az m és $M = 8$ kg tömegű hasábokat az 10. ábrán látható elrendezésben fonállal kötünk össze. A csiga tengelysúrlódása és az érintkező felületek közötti súrlódás elhanyagolható. Az M tömeg alatti asztal a talajhoz rögzített, így a testek mozgása során nem mozdul el.

(a) Mekkora az alsó test m tömege, ha a testek gyorsulása $a = 2$ m/s²?

(b) Mekkora K erő feszíti a fonalat?

Megoldás:

(a) Mivel a hasábokat összekötő kötélnem nyúlik meg, mindkét hasáb gyorsulása ugyanakkora (lásd a 11. ábrát.) Az egyes hasábok mozgásegyenletei

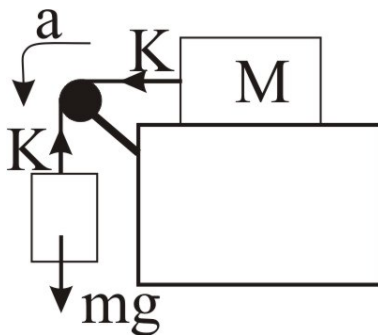
$$ma = mg - K \quad (3.4.1)$$

és

$$Ma = K. \quad (3.4.2)$$

E két egyenletből

$$m = \frac{Ma}{g - a} = 2 \text{ kg} \quad (3.4.3)$$



11. ábra.

adódik.

(b) A kötelet feszítő erő pedig

$$K = \frac{mM}{m+M}g = 16\text{N}. \quad (3.4.4)$$

3.5. Feladat: Egy $m = 10\text{ kg}$ tömegű kocka egy doboz belsejében, a doboz alján nyugszik. Mekkora erővel nyomja a kocka a doboz alját, ha

- (a) a dobozt $a = 6\text{ m/s}^2$ gyorsulással függőlegesen felfelé gyorsítjuk,
 (b) a doboz szabadon esik (g gyorsulással gyorsul lefelé)?

Megoldás:

(a) Vegyük a gyorsulást felfele pozitívnak. Ekkor a mozgásegyenlet

$$ma = N - mg, \quad (3.5.1)$$

amiből a nyomóerő

$$N = m(g+a) = 160\text{N}. \quad (3.5.2)$$

(b) Ha a test szabadon esik, akkor

$$a = -g, \quad (3.5.3)$$

így a támaszerő zérus!

3.6. Feladat: Egy $\alpha = 25^\circ$ hajlásszögű lejtőre $m = 1,5\text{ kg}$ tömegű testet helyezünk. A test és a lejtő között $\mu = 0,3$ a csúszási súrlódási együttható. Elindul-e a kezdetben nyugalomban lévő test, ha elengedjük? Ha igen, mekkora a gyorsulása?

Megoldás: A testre ható erőket fel kell bontani lejtő irányú és lejtőre merőleges komponensekre. A súlyerő lejtő irányú komponense

$$mg \sin \alpha,$$

a lejtőre merőleges

$$mg \cos \alpha.$$

Az N támaszerő a lejtőre merőleges és $N = mg \cos \alpha$, az F_s súrlódási erő a lejtővel párhuzamos. A test akkor csúszik meg, ha

$$mg \sin \alpha > \mu mg \cos \alpha, \quad (3.6.1)$$

azaz

$$\mu \leq \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.6.2)$$

Mivel itt $\operatorname{tg} 25^\circ = 0,466$, a test megcsúszik. A mozgást leíró egyenletek

$$ma = mg \sin \alpha - F_s, \quad (3.6.3)$$

$$N = mg \cos \alpha, \quad (3.6.4)$$

$$F_s = \mu N. \quad (3.6.5)$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 1,48 \text{ m/s}^2. \quad (3.6.6)$$

Centripetális erő

3.7. Feladat: Egy $m = 70 \text{ kg}$ tömegű pilóta repülőgéppel $R = 1 \text{ km}$ sugarú függőleges síkú pályán $v = 1080 \text{ km/h}$ egyenletes sebességgel köröz. A repülőnek állandóan a teteje néz a körpálya középpontja felé. Mekkora erővel nyomja a pilóta az ülést a körpálya legfelső pontján?

Megoldás: A körpálya legfelső pontjában a pilóta körmozgását az mg súlyerő és a kör közepe felé mutató N támaszerő biztosítja:

$$m \frac{v^2}{R} = mg + N \quad (3.7.1)$$

Ebből az egyenletből az N támaszerő könnyen kifejezhető:

$$N = m \frac{v^2}{R} - mg = 5600 \text{ N}. \quad (3.7.2)$$

A pilóta az ülést ugyanekkora nagyságú, ellentétes irányú erővel nyomja. (A nyomóerő a pilóta súlyának nyolcszorosa.)

3.8. Feladat: (HN 5B-20) Egy gépkocsi $R = 18$ m sugarú, függőleges síkú, kör alakú domboldalon mozog felfelé. A domb tetején a vezető azt tapasztalja, hogy éppen csak érinti az ülést. Mekkora sebességgel haladt a gépkocsi?

Megoldás: A domb tetején két erő hat a vezetőre, melyek biztosítják a vezető körpályán történő mozgását. A kör közepe felé mutató mg súlyerő, valamint az ülés által kifejtett, ellentétes irányú N támaszerő határozzák meg a vezető gyorsulását, mely (feltéve, hogy az autó nem válik el az úttesttől) a centripetális gyorsulással egyenlő:

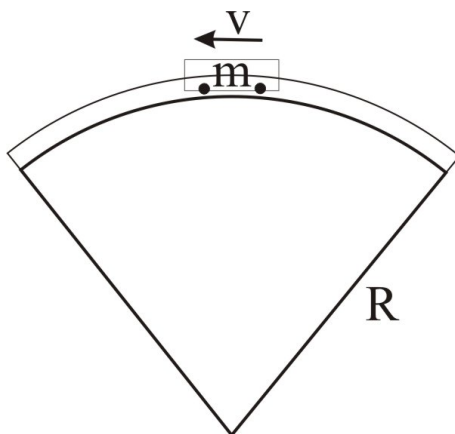
$$m \frac{v^2}{R} = mg - N. \quad (3.8.1)$$

Határesetben, amikor a vezető éppen csak érinti az ülést, $N \rightarrow 0$. A határesethez tartozó sebesség:

$$v = \sqrt{Rg} \approx 13,41 \text{ m/s}. \quad (3.8.2)$$

3.9. Feladat: (HN 5B-21) A hullámvasút kocsija állandó $v = 6$ m/s-os sebességgel halad át a pálya $R = 6$ m sugarú, függőleges síkú részének tetőpontján a 12. ábrán látható módon. A kocsi és az utasok együttes tömege $m = 1350$ kg.

- Mekkora és milyen irányú a kocsi gyorsulása a tetőponton?
- Mekkora eredő erő hat ebben a pillanatban a kocsira és az utasokra összesen?
- Mekkora erővel nyomja a pálya a kocsit a tetőponton?



12. ábra.

Megoldás:

(a) A kocsi gyorsulása a kör közepe felé (azaz lefelé) mutató centripetális gyorsulással egyenlő, melynek nagysága

$$a = a_{cp} = \frac{v^2}{R} = 6 \text{ m/s}^2. \quad (3.9.1)$$

(b) A kocsira ható erők eredőjét a kocsi gyorsulása határozza meg:

$$F = ma_{cp} = 8100 \text{ N}. \quad (3.9.2)$$

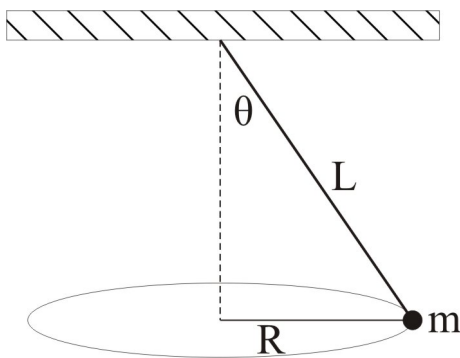
(c) A kocsira ható erők eredője a hullámvasút N támaszerejének és a kocsira ható súlyerőnek a különbsége:

$$F = mg - N. \quad (3.9.3)$$

Felhasználva a centripetális gyorsulás a (3.9.1) kifejezését, valamint a (3.9.2) egyenletet:

$$N = mg - ma_{cp} = 5400 \text{ N}. \quad (3.9.4)$$

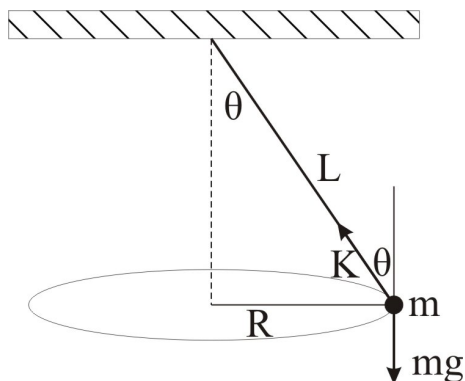
3.10. Feladat: (HN 5B-31) Egy L hosszúságú fonállal a mennyezethez erősített testet a 13. ábrán látható módon úgy hozunk mozgásba, hogy a test vízszintes síkú, R sugarú körpályán mozog, miközben a fonál a függőlegessel θ szöget zár be. Fejezzük ki egy fordulat idejét az L és θ paraméterek függvényében!



13. ábra.

Megoldás: Jelölje K az m tömegű testre ható kötélerő nagyságát (lásd a 14. ábrát). Mivel a tömegpont nem mozdul el függőlegesen, a súlyerő egyensúlyt tart a kötélerő függőleges komponensével:

$$K \cos \theta = mg, \quad (3.10.1)$$



14. ábra.

míg a vízszintes komponens a körpályán történő mozgáshoz biztosítja a szükséges centripetális gyorsulást:

$$K \sin \theta = m \frac{v^2}{R}. \quad (3.10.2)$$

A két egyenletből a tömegpont sebessége (felhasználva, hogy $R = L \sin \theta$)

$$v = \sqrt{gL \sin \theta \operatorname{tg} \theta}. \quad (3.10.3)$$

Egy fordulat ideje

$$T = \frac{2R\pi}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}. \quad (3.10.4)$$

3.11. Feladat: (HN: 5B-32) Egy $L = 1,4$ m hosszú fonálinga függőleges síkban mozog. Amikor az ingatest sebessége $v = 2,2$ m/s, akkor a fonál $\alpha = 20^\circ$ -os szöget zár be a függőlegessel. Határozzuk meg ebben a pillanatban

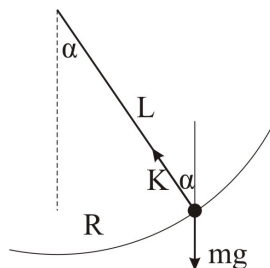
- az ingatest a_{cp} centripetális gyorsulását,
- az ingatest a_t tangenciális gyorsulását,
- a fonalat feszítő K erőt, ha az ingatest tömege $m = 600$ g!

Megoldás:

(a) A centripetális gyorsulás nagysága:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{L} \approx 3,45 \text{ m/s}^2. \quad (3.11.1)$$

(b) A tangenciális gyorsulást a súlyerő tangenciális komponense határozza meg (a kötél erő merőlegesen a körpálya érintőjére, ahogy azt a 15. ábra mutatja):



15. ábra.

$$a_t = g \sin \alpha \approx 3,40 \text{ m/s}^2. \quad (3.11.2)$$

A körmozgást a K kötél erő és a súlyerő fonálirányú komponense — $mg \cos \alpha$ — különbsége biztosítja. A mozgásegyenlet a radiális komponensekre

$$m \frac{v^2}{L} = K - mg \cos \alpha. \quad (3.11.3)$$

Az egyenletből kifejezhető a K kötél erő:

$$K = m \frac{v^2}{L} + mg \cos \alpha \approx 7,7 \text{ N}. \quad (3.11.4)$$

Súrlódási erő

3.12. Feladat: Vízszintes asztallapon két téglá fekszik egymáson. Minimálisan mekkora F erővel kell hatni az alsó téglára, hogy az kicsússzon a felső alól? A súrlódási tényező az asztallap és a téglá, valamint a tapadási súrlódási együttható a két téglá között egyaránt $\mu = 0,4$, a két téglá össztömege pedig $m = 5 \text{ kg}$.

Megoldás: Jelölje a felső test tömegét m_1 , az alsó test tömegét pedig m_2 . Ekkor $m = m_1 + m_2 = 5 \text{ kg}$. Mivel a megcsúszás határát keressük, így a két test gyorsulása megegyezik. A felső téglára $F_{s1} = \mu m_1 g$ tapadási erő hat, mellyel a téglá mozgásegyenlete:

$$m_1 a = F_{s1} = \mu m_1 g \quad (3.12.1)$$

Az alsó téglára a felső téglá által kifejtett F_{s1} tapadási erő mellett, az alsó téglá és asztallap között fellépő $F_{s2} = \mu(m_1 + m_2)g$ csúszási súrlódási erő is hat, melyek fékezni próbálják az alsó téglá mozgását. Az alsó téglá mozgásegyenlete:

$$m_2 a = F - \mu m_1 g - \mu(m_1 + m_2)g = F - \mu m_1 g - \mu m g. \quad (3.12.2)$$

Az első egyenletből kifejezve az a gyorsulást

$$a = \mu g \quad (3.12.3)$$

adódik. Ez az m_1 test maximális gyorsulását jelenti. A fenti egyenletből az F erő a minimális értéke

$$F = (m_1 + m_2)a + \mu(m_1 + m_2)g = ma + \mu mg = 2\mu mg = 40 \text{ N}. \quad (3.12.4)$$

Megjegyzés: A feladatmegoldásból látszik, hogy a kérdés megválaszolásához csak az össztömegre volt szükség. Kisebb vagy nagyobb erő alkalmazásakor az egyenletekből levont következtetések módosulhatnak! Ezeknek diszkussziója gyakorló feladat.

3.13. Feladat: Egy autó az országúton nagy sebességgel halad. Az autógumi és az úttest felülete között a tapadási súrlódási együttható $\mu = 0,9$. Az $R = 100$ m sugarú, vízszinten kanyarban mekkora lehet a jármű maximális sebessége, hogy ne sodródjon ki?

Megoldás: A kanyarban az F tapadási súrlódási erő biztosítja az autónak a körmozgáshoz szükséges centripetális gyorsulást:

$$m \frac{v^2}{R} = F. \quad (3.13.1)$$

A maximális tapadási erő $F_{max} = \mu mg$ felső határt szab az autó maximális sebességének is, mely az alábbi egyenlőtlenséggel fejezhető ki:

$$m \frac{v^2}{R} \leq F_{max} = \mu mg. \quad (3.13.2)$$

Maximális sebesség esetén egyenlőség áll fenn az egyenlet két oldala között, ezért a maximális sebesség nagysága:

$$v_{max} = \sqrt{\mu g R}. \quad (3.13.3)$$

Behelyettesítve a számadatokat $v_{max} = 30$ m/s adódik.

3.14. Feladat: Egy régi lemezjátszó korongja $33 \frac{1}{3}$ fordulatot tesz meg percenként, a “nagy-lemez” átmérője 30 cm. A forgó lemez legszélére egy kis tárgyat teszünk. Legalább mekkora a kis tárgy és a lemez között a tapadási súrlódási együttható, ha a test nem csúszik meg?

Megoldás: A szögsebessége

$$\omega = 2\pi \frac{33 \frac{1}{3}}{60} = 3,49 \frac{1}{s}. \quad (3.14.1)$$

A test egyenletes körmozgást végez. Függőleges irányban a súlyerő és a támaszerő egyensúlyban van

$$N = mg. \quad (3.14.2)$$

Körpályán a tapadási súrlódás tartja

$$F_t = mr\omega^2. \quad (3.14.3)$$

Továbbá érvényes, hogy

$$F_t \leq \mu N. \quad (3.14.4)$$

Ezekből a tapadási együtthatóra

$$\mu \geq \frac{\omega^2 r}{g} = 0,19 \quad (3.14.5)$$

adódik.

3.15. Feladat: Egy autó $R = 120\text{m}$ sugarú kanyarban halad $v_0 = 90\text{km/h}$ sebességgel. A kerekek és a száraz aszfalt között $\mu = 0,6$ a tapadási súrlódási együttható.

- Legfeljebb mekkora a_t pálya irányú gyorsulással fékezhet a kanyar közben a vezető?
- Mekkora úton tud így megállni, ha a pálya irányú gyorsulása a fékezés közben állandó?
- Ezekkel a gumikkal legfeljebb mekkora állandó v_{max} sebességgel lehetne “bevenni” ezt a kanyart?
- Miért veszélyes, ha az autó ezzel a maximális sebességgel érkezik a kanyarba?

Megoldás:

- A támaszerő és a súlyerő egymással egyensúlyban van, így

$$N = mg. \quad (3.15.1)$$

A gyorsulásnak két komponense van: a pálya irányú a_t (tangenciális) gyorsulás és a kör közepe felé mutató a_{cp} centripetális gyorsulás. Az eredő gyorsulás

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2}, \quad (3.15.2)$$

amelyet a tapadási súrlódás biztosít, azaz

$$ma \leq \mu N = \mu mg. \quad (3.15.3)$$

A tangenciális gyorsulást kifejezve

$$a_t \leq \sqrt{\mu^2 g^2 + a_{cp}^2} = 2,74 \text{ m/s}^2, \quad (3.15.4)$$

amely a maximális érték.

(b) Ha a tangenciális gyorsulás állandó, akkor a megállásig eltelt idő

$$t = \frac{v_0}{a_t} = 9,12 \text{ s.} \quad (3.15.5)$$

A megállásig megtett út

$$s = \frac{1}{2} a_t t^2 = 114 \text{ m.} \quad (3.15.6)$$

(c) Ha az autó nem fékez, akkor $a_t = 0$, így

$$v_{max} = \sqrt{\mu g R} = 26,6 \text{ m/s.} \quad (3.15.7)$$

(d) Mert fékezés esetén az autó kerekei azonnal megcsúsznak, a csúszó kerekek pedig nem kormányozhatók!

3.16. Feladat: (HN 5B-43) Egy gyerek a parttól $s = 12 \text{ m}$ -re áll a befagyott tavacska jegén. Csizmája és a jég közötti tapadási súrlódási együttható $\mu = 0,05$. Határozzuk meg azt a minimális időt, amely alatt kiséválhat a partra, ha megcsúszás nélkül lépked?

Megoldás: A gyerek $F = mg$ erővel nyomja a jeget, ezért csúszás nélkül legfeljebb $a = \mu g$ gyorsulásra képes. Az s út megtételéhez ezért legkevesebb

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{\mu g}} = 6,93 \text{ s} \quad (3.16.1)$$

idő szükséges.

3.17. Feladat: (HN 5B-44) Egy rakodórampán láda nyugszik. Ha a rámpa szöge $\alpha_1 = 30^\circ$ -os, akkor a láda megcsúszik. Amennyiben a csúszó láda alatt a lejtő hajlásszöge $\alpha_2 = 20^\circ$ -ra csökken, akkor a láda mozgása egyenletessé válik. Határozzuk meg a lejtő és a láda közötti csúszási és tapadási súrlódási együttható értékét!

Megoldás: A feladatban jelölje μ_t a tapadási és μ_{cs} a csúszási súrlódási együtthatót. Nyugalmi helyzetben a tapadási súrlódási erő egyensúlyt tart a súlyerő lejtővel párhuzamos komponensével, ezért

$$ma = 0 = mg \sin \alpha_1 - \mu_t mg \cos \alpha_1. \quad (3.17.1)$$

Az egyenletből

$$\mu_t = \operatorname{tg} \alpha_1 \approx 0,577 \quad (3.17.2)$$

tapadási súrlódási együttható adódik. Egyenletes mozgás esetén a súlyerő lejtővel párhuzamos komponense a csúszási súrlódási együtthatóval tart egyensúlyt:

$$ma = 0 = mg \sin \alpha_2 - \mu_{cs} mg \cos \alpha_2. \quad (3.17.3)$$

Az egyenletből

$$\mu_{cs} = \operatorname{tg} \alpha_2 \approx 0,364. \quad (3.17.4)$$

csúszási súrlódási együttható adódik.

3.18. Feladat: (HN 5B-46) Az $m = 5$ kg-os tömegű test lecsúszik a vízszintessel $\alpha = 41^\circ$ szöget bezáró lejtőn. A test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható $\mu = 0,3$.

- Határozzuk meg a súrlódási erő nagyságát!
- Mekkora gyorsulással csúszik le a test?

Megoldás:

(a) A lejtőn lecsúszó testre ható N támaszerő (kényszererő) egyensúlyt tart a súlyerő lejtőre merőleges komponensével, ezért $N = mg \cos \alpha$. A csúszási súrlódási erő pedig

$$F_s = \mu N = \mu mg \cos \alpha \approx 11,32 \text{ N}. \quad (3.18.1)$$

(b) A test lejtővel párhuzamos mozgását a súlyerő lejtővel párhuzamos komponense és a súrlódási erő határozzák meg:

$$ma = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \quad (3.18.2)$$

ahonnan a test gyorsulása

$$a = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha \approx 4,3 \text{ m/s}^2. \quad (3.18.3)$$

3.19. Feladat: (HN 5B-47) A vízszintessel $\alpha = 60^\circ$ -os szöget bezáró lejtőn egy test $a = g/2$ gyorsulással csúszik le. Mekkora a csúszó súrlódási együttható?

Megoldás: A lejtővel párhuzamos mozgást leíró dinamikai egyenlet:

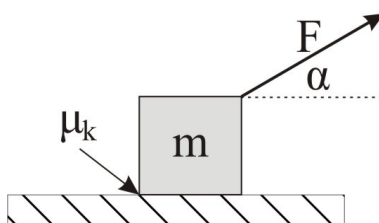
$$ma = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha. \quad (3.19.1)$$

Behelyettesítve a gyorsulás értékét a súrlódási együttható az alábbi alakban fejezhető ki:

$$\mu = \frac{\sin \alpha - \frac{1}{2}}{\cos \alpha}. \quad (3.19.2)$$

Behelyettesítve a számadatokat $\mu \approx 0,732$ adódik a súrlódási együttható értékére.

3.20. Feladat: (HN 5B-52) Egy $m = 4$ kg tömegű testet a 16. ábrának megfelelően $F = 20$ N erővel húzunk ($\alpha = 30^\circ$). Mekkora a test gyorsulása, ha a test és talaj közötti csúszási súrlódási együttható $\mu_k = 0,2$?



16. ábra.

Megoldás: Mivel a test nem emelkedik fel a talajról a függőleges gyorsulása zérus. Ezért

$$0 = N + F \sin \alpha - mg, \quad (3.20.1)$$

ahol N a testre ható támaszerő. Írjuk fel a mozgás vízszintes vetületére vonatkozó mozgásegyenletet!

$$ma = F \cos \alpha - F_s, \quad (3.20.2)$$

ahol F_s a testre ható súrlódási erő, melyet az N támaszerő segítségével határozhatunk meg:

$$F_s = \mu_k N. \quad (3.20.3)$$

Az egyenletrendszer megoldásából a test gyorsulása meghatározható:

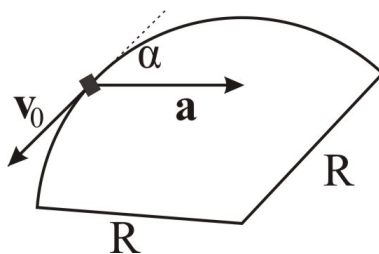
$$a = \frac{F(\cos \alpha + \mu_k \sin \alpha)}{m} - \mu_k g. \quad (3.20.4)$$

Behelyettesítve a számadatokat $a \approx 2,83$ m/s² adódik.

3.21. Feladat: (HN 5B-58) Egy gépkocsi $R = 80$ m sugarú vízszintes körpályán mozog. A 17. ábra azt a pillanatot mutatja, amikor az autó sebessége éppen $v_0 = 10$ m/s és a gyorsulása \mathbf{a} , mely

a körpálya érintőjével $\alpha = 35^\circ$ -os szöget zár be.

- Mekkora a gépkocsi centripetális gyorsulása?
- Mekkora a tangenciális gyorsulás?
- Mekkora utat tesz meg a gépkocsi a megállásig, ha az érintő menti gyorsulása állandó?
- Az útest vízszintes, azaz a kanyarban nem túlemelt pálya. Mekkora minimális nyugalmi súrlódási együttható szükséges ahhoz, hogy az ábrán mutatott pillantban a gépkocsi ne csússzon meg?



17. ábra.

Megoldás:

(a) A centripetális gyorsulás az autó sebességének és a kanyar görbületi sugarának segítségével határozható meg:

$$a_{cp} = \frac{v_0^2}{R}. \quad (3.21.1)$$

Behelyettesítve a számadatokat $a_{cp} = 1,25 \text{ m/s}^2$ adódik.

(b) Az ábra segítségével meghatározhatjuk az \mathbf{a} gyorsulásvektor nagyságát is. Felhasználva, hogy az \mathbf{a} vektor sugár irányú vetülete éppen a centripetális gyorsulás, az eredő gyorsulás nagysága

$$a = |\mathbf{a}| = \frac{a_{cp}}{\sin \alpha}. \quad (3.21.2)$$

A tangenciális gyorsulás pedig az

$$a_t = a \cos \alpha = \frac{a_{cp}}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (3.21.3)$$

összefüggéssel határozható meg. Behelyettesítve a számadatokat $a_t \approx 1,79 \text{ m/s}^2$ adódik.

(c) Amennyiben a kocsi lassul, de a tangenciális gyorsulása állandó, a kocsi megállásáig megtett út meghatározható az alábbi összefüggésből:

$$s = v_0 t_0 - \frac{1}{2} a_t t_0^2, \quad (3.21.4)$$

ahol $t_0 = v_0/a_t$ a megállásig eltelt idő. Behelyettesítve a számadatokat $s \approx 27,9 \text{ m}$ adódik a megállásig megtett út hosszára.

(d) A dinamika alapegyenlete szerint

$$ma = F_s = \mu mg, \quad (3.21.5)$$

amelyből a minimális súrlódási együttható, mely mellett a kocsi még épp nem csúszik meg, $\mu \approx 0,218$.

3.22. Feladat: * A vízszintes asztalon m tömegű test nyugszik. A test és az asztallap közötti súrlódási együttható μ . (A tapadási és csúszási súrlódási együttható legyen azonos.) A testre a $t = 0$ időpillanattól kezdve $F(t) = f_0 t$ erővel hatunk.

- Mi az f_0 együttható mértékegysége?
- Mikor indul el a test?
- Mekkora lesz a test sebessége a t időpillanatban?

Megoldás:

(a) Az f_0 együttható mértékegysége N/s, mivel idő dimenziójú mennyiséggel megszorozva erő dimenziójú mennyiséget kell, hogy kapjunk.

(b) A test abban a t_0 pillanatban indul el, amikor a rá ható erő eléri a tapadási erő maximumát, azaz $F(t_0) = f_0 t_0 = \mu mg$, ahonnan

$$t_0 = \frac{\mu mg}{f_0}. \quad (3.22.1)$$

(c) A test mozgásegyenlete a megmozdulás pillanatát követő $t \geq t_0$ időintervallumban:

$$ma = f_0 t - \mu mg \quad (3.22.2)$$

Az egyenletből kifejezhetjük a gyorsulást az idő függvényében:

$$a(t) = \frac{f_0}{m} t - \mu g. \quad (3.22.3)$$

A sebességet a gyorsulás idő szerinti integrálásával határozhatjuk meg:

$$v(t) = \int_{t_0}^t a(t') dt' = \int_{t_0}^t \left(\frac{f_0}{m} t' - \mu g \right) dt' = \frac{1}{2} \frac{f_0}{m} t^2 - \mu g t + \frac{1}{2} \frac{\mu^2 m g^2}{f_0}. \quad (3.22.4)$$

Tehát a test sebessége:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha: } t \leq t_0 \\ \frac{1}{2} \frac{f_0}{m} t^2 - \mu g t + \frac{1}{2} \frac{\mu^2 m g^2}{f_0} & \text{ha: } t > t_0 \end{cases}. \quad (3.22.5)$$

3.23. Feladat: Egy függőleges tengelyű korong ω_0 szögsebességgel forog. A korong közepétől R távolságban m tömegű test helyezkedik el. A korong és a test között μ tapadási súrlódási együttható van. A korong egyenletes lassulásba kezd β szöggyorsulással. Legalább mekkora legyen a tapadási súrlódási együttható, hogy a test ne csússzon meg?

Megoldás: A korong szögsebessége az

$$\omega(t) = \omega_0 - \beta t \quad (3.23.1)$$

függvény szerint változik. Ezért a korongon lévő test centripetális gyorsulása

$$a_{cp} = R\omega(t)^2 = R(\omega_0 - \beta t)^2. \quad (3.23.2)$$

A test tangenciális gyorsulása pedig

$$a_t = R\beta. \quad (3.23.3)$$

A test eredő gyorsulása

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}, \quad (3.23.4)$$

melyet a tapadási erő biztosít a test számára. A tapadás feltétele, hogy

$$\mu mg \geq ma = m\sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}. \quad (3.23.5)$$

A tapadási súrlódási együttható ezért:

$$\mu \geq \frac{\sqrt{R^2(\omega_0 - \beta t)^4 + (R\beta)^2}}{g}. \quad (3.23.6)$$

A legnagyobb tapadás a lassulás kezdeti pillanatában szükséges, ezért a minimális tapadási együttható

$$\mu_{min} = R \frac{\sqrt{\omega_0^4 + \beta^2}}{g}. \quad (3.23.7)$$

3.24. Feladat: Egy $\omega_0 = 6$ 1/s szögsebességű, $R = 0,2$ m sugarú függőleges tengelyű korong peremén van egy m tömegű test. A korong $\beta = 2$ 1/s² szöggyorsulással lassul, majd megáll.

- Mennyi idő alatt állt meg?
- Mennyi volt a korong szögelfordulása?
- Mennyi utat tett meg az m tömegű test?
- Legalább mekkora μ súrlódási együttható kell, hogy legyen a korong és az m tömegű test között, hogy a test ne csússzon le a korongról?

Megoldás:

(a) Az

$$\omega_0 = \beta t \quad (3.24.1)$$

összefüggésből következik, hogy a megállás ideje $t = 3$ s.(b) Ezalatt a φ szögelfordulás

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{1}{2} \beta t^2 = 9 \text{ rad.} \quad (3.24.2)$$

(c) A megtett út

$$s = R\varphi = 1,8 \text{ m.} \quad (3.24.3)$$

(d) A test gyorsulása az $a_t = R\beta$ tangenciális és az $a_{cp} = R\omega^2$ centripetális gyorsulásból áll. Ez utóbbi a kezdeti idopontban a legnagyobb, így a maximális súrlódási együttható kiszámolásánál ezzel az értékkel kell számolni. Az eredő gyorsulás nagysága:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2} = \sqrt{R^2\beta^2 + R^2\omega^4}. \quad (3.24.4)$$

A testet a súrlódási erő mozgatja, így

$$ma = \mu mg, \quad (3.24.5)$$

amelybe behelyettesítve kapjuk:

$$\mu = \frac{1}{g} \sqrt{R^2\beta^2 + R^2\omega^4} = 0,72. \quad (3.24.6)$$

3.25. Feladat: Tuskót helyezünk állóhelyzetből felgyorsuló vízszintes forgóasztalra tengelyétől 10 cm távolságban. A forgóasztal $2/3$ s alatt éri el a 2 rad/s szögsebességet és ekkor a tuskó csúszni kezd. Mekkora a tapadási súrlódási erő a tuskó és az asztal között?

Megoldás: A tuskó szöggyorsulása

$$\beta = \frac{\omega}{t} = 3 \text{ rad/s}^2, \quad (3.25.1)$$

a kerületi sebessége

$$v = R\omega = 0,2 \text{ m/s.} \quad (3.25.2)$$

A test eredő gyorsulása a centripetális és tangenciális gyorsulásokból tevődik össze:

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} = \sqrt{R^2\omega^4 + R^2\beta^2}. \quad (3.25.3)$$

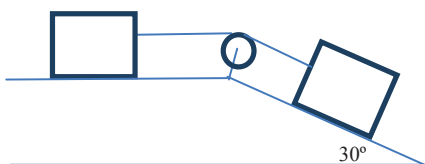
Ezt a gyorsulást a μmg tapadási súrlódási erő biztosítja:

$$\mu mg = ma = m\sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} = m\sqrt{R^2\omega^4 + R^2\beta^2}. \quad (3.25.4)$$

Innen a tapadási súrlódási együttható:

$$\mu = \frac{1}{g}\sqrt{R^2\omega^4 + R^2\beta^2} = 0,05. \quad (3.25.5)$$

3.26. Feladat: A 18. ábrán két, egyenként $m = 40$ kg tömegű test van összekapcsolva. A súrlódási együttható mindkét testre $\mu = 0,15$. Határozzuk meg a testek gyorsulását és a fonálban ébredő K kötélterőt!



18. ábra.

Megoldás: Jelölje a a testek gyorsulását. (Mivel a kötel nem nyúlik meg, mindkét test azonos gyorsulással mozog) A baloldali test mozgásegyenlete

$$ma = K - \mu mg, \quad (3.26.1)$$

míg a lejtőn fekvő test mozgásegyenlete

$$ma = mg \sin \alpha - K - \mu mg \cos \alpha \quad (3.26.2)$$

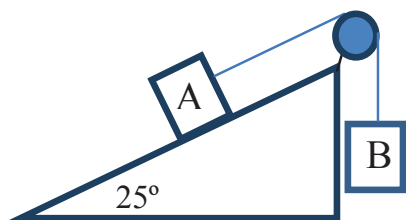
A két egyenletből meghatározható a testek gyorsulása:

$$a = \frac{1}{2}(g \sin \alpha - \mu g - \mu g \cos \alpha). \quad (3.26.3)$$

Behelyettesítve a számadatokat $a \approx 1,1$ m/s² adódik. A kötélterőt a (3.26.1) egyenlet segítségével határozhatjuk meg:

$$K = ma + \mu mg = \frac{\sin \alpha + \mu - \mu \cos \alpha}{2} mg. \quad (3.26.4)$$

Behelyettesítve a számadatokat $K \approx 104$ N adódik.



19. ábra.

3.27. Feladat: A vízszintessel $\alpha = 25^\circ$ -os szöget bezáró lejtőn nyugalmi helyzetből indulva $m_A = 30$ kg tömegű testet a 19. ábrán látható módon $m_B = 20$ kg tömegű test húz felfelé. A súrlódási együttható $\mu = 0,2$.

- (a) Számoljuk ki a testek gyorsulását!
 (b) Számoljuk ki a testek által $t_0 = 2$ s alatt megtett utat!

Megoldás:

(a) Jelölje K a kötélet feszítő erőt és a a testek gyorsulását. A testek mozgásegyenlete:

$$m_A a = K - m_A g \sin \alpha - \mu m_A g \cos \alpha \quad (3.27.1)$$

és

$$m_B a = m_B g - K. \quad (3.27.2)$$

E két egyenletből a gyorsulás kifejezhető:

$$a = \frac{m_B - m_A \sin \alpha - \mu m_A \cos \alpha}{m_A + m_B} g. \quad (3.27.3)$$

Behelyettesítve a számadatokat $a \approx 0,376$ m/s² adódik.

(b) A testek által megtett út t_0 idő alatt, amennyiben a testek nyugalmi helyzetből indulnak:

$$s = \frac{1}{2} a t_0^2. \quad (3.27.4)$$

Behelyettesítve a számadatokat $s \approx 75,3$ cm adódik.

3.28. Feladat: Az α hajlásszögű lejtőn a gyorsulással lefele csúszik a k direkciónerejű rugóval összekötött m_1 és m_2 tömegű testekből álló rendszer, mégpedig úgy, hogy az m_1 megy elől. A lejtő és a testek közötti súrlódási tényező rendre μ_1 és μ_2 .

- (a) Fejezzük ki a rendszer gyorsulását.
 (b) Mekkora a rugó megnyúlása?

Megoldás: Jelölje F_r az ebredő rugóerőt. Legyen a koordinátarendszer x tengelye lejtőirányú.

(a) E koordinátarendszer irányítás mellett két test mozgásegyenlete sorban

$$m_1 a = m_1 g \sin \alpha - \mu_1 m_1 g \cos \alpha - F_r \quad (3.28.1)$$

és

$$m_2 a = m_2 g \sin \alpha - \mu_2 m_2 g \cos \alpha + F_r. \quad (3.28.2)$$

A két egyenletből a

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g \sin \alpha - (\mu_1 m_1 g \cos \alpha + \mu_2 m_2 g \cos \alpha)}{m_1 + m_2}. \quad (3.28.3)$$

gyorsulás adódik.

(b) A gyorsulás visszahelyettesítésével a kapott rugóerő

$$F_r = (\mu_2 - \mu_1) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \cos \alpha. \quad (3.28.4)$$

Ezzel a rugó megnyúlása

$$\Delta l = \frac{F_r}{k} = \frac{1}{k} (\mu_2 - \mu_1) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \cos \alpha. \quad (3.28.5)$$

Látható, hogy ha $\mu_2 > \mu_1$, akkor a rugó megnyúlik, mert $\Delta l > 0$; ellenkező esetben összenyomódik. Ha a kettő egyenlő egymással, akkor a megnyúlás zérus.

Közegellenállási erők

3.29. Feladat: Az R sugarú vasgolyó vízben süllyed. Ismeretes, hogy hosszabb idő elteltével közegben a testek állandó sebességgel esnek. Sebességgel arányos közegellenállást feltételezve mekkora lesz a vasgolyó v végsebessége? Az arányossági tényező legyen: $c = 6\pi\eta R$ (Stokes-féle ellenállás; kis sebességek eseteire), ahol η a közeg viszkozitása, R a közegben mozgó golyó sugara.

Megoldás: Jelölje ρ_{Fe} a vas, míg ρ_{H_2O} a víz sűrűségét. A koordinátatengely mutasson lefele! (Ez a pozitív irány.) A testre három erő hat. Az

$$mg = \rho_{Fe} \frac{4R^3 \pi}{3} g$$

nehézségi erő, amely most pozitív; a pillanatnyi sebességgel ellentétes közegellenállás, amely – mivel a test süllyed, tehát v pozitív –, azért a közegellenállási erő negatív:

$$-cv = -6\pi\eta Rv;$$

valamint a felhajtó erő, amely felfele mutat

$$-\rho_{H_2O} \frac{4R^3\pi}{3} g,$$

így most negatív. Mivel azt az esetet vizsgáljuk, amikor a test már állandó sebességgel süllyed, így tudjuk, hogy a testre ható erők eredője zérus. Felírhatjuk tehát a következő egyenletet

$$0 = \rho_{Fe} \frac{4R^3\pi}{3} g - 6\pi\eta Rv - \rho_{H_2O} \frac{4R^3\pi}{3} g, \quad (3.29.1)$$

amelyből a kért v sebesség

$$v = (\rho_{Fe} - \rho_{H_2O}) \frac{2R^2}{9\eta} g. \quad (3.29.2)$$

Megjegyzés: Ez a számolás az alapja annak a módszernek, amellyel a folyadékok viszkozitását meg lehet határozni.

3.30. Feladat: Az m tömegű golyó levegőben esik a homogén nehézségi erőterben. A golyóra a sebesség négyzetével arányos közegellenállás hat. (Az arányossági tényezőt jelöljük c' -vel.) Mekkora a golyó végsebessége? (A felhajtóerőtől tekintsünk el.)

Megoldás: Amikor a test eléri végsebességét, akkor a ráható erők eredője zérus, így — lefele mutató koordinátatengely irányítást véve — a

$$0 = mg - c'v^2 \quad (3.30.1)$$

összefüggés írható fel. Ebből a végsebesség

$$v = \sqrt{\frac{mg}{c'}}. \quad (3.30.2)$$

3.31. Feladat: Igen magasról leejtünk egy R sugarú, ρ sűrűségű homogén golyót. A zuhanó testre ható közegellenállási erő az $F_k = KAv^2$ összefüggéssel számolható, ahol v a test sebessége, A a test haladási irányra merőleges keresztmetszete, K pedig ismert arányossági tényező.

- Mekkora a golyó tömege? (R függvényében)
- Vázlatosan ábrázolja a test sebesség-idő függvényét!
- Mekkora lesz a zuhanó golyó állandósult sebessége? (R függvényében)
- Állandósult sebesség mellett mekkora a közegellenállási erő teljesítménye (R függvényében)

(e) Az elejtett test az állandósult sebességet h út megtétele után eléri. Mekkora volt a közegellenállási erő munkája a h út megtétele során? (A munkavégzés kiszámolásával kapcsolatos feladatok a 4. fejezetben találhatóak.)

Megoldás:

3.32. Feladat: ** Az m tömegű testet a koordináta-rendszer origójából v_0 sebességgel a vízszinteshez képest α szöggel elhajítunk a homogén nehézségi erőterben. A testre az $\mathbf{F}_k = -c\mathbf{v}$ sebességgel arányos közegellenállás is hat, ahol c konstans arányossági tényező.)

- (a) Írjuk fel a mozgásegyenletet!
- (b) Határozzuk meg a sebességkomponensek időbeli változását!
- (c) Határozzuk meg a test helyét, mint az idő függvényét!
- (d) Határozzuk meg a pálya alakját!

Megoldás: Amennyiben az y tengely pozitív iránya felfelé mutat, a nehézségi gyorsulás vektora a $\mathbf{g} = (0, -g)$ alakban adható meg. A gyorsulás és sebesség vektorok pedig rendre $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ és $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ alakúak. A $t_0 = 0$ időpillanatban a kezdeti sebességkomponensek $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ valamint $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$. Mivel a koordináta-rendszer origóját a hajítás helyére tesszük, a kezdeti pozíció koordinátáit jelöljük $x_0 = 0$ és $y_0 = 0$.

(a) Az elhajított testre két erő hat, az $m\mathbf{g}$ súlyerő valamint a $-c\mathbf{v}$ közegellenállási erő. A dinamika alaptörvénye (Newton II. axiómája) szerint a test mozgásegyenlete

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - c\mathbf{v}. \quad (3.32.1)$$

Írjuk fel az \mathbf{a} vektor x és y komponenseire vonatkozó skaláregyenleteket. Felhasználva, hogy $a_x = \frac{dv_x}{dt}$ és $a_y = \frac{dv_y}{dt}$, az

$$ma_x = m \frac{dv_x}{dt} = -cv_x \quad (3.32.2)$$

és

$$ma_y = m \frac{dv_y}{dt} = -mg - cv_y \quad (3.32.3)$$

egyenleteket kapjuk.

(b) A (3.32.2) és (3.32.3) egyenletek egymástól függetlenek (azaz nem csatolt differenciálegyenlet-rendszert írnak le), aminek köszönhetően szeparált egyenleteket kapunk a mozgás x és y vetületére. A (3.32.2) egyenletben szeparálva a változókat és idő szerint integrálva az egyenletet:

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{c}{m} \int_{t_0=0}^t dt'. \quad (3.32.4)$$

Az integrálás elvégzése után

$$\ln \frac{v_x(t)}{v_{0x}} = -\frac{c}{m}t \quad (3.32.5)$$

adódik, ahonnan a sebesség x komponense

$$v_x(t) = v_{0x}e^{-\frac{c}{m}t}. \quad (3.32.6)$$

Hasonló módon a (3.32.3) egyenletben is szeparáljuk az integrálási változókat:

$$m \int_{v_{0y}}^{v_y} \frac{dv_y}{mg + cv_y} = - \int_{t_0=0}^t dt'. \quad (3.32.7)$$

Az integrálás elvégzésével az

$$\frac{m}{c} \ln \frac{mg + cv_y(t)}{mg + cv_{0y}} = -t, \quad (3.32.8)$$

összefüggéshez jutunk, melyből az y irányú sebességkomponens

$$v_y(t) = \frac{mg + cv_{0y}}{c} e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}. \quad (3.32.9)$$

Megjegyzés: Belátható, hogy a $c \rightarrow 0$ határesetben a megoldások a ferde hajtásra érvényes $v_x(t) = v_{0x}$ illetve $v_y(t) = v_{0y} - gt$ megoldásokba tartanak. Ennek igazolását az olvasóra bízuk.

(c) A test helykoordinátáit a sebesség idő szerinti integrálásával számolhatjuk ki, azaz

$$x(t) = \int_{t_0=0}^t v_{0x} e^{-\frac{c}{m}t'} dt' = \left[-\frac{m}{c} v_{0x} e^{-\frac{c}{m}t'} \right]_{t_0=0}^t = \frac{m}{c} v_{0x} (1 - e^{-\frac{c}{m}t}) \quad (3.32.10)$$

és

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t_0=0}^t \left(\frac{mg + cv_{0y}}{c} e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c} \right) dt' = \left[-\frac{m}{c} \frac{mg + cv_{0y}}{c} e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c} t \right]_{t_0=0}^t \\ &= \frac{m}{c} \frac{mg + cv_{0y}}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c} t \right). \end{aligned} \quad (3.32.11)$$

Megjegyzés: Belátható, hogy a $c \rightarrow 0$ határesetben a megoldások a ferde hajtásra érvényes $x(t) = v_{0x}t$ illetve $y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ megoldásokhoz tartanak. Ezeknek igazolását az olvasóra bízuk.

(d) A pályagörbe alakját megkapjuk, ha a (3.32.10) egyenletből kiküszöböljük a t időváltozót:

$$t = -\frac{m}{c} \ln \left(1 - \frac{cx}{mv_{0x}} \right). \quad (3.32.12)$$

Ezt behelyettesítve a (3.32.11) egyenletbe

$$y(x) = \frac{mg + cv_{0y}}{cv_{0x}} x + \frac{m^2 g}{c^2} \ln \left(1 - \frac{cx}{mv_{0x}} \right) \quad (3.32.13)$$

adódik. Ezt a pályáját ballisztikus pályának nevezik. *Megjegyzés:* Belátható, hogy a $c \rightarrow 0$ határesetben a megoldás egy parabola pálya. Másfelől a logaritmus függvény argumentumát megvizsgálva látható, hogy a

$$1 > \frac{cx}{mv_{0x}} \quad (3.32.14)$$

relációnak fenn kell állnia. Innen következik, hogy

$$x < \frac{mv_{0x}}{c}, \quad (3.32.15)$$

azaz ennél az x távolságnál soha nem megy messzebb a test.

3.33. Feladat: ** Az m tömegű testet h magasságban elejtjük. A testre az $\mathbf{F}_k = -c\mathbf{v}$ sebességgel arányos közegellenállás is hat. (A c konstans arányossági tényező.)

- Írjuk fel a mozgásegyenletet!
- Határozzuk meg a sebességének időbeli változását!
- Határozzuk meg a test helyét, mint az idő függvényét!

Megoldás: Amennyiben a függőleges tengely pozitív iránya felfelé mutat, a nehézségi gyorsulás a negatív irányba gyorsítja az elejtett testet, melyre két erő hat, az $m\mathbf{g}$ súlyerő valamint a $-c\mathbf{v}$ közegellenállási erő. A dinamika alaptörvénye (Newton II. axiómája) szerint a test mozgásegyenlete

$$ma = -mg - cv. \quad (3.33.1)$$

Felhasználva, hogy $a = \frac{dv}{dt}$, az

$$ma = m \frac{dv}{dt} = -mg - cv \quad (3.33.2)$$

egyenletet kapjuk.

- Szeperáljuk a (3.33.2) egyenletben az integrálási változókat, majd végezzük el az integrálás műveletét:

$$m \int_0^v \frac{dv}{mg + cv} = - \int_{t_0=0}^t dt'. \quad (3.33.3)$$

Az integrálás elvégzésével az

$$\frac{m}{c} \ln \frac{mg + cv(t)}{mg} = -t, \quad (3.33.4)$$

összefüggéshez jutunk, melyből a sebesség kifejezhető:

$$v(t) = \frac{mg}{c} e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}. \quad (3.33.5)$$

(b) A test helykoordinátáját a sebesség idő szerinti integrálásával számolhatjuk ki, azaz

$$z(t) = \int_{t_0=0}^t \left(\frac{mg}{c} e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c} \right) dt' = \left[-\frac{m}{c} \frac{mg}{c} e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c} t \right]_{t_0=0}^t$$

$$= \frac{m}{c} \frac{mg}{c} (1 - e^{-\frac{c}{m}t}) - \frac{mg}{c} t. \quad (3.33.6)$$

4. Feladatok munkavégzés és konzervatív erők tárgyköréből. Munkatétel

Munkavégzés, teljesítmény

4.1. Feladat: (HN 6B-8) Egy rugót nyugalmi állapotból 4 J munka árán 10 cm-rel nyújthatunk meg. Mekkora munkavégzés szükséges további 10 cm-rel való megnyújtásához, ha a Hooke-törvény mindvégig érvényben marad?

Megoldás: Két megnyúlás van. Az első $\Delta l = l_1 - l_0 = 10$ cm, amelyre felírható, hogy

$$W = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2. \quad (4.1.1)$$

Innen a k rugóállandó értéke kifejezhető

$$k = \frac{2W}{(\Delta l)^2} = 800 \text{ N/m}. \quad (4.1.2)$$

A további $l_2 = 10$ cm nyújtáshoz szükséges munkavégzés

$$\Delta W = \frac{1}{2} k (l_2 + \Delta l)^2 - \frac{1}{2} k (\Delta l)^2 = 12 \text{ J}. \quad (4.1.3)$$

4.2. Feladat: * (HN 6B-10) Egy rugó által kifejtett erő a Hooke-törvény helyett az $F = -kx^3$ törvény szerint változik, ahol $k = 200 \text{ N/m}^3$. Mennyi munkát végzünk, míg 0,1 m-ről 0,3 m-re nyújtjuk?

Megoldás: A rugó végét $F'(x) = kx^3$ erővel kell húznunk, így a munka definíciója alapján az általunk végzett munka:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F'(x) dx = \int_{x_1=0,1}^{x_2=0,3} kx^3 dx = \left[\frac{1}{4} kx^4 \right]_{x_1=0,1}^{x_2=0,3} = 0,4 \text{ J} \quad (4.2.1)$$

integrállal számolható ki.

4.3. Feladat: * (HN 6B-27) A 200 N súlyú gyerek nyugalmi helyzetben lévő, 3 m-es kötelű hintán ül. A gyerek barátja húzza oldalra, hogy a hinta kötele 36° -os szöget alkosson a függőlegessel. Határozzuk meg mekkora munkára volt ehhez szükség! A feladatot a munka definíciójának felhasználásával oldja meg!

Megoldás: Jelölje K a kötélert, α a kötélfüggőlegessel bezárt szögét, m a gyerek tömegét. Első lépésként azt a szögfüggő erőt kell meghatározni, amellyel a barátja F erővel vízszintes irányban húzza. Mivel egyensúlyi állapotokon keresztüli mozgásról van szó az erők felírhatjuk, hogy a függőleges komponensekre

$$K \cos \alpha = mg, \quad (4.3.1)$$

a vízszintes komponensekre

$$K \sin \alpha = F. \quad (4.3.2)$$

Innen az F erő:

$$F = mg \tan \alpha. \quad (4.3.3)$$

A vízszintes irányú elmozdulás két szöghöz $\alpha + d\alpha$ és az α szögekhez tartozó tartozó x koordináták különbsége, azaz

$$dx = l \sin(\alpha + d\alpha) - l \sin \alpha = l \cos \alpha \cdot d\alpha, \quad (4.3.4)$$

ahol felhasználtuk, hogy kis szögekre érvényesek a

$$\cos(d\alpha) = 1, \quad (4.3.5)$$

$$\sin(d\alpha) = d\alpha \quad (4.3.6)$$

közelítések. Az elemi munka kifejezése

$$dW = mg \tan \alpha \cdot l \cos \alpha \cdot d\alpha = mgl \sin \alpha \cdot d\alpha. \quad (4.3.7)$$

amellyel a teljes végzett munka:

$$W = \int_0^\alpha mgl \sin \alpha \cdot d\alpha = mgl(1 - \cos \alpha). \quad (4.3.8)$$

4.4. Feladat: (HN 6B-39) Egy 48 km/h sebességgel egyenletesen haladó gépkocsira a légellenállás 900 N erővel hat. Mekkora teljesítménnyel dolgozik a motor a légellenállás leküzdésére?

Megoldás: A teljesítmény

$$P = \frac{dW}{dt}, \quad (4.4.1)$$

ahol a dW elemi munka

$$dW = \mathbf{F} d\mathbf{r}. \quad (4.4.2)$$

Ezt behelyettesítve a teljesítmény

$$P = \mathbf{F} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v} = 12000 \text{ W}. \quad (4.4.3)$$

4.5. Feladat: (HN 6C-57) Egy testet a koordinátarendszer origójából egyenes vonalban állandó $\mathbf{F} = f_1\hat{x} + f_2\hat{y}$ ($f_1 = 2\text{N}$; $f_2 = 4\text{N}$) erővel az $\mathbf{r} = s_1\hat{x} + s_2\hat{y}$ ($s_1 = 1\text{m}$; $s_2 = 5\text{m}$) helyre viszünk. (Az egyenesvonalú egyenletes mozgás fenntartásához természetesen egyéb kényszererők is fellépnek.) Határozzuk meg az \mathbf{F} erő munkáját

- (a) közvetlenül az $\mathbf{F}\Delta\mathbf{r}$ skaláris szorzattal,
- (b) az $|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta$ szorzattal!

Megoldás:

- (a) A munkát a skaláris szorzattal számolva

$$W = f_1s_1 + f_2s_2 = 22 \text{ J} \quad (4.5.1)$$

adódik.

- (b) Az erő nagysága $|\mathbf{F}| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{20} \text{ N}$, míg az elmozdulás nagysága $|\Delta\mathbf{r}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{26} \text{ m}$. A két vektor által bezárt szög

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{F}\Delta\mathbf{r}}{|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|} = \frac{22}{\sqrt{20}\sqrt{26}}. \quad (4.5.2)$$

A kiszámolt értékeket összeszorozva $W = |\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta = 22 \text{ J}$.

4.6. Feladat: * (HN 6C-58) Egy fiú a $m_0 = 3 \text{ kg}$ tömegű, $l_0 = 2 \text{ m}$ hosszúságú hajlékony láncot egyik végénél fogva úgy tartja, hogy a másik vége éppen a leér a földre.

- (a) Határozzuk meg, hogy miként változik a gyerek által kifejtett erő, ha a láncot egyenletes sebességgel s távolsággal lejjebb ereszti!

(b) A $W = \sum_i \mathbf{F}_i \Delta \mathbf{s}_i$ összegzés vagy a $W = \int \mathbf{F} ds$ integrál felhasználásával számítsuk ki azt a munkát, amit a gyerek végez, míg a teljes láncot a földre eresztí!

Megoldás:

(a) Jelölje $\lambda = \frac{m_0}{l_0}$ a hosszegységenkénti tömeget. Az s távolsággal lejjebb eresztett lánc azon részének tömege, amelyet még tartani kell:

$$m(s) = m_0 - \lambda s = m_0 - \frac{m_0}{l_0} s. \quad (4.6.1)$$

Az ehhez szükséges erő:

$$F(s) = \left(m_0 - \frac{m_0}{l_0} s \right) g, \quad (4.6.2)$$

amely felfele mutat.

(b) (α) A gyerek által végzett munka a görbe alatti terület kiszámolásával. Mivel az $F(s)$ erő az s távolság lineáris függvénye, így az $F(s)$ egyenes, valamint az x és az y tengely által határolt derékszögű háromszög területét kell kiszámolni. A háromszög alapja l_0 , a magassága $F(s=0) = m_0 g$, így a terület $\frac{1}{2} m_0 g l_0$. Figyelembe véve, hogy az elmozdulás a ható erővel ellentétes előjelű a végzett munka:

$$W = -\frac{1}{2} m_0 g l_0. \quad (4.6.3)$$

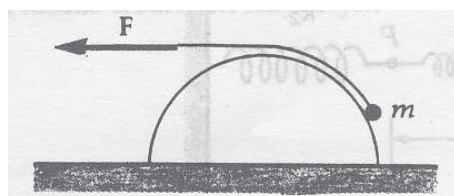
(β) A gyerek által végzett munka integrállal:

$$W = -\int_0^{l_0} F(s) ds = -\int_0^{l_0} \left(m_0 - \frac{m_0}{l_0} s \right) g ds = -\frac{1}{2} m_0 g l_0. \quad (4.6.4)$$

4.7. Feladat: * (HN 6C-59) A 20. ábrán látható súrlódásmentes félhenger aljáról a tetejére húzunk fel egy m tömegű testet a henger tetején átvett kötél segítségével.

(a) Határozzuk meg a kötélerőt a hely függvényében!

(b) Az $\int \mathbf{F} ds$ integrál segítségével határozzuk meg azt a munkát, ami a testnek a henger aljáról a tetejéig való egyenletes sebességű felhúzásához szükséges! A henger sugara R .



20. ábra.

Megoldás:

(a) Jelölje φ a tömegponthoz húzott sugár és az x tengely által bezárt szöget. Az mg súlyerő mindig y irányú, az ébredő N támaszerő kifelé mutató radiális irányú, a K kötél erő érintő irányú. Így v sebességű mozgás esetén a radiális komponensekre az

$$ma_{cp} = m \frac{v^2}{R} = mg \sin \varphi - N, \quad (4.7.1)$$

míg az érintő irányú komponensekre az

$$ma_t = K - mg \cos \varphi \quad (4.7.2)$$

összefüggések állnak fenn.

(α) Amennyiben a v sebesség állandó, azaz az a_t tangenciális gyorsulás zérus, így az utóbbi egyenletből a kötél erő:

$$K(\varphi) = mg \cos \varphi. \quad (4.7.3)$$

(β) Ha a tangenciális gyorsulás nem zérus $a = \frac{dv}{dt} \neq 0$, úgy a kötél erő

$$K(\varphi) = mg \cos \varphi + ma_t = mg \cos \varphi + m \frac{dv}{dt} \quad (4.7.4)$$

(b) Az elmozdulás a henger felületén (a keresztmetszetet tekintve a kör kerületén) lehetséges, amely kis $d\varphi$ szög esetén

$$ds = R d\varphi. \quad (4.7.5)$$

A végzett munkát a $W = \int F_s ds$ definíció alapján számoljuk.

(α) Abban az esetben amikor egyenletes mozgást feltételünk a

$$W = \int_0^{90^\circ} K(\varphi) R d\varphi = \int_0^{90^\circ} mgR \cos \varphi d\varphi = mgR, \quad (4.7.6)$$

integrál adja. Ez az eredmény várható volt, hiszen ez a helyzeti energia megváltozását adja.

(β) Ha figyelembe vesszük, hogy a sebesség nem feltétlenül állandó, akkor a végzett munka a (4.7.4) második tagjának integráltjával

$$W' = \int m \frac{dv}{dt} ds \quad (4.7.7)$$

több. Mivel $ds = v dt$, így

$$W' = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{dv}{dt} v dt = \int_{v_1}^{v_2} m v dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2, \quad (4.7.8)$$

ahol t_1 a kezdeti, t_2 a végső időpont, míg v_1 a kezdő-, v_2 a végsebesség. Így az összes végzett munka a nem egyenletes sebességű esetben

$$W = mgR + \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2. \quad (4.7.9)$$

4.8. Feladat: * (HN 6C-73) A 4 kg tömegű, nyugalomban lévő testet a rá ható változó erő az $x = 2t - 3t^2 + t^3$ függvény szerint mozgat. (Az x -et méterben, a t -t másodpercben mérjük.) Határozzuk meg, hogy mekkora munkát végez ez az erő a mozgás első három másodpercében!

Megoldás: A test sebessége, mint az idő függvénye:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2 - 6t + 3t^2. \quad (4.8.1)$$

A 3. másodpercben a sebesség $v(3s) = 11$ m/s. A végzett munka – figyelembe véve, hogy a test nyugalomból indult –

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = 242\text{ J}. \quad (4.8.2)$$

4.9. Feladat: (HN 6C-75) Az m tömegű test a nehézségi erő hatására szabadon esik. Mutassuk meg, hogy h távolság megtétele alatt a nehézségi erő átlagos teljesítménye: $P_{\text{átl}} = m\sqrt{g^3h/2}$!

Megoldás: Az eső test sebessége $v = gt$, kinetikus energiája

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2. \quad (4.9.1)$$

A h magasságból történő eséshez tartozó idő $t = \sqrt{2h/g}$. A teljesítmény – a behelyettesítések elvégzése után –

$$P = \frac{E}{t} = m\sqrt{\frac{g^3h}{2}}. \quad (4.9.2)$$

Ez igazolja a feladat állítását.

Munkatétel

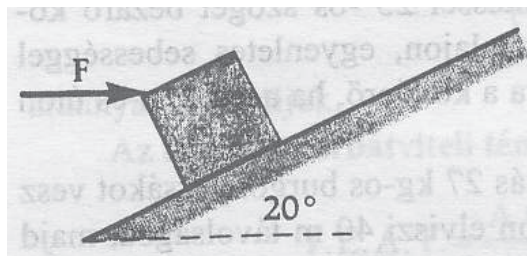
4.10. Feladat: (HN 6B-23) A 21. ábra szerint 2 kg-os testet vízszintes 27 N nagyságú erővel tolnak fel egy 20° -os lejtőn. A csúszási súrlódási együttható a lejtő és a test között 0,180.

(a) Mekkora a test gyorsulása?

(b) Határozzuk meg a kinematikai egyenletek felhasználásával a nyugalomból induló test sebességét abban a pillanatban, amikor 3 m-t tett meg a lejtőn felfelé!

(c) Válaszoljunk a (b) kérdésre a munkatétel alkalmazásával!

Megoldás: Jelölések: $m = 2$ kg; $F = 27$ N; $\alpha = 20^\circ$ és $\mu = 0,180$.



21. ábra.

(a) A mozgásegyenletek felírásához bontsuk fel az F erőt lejtőirányú, felfele mutató ($F \cos \alpha$) és lejtőre merőlegesen lefele mutató ($F \sin \alpha$) komponensekre. A felfele mozgást pozitív előjelűnek tekintve a lejtő irányú mozgásegyenlet

$$ma = F \cos \alpha - mg \sin \alpha - \mu N. \quad (4.10.1)$$

A N támaszerő a

$$0 = N - mg \cos \alpha - F \sin \alpha \quad (4.10.2)$$

egyenletből fejezhető ki. A két egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{F(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)}{m} - g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha = 6,74 \text{ m/s}^2. \quad (4.10.3)$$

(b) Az s út megtétele utáni sebesség

$$v = \sqrt{2sa} = 6,36 \text{ m/s}. \quad (4.10.4)$$

(c) A testre ható lejtőirányú (felfele mutató) eredő erő

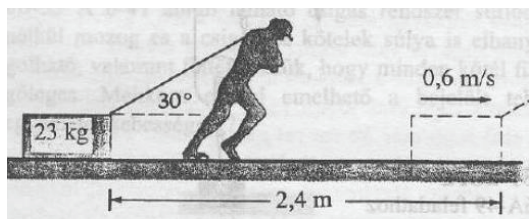
$$F' = F(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \quad (4.10.5)$$

amelynek munkája változtatja meg a test mozgási energiáját

$$\frac{1}{2}mv^2 = F's = (F(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) - mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha)s. \quad (4.10.6)$$

Innen a v sebesség

$$v = 6,36 \text{ m/s}. \quad (4.10.7)$$



22. ábra.

4.11. Feladat: (HN 6B-28) A 22. ábrán látható ember nyugalmi helyzetből indulva 2,4 m távolságra húz el egy 23 kg-os ládát az érdes ($\mu = 0,5$) padlón. A láda végsebessége 0,6 m/s. A munkatétel alkalmazásával határozzuk meg, hogy mekkora állandó erőt fejtett ki az ember?

Megoldás: A testre ható erő – ez végzi a gyorsítást – vízszintes komponense:

$$F \cos \alpha - \mu N, \quad (4.11.1)$$

ahol N az asztaltól a testre ható támaszerő:

$$N = mg - F \sin \alpha. \quad (4.11.2)$$

A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W, \quad (4.11.3)$$

ahol W a testen végzett munka, v_1 a kezdeti, v_2 végsebesség. A munka kifejezése most

$$W = (F \cos \alpha - \mu N)s, \quad (4.11.4)$$

ahol az $s = 2,4$ m a megtett út. Figyelembe véve, hogy $v_1 = 0$, a fenti kifejezésekből a hatóerőre

$$F = \frac{\mu mgs + \frac{1}{2}mv_2^2}{s(\cos \alpha + \mu \sin \alpha)} = 104,6 \text{ N} \quad (4.11.5)$$

adódik.

4.12. Feladat: (HN 8B-29) Egy 5 g tömegű 700 m/s sebességű golyó behatol egy rögzített fakockába és megáll benne. Tegyük fel, hogy a fakocka $8 \cdot 10^3$ N nagyságú állandó erőt fejt ki a golyóra, míg az meg nem áll. Határozzuk meg

- mennyi idő alatt áll meg a golyó?
- milyen mélyen hatol be a fába?
- mennyi munkát végez a fakocka, amíg a golyó meg nem áll?
- mennyivel változik meg a golyó mozgási energiája?

Megoldás: A koordinátarendszer tengelye mutasson balról jobbra. Jelöljük az adatokat: $m = 5 \text{ g}$; $v_0 = 700 \text{ m/s}$ (tételezzük fel, hogy a golyó balról jobbra halad) és így $F = -8 \cdot 10^3 \text{ N}$.

(a) Először a golyó gyorsulását számoljuk, amely

$$a = \frac{F}{m} = -1,6 \cdot 10^6 \text{ m/s}^2. \quad (4.12.1)$$

A megállásig eltelt idő a $v(t) = 0 = at + v_0$ összefüggésből

$$t = \frac{v_0}{-a} = 4,375 \cdot 10^{-4} \text{ s}. \quad (4.12.2)$$

(b) A kiszámolt adatok felhasználásával a megtett út

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 0,153 \text{ m}. \quad (4.12.3)$$

(c) A fakocka által végzett munka

$$W = F \cdot s = -1225 \text{ J}. \quad (4.12.4)$$

(d) A golyó kinetikus energiájának megváltozása

$$\Delta E_k = W = -1225 \text{ J}. \quad (4.12.5)$$

4.13. Feladat: A d vastagságú deszkába m tömegű v_0 sebességű lövedék csapódik. Mekkora lesz a másik oldalon kilépő lövedék v sebessége, ha

(a) a deszkában állandó a ható F erő,

(b) a deszkában a behatolási mélységtől függő $F(x) = Dx$ erő fékezi? (A D konstans paraméter.)

Megoldás: A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = W, \quad (4.13.1)$$

ahol W a testen végzett munka. Ami az a, esetben:

$$W = -Fd, \quad (4.13.2)$$

és a b, esetben az egyenes alatti területtel:

$$W = -\frac{1}{2} D x^2. \quad (4.13.3)$$

Ezekkel a sebességek: a,

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{1}{2} m v_0^2 - F d \right)}, \quad (4.13.4)$$

és b,

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} D d^2 \right)}. \quad (4.13.5)$$

4.14. Feladat: * A d vastagságú deszkába m tömegű v_0 sebességű lövedék csapódik. Mekkora lesz a másik oldalon kilépő lövedék v sebessége, ha a deszkában a behatolási mélységtől függő $F(x) = cx^2$ erő fékezi? (A c konstans paraméter.)

Megoldás: A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = W, \quad (4.14.1)$$

ahol W a testen végzett munka, ami

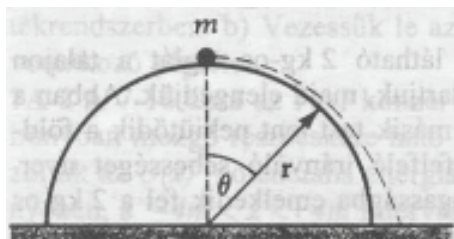
$$W = - \int_0^d c x^2 dx = - \frac{1}{3} c d^3. \quad (4.14.2)$$

Ezzel a sebesség:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{3} c d^3 \right)}. \quad (4.14.3)$$

Munkavégzés konzervatív erőterben. Potenciális energia

4.15. Feladat: (HN 7B-18) Egy kicsiny, m tömegű test a sima, r sugarú félgömb tetején nyugszik. A nyugalmi helyzetéből kissé kimozdítva, súrlódásmentesen lecsúszik a gömbön. Mekkora



23. ábra.

a függőlegessel bezárt szög, amikor a test elhagyja a gömb felszínét?

Megoldás: A potenciális energia zérus szintje legyen a félgömb alján. Így a helyzeti energia mozgás kezdetén $E_{p_1} = mgr$, a kinetikus energia $E_{k_1} = 0$ mivel a test áll. A felülettől történő elválás pillanatában: $E_{p_2} = mgr \cos \theta$, a mozgási energia $E_{k_2} = \frac{1}{2}mv^2$. A mozgás során nincs súrlódás és közegellenállás, így a mechanikai energia megmaradó mennyiség, azaz írhatjuk:

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}. \quad (4.15.1)$$

Behelyettesítés után:

$$mgr = \frac{1}{2}mv^2 + mgr \cos \theta. \quad (4.15.2)$$

A körmozgás feltétele:

$$\frac{mv^2}{r} = mg \cos \theta - N, \quad (4.15.3)$$

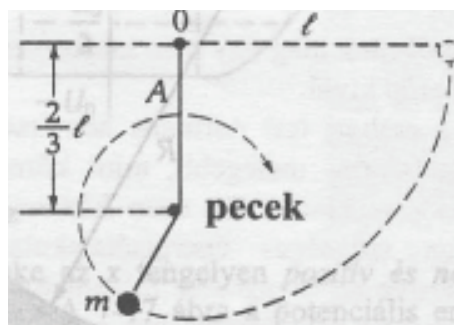
ahol a jobboldal első tagja a súlyerő radiális komponense, az N a támaszerő. Az elválás pillanatában:

$$N = 0. \quad (4.15.4)$$

Az egyenletek megoldása:

$$\cos \theta = \frac{2}{3} \rightarrow \theta = 48^\circ. \quad (4.15.5)$$

4.16. Feladat: (HN 7B-21) Egy m tömegű testet l hosszúságú kötéltre ingaként felfüggesztünk. A test vízszintes helyzetből indul. Az O felfüggesztési ponttól $2/3l$ távolságban kicsiny pöcköt helyeztünk el, melybe a kötéllengése során beakad. Így a test a legalsó pont elérése után egy $1/3l$ sugarú függőleges körpályára tér át. Határozzuk meg a fonalat feszítő erőt az A pontban,



24. ábra.

ami a pöcek elérése utáni legmagasabb helye a testnek!

Megoldás: A potenciális energia zérus szintje legyen az A pont magasságában. Így a mechanikai energia megmaradás tétele miatt egyszerűen

$$mg \frac{1}{3}l = \frac{1}{2}mv^2. \quad (4.16.1)$$

Másrészt a pecek körüli körmozgásra az A pontban az

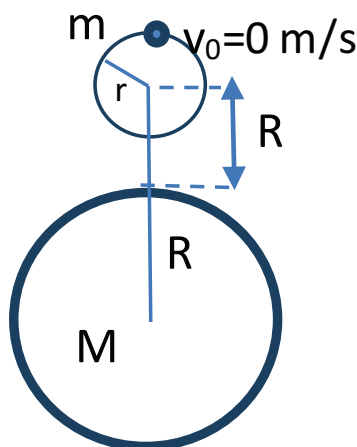
$$m \frac{v^2}{\frac{1}{3}l} = K + mg \quad (4.16.2)$$

összefüggés írható, ahol K a kötélerő. A két egyenletből

$$K = mg. \quad (4.16.3)$$

4.17. Feladat: Egy M tömegű, R sugarú homogén gömb égitest fölött az ábrán látható módon r sugarú körpályán egy hurkon m tömegű pontszerű test mozoghat. A hurok nem mozdul el. Az $m \ll M$ tömegű test kezdősebesség nélkül elindul a hurok legfelső pontjáról.

a, Mekkora sebességgel halad át a hurok alsó pontján? (Közegellenállástól eltekintünk.)



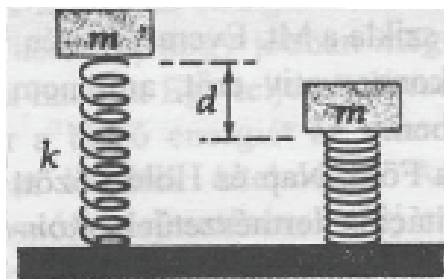
25. ábra.

b, Mekkora N támaszerőt fejt ki a hurok az alsó pontban?

Megoldás:

4.18. Feladat: (HN 7A-10) Egy m tömegű téglát úgy van felerősítve, hogy a k rugóállandójú rugót éppen csak érinti. A téglát ekkor elengedjük nyugalmi helyzetéből. Határozzuk meg, hogy milyen d távolságra jut el a téglát az elengedés után!

Megoldás: Mivel a mozgás során nincs súrlódás és közegellenállás, a mechanikai energia megmarad. Azaz a kezdeti kinetikus energia E_{k_1} és potenciális energia E_{p_1} összege egyenlő a tekintett



26. ábra.

mozgás végi kinetikus E_{k_2} és potenciális energia E_{p_2} összegével:

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}. \quad (4.18.1)$$

Mivel a test kezdetben és az alsó helyzetben is áll, így $E_{k_1} = 0$ és $E_{k_2} = 0$. A helyzeti energia zérus pontját a talajra helyezve $E_{p_1} = mgh$, ahol h a téglá talajtól való távolsága. Az E_{p_2} a téglá alsó helyzetéhez tartozó helyzeti energiájából és a rugalmas energiából áll, azaz $E_{p_2} = mg(h-d) + \frac{1}{2}kd^2$. A fenti egyenletbe helyettesítve:

$$mgh = mg(h-d) + \frac{1}{2}kd^2. \quad (4.18.2)$$

Ebből a d összenyomódás mértéke:

$$d = \frac{2mg}{k}. \quad (4.18.3)$$

(Megjegyzés: Természetesen ugyanez az eredmény adódik, ha pl. a felső helyzetet választjuk a potenciális energia zérus pontjának.)

4.19. Feladat: A völgy fölött h magasságban átvezető viaduktról gumiköteleken ugrálnak alá (bungee jumping). Milyen L hosszúságúnak válassza az m tömegű ugró a k direkción erejű gumikötetet, hogy a talajt éppen érintse? (Az ugró kiterjedése legyen pontszerű.)

Megoldás: Az ugró a mozgás elején és a talaj érintése pillanatában áll, így mozgási energiája mindkét esetben zérus. Így a kezdeti mgh helyzeti energia – a völgy alját zérus szintnek véve – a gumikötélben tárolódó rugalmas energiává alakul, azaz:

$$mgh = \frac{1}{2}k(h-L)^2. \quad (4.19.1)$$

Itt a $h-L$ a gumikötél megnyúlása. Az egyenlet megoldása:

$$L = h \pm \sqrt{\frac{2mgh}{k}}. \quad (4.19.2)$$

Innen a fizikailag értelmes megoldás, így a kezdeti (beállítandó) hossz:

$$L = h - \sqrt{\frac{2mgh}{k}}. \quad (4.19.3)$$

4.20. Feladat: Egy $m = 0,1$ kg tömegű testet $h = 2$ m magasból a vízszinteshez képest $\alpha = 60^\circ$ -os szöggel felfelé egy rugós kilövővel indítunk el. A rugó kezdeti összenyomása $y = 4$ cm, a rugóállandó $D = 4000$ N/m. A légellenállástól eltekintünk.

(a) Határozza meg a mechanikai energia megmaradása alapján, hogy a test mekkora sebességgel csapódik a földre!

(b) Milyen magasan lesz a pályája tetőpontján?

Megoldás:

(a) Kezdetben a test áll, h magasságban van, a rugó összenyomott. A becsapódás pillanatában a test mozog, 0 magasságban van, a rugó nyújtatlan. Így a kezdeti és végső mechanikai energiákra

$$mgh + \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}v^2 \quad (4.20.1)$$

egyenlet áll fenn. Ebből

$$v = \sqrt{2gh + \frac{Dy^2}{m}} = 10,2 \text{ m/s} \quad (4.20.2)$$

sebesség adódik.

(b) A kilövés utáni sebességet a

$$\frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (4.20.3)$$

összefüggésből határozhatjuk meg. Ez feltételezi, hogy a kilövés pillanatában a test emelkedése elhanyagolható. A sebesség vízszintes komponense

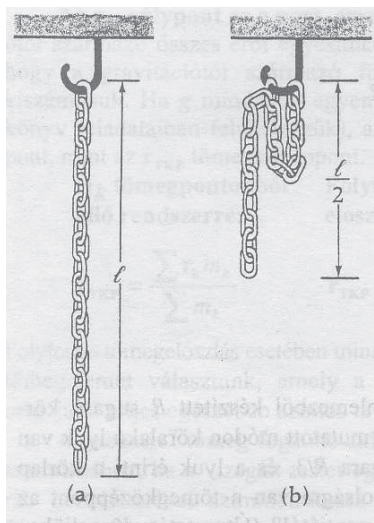
$$v_x = v_0 \cos \alpha. \quad (4.20.4)$$

A maximális emelkedésre a mechanikai energiamegmaradás

$$mgh + \frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}mv_x^2 + mgh_{max} \quad (4.20.5)$$

egyenlettel fogalmazható meg, amelyből a maximális emelkedési magasság

$$h_{max} = \frac{Dy^2}{2mg} - \frac{v_x^2}{2g} + h = 4,45 \text{ m}. \quad (4.20.6)$$



27. ábra.

4.21. Feladat: (HN 10B-11) Az m tömegű, l hosszúságú lánc kampón lóg a 27. ábra szerint. Számítsuk ki azt a munkát, amely a lánc középső láncszemének a kampóra történő felakasztásához szükséges!

Megoldás: Legyen a potenciális energia zérus pontja a teljesen leengedett lánc legalsó pontja (27a ábra). Ennek megfelelően az m tömegű lánc tömegközéppontja $\frac{1}{2}l$ magasságban van, így E_1 helyzeti energiája

$$E_1 = mg \frac{1}{2}l. \quad (4.21.1)$$

A felakasztott lánc egyes darabjainak energiái összege a 27.b ábrán balról jobbra haladva

$$E_2 = \frac{1}{2}mg \frac{3}{4}l + \frac{1}{4}mg \frac{7}{8}l + \frac{1}{4}mg \frac{7}{8}l = \frac{13}{16}mgl. \quad (4.21.2)$$

A szükséges munka a két potenciális energia különbsége

$$W = E_2 - E_1 = \frac{5}{16}mgl. \quad (4.21.3)$$

4.22. Feladat: * Az m_0 tömegű l_0 hosszúságú lánc a földön hever. A végét elkezdjük állandó v_0 sebességgel emelni. a, Mekkora erőt kell ehhez kifejteni? b, Mekkora a végzett összes munka, amikor a kötel vége éppen elhagyja a talajt?

Megoldás: a, Tekintsük a közbenső t időpontot, amikor már $v_0 t$ hossz felemelkedett és v_0 sebességű. E pillanatban az m tömegű darabnak a helyzeti energiája:

$$E_p(t) = \frac{1}{2}mgh = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_0}{l_0} v_0 t}_{m} g \underbrace{v_0 t}_{h} \quad (4.22.1)$$

tömegű darabra. Másrészt ennek az m tömegű darabnak a kinetikus energiája:

$$E_k(t) = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0 t v_0^2. \quad (4.22.2)$$

A teljes energia:

$$E(t) = \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^2 t^2 g + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^3 t, \quad (4.22.3)$$

amelyből a $P(t)$ teljesítmény:

$$P(t) = \frac{dE}{dt} = \frac{m_0}{l_0} v_0^2 t g + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^3. \quad (4.22.4)$$

A $P(t) = F v$ összefüggésből a lánkra

$$F(t) = \frac{P(t)}{v_0} = \frac{m_0}{l_0} v_0 g t + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^2 \quad (4.22.5)$$

erővel kell hatni. b, A végzett munka egyszerűen kiszámolható úgy, hogy a lánccsözpontja $\frac{l_0}{2}$ magasságra emelkedett, másrészt a lánccs sebessége v_0 . A helyzeti energiája $\frac{m_0 g l_0}{2}$, a mozgási energiája $\frac{1}{2} m_0 v_0^2$, azaz

$$W = \frac{m_0 g l_0}{2} + \frac{1}{2} m_0 v_0^2. \quad (4.22.6)$$

Megjegyzés: E munka a következőképpen is kiszámolható. A felemeléshez szükséges idő: $t_f = \frac{l_0}{v_0}$. A munka $W = \int F dx = \int F v dt$ alapján:

$$W = \int_0^{\frac{l_0}{v_0}} \left(\frac{m_0}{l_0} v_0 g t + \frac{1}{2} \frac{m_0}{l_0} v_0^2 \right) v_0 dt = \frac{m_0 g l_0}{2} + \frac{1}{2} m_0 v_0^2. \quad (4.22.7)$$

Energiatétel

4.23. Feladat: Egy 60 kg-os láda 4 m magasról lecsúszik egy a vízszintessel 30° -os szöget bezáró lejtőn. Mekkora a súrlódási erő munkája ezalatt, ha a láda 5 m/s sebességet ér el?

Megoldás: Jelölések: $m = 60$ kg, $h = 4$ m, $\alpha = 30^\circ$ és $v = 5$ m/s. A mechanikai energia megmaradást "elrontó" disszipatív erő munkáját a következőképpen tudjuk figyelembe venni:

$$U_{p_2} + E_{k_2} = U_{p_1} + E_{k_1} + W, \quad (4.23.1)$$

ahol végső potenciális és kinetikus energiát összegét (mechanikai energia) úgy kapjuk, hogy a kezdeti potenciális és kinetikus energiához hozzáadjuk a súrlódási végzett munkát. Mivel a

kezdeti mechanikai energia nagyobb mint a végső, biztosak lehetünk benne, hogy W negatív. A potenciális energia zérus szintjét a lejtő aljára a jelen esetre a következő egyenlet írható:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + W. \quad (4.23.2)$$

Az adatok behelyettesítése után

$$W = -1650\text{J}. \quad (4.23.3)$$

4.24. Feladat: Az α hajlásszögű, μ súrlódási együtthatójú lejtő alján felfelé lökünk v_0 sebességgel egy m tömegű testet. A test a mozgás tetőpontját elérve visszacsúszik. Mekkora lesz a sebessége a lejtő alján? A feladatot oldjuk meg a

- (a) dinamikai egyenletek megoldásával és
- (b) az energiátétel felhasználásával!

Megoldás:

(a) A felfele mozgásnál legyen a koordinátatengely irányítása pozitív a felfele irányban. Ekkor a test lejtőirányú mozgásegyenlete

$$ma_{fel} = -mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \quad (4.24.1)$$

amelyből a gyorsulás

$$a_{fel} = -g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha. \quad (4.24.2)$$

A felfele mozgás ideje a $0 = v_0 + a_{fel}t$ egyenletből

$$t_{fel} = \frac{v_0}{-a_{fel}}, \quad (4.24.3)$$

amellyel a idő alatt a megtett út

$$s = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}. \quad (4.24.4)$$

A lefele csúzásnál fordítsuk meg a koordinátatengelyt, a pozitív irányítás mutasson lefele. Ekkor a mozgásegyenlet

$$ma_{le} = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha, \quad (4.24.5)$$

amelyből a gyorsulás

$$a_{le} = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha. \quad (4.24.6)$$

A lefele mozgás ideje a $v = a_{le}t$ egyenletből

$$t_{le} = \frac{v}{a_{le}}, \quad (4.24.7)$$

amely idő alatt a megtett s út

$$s = \frac{1}{2} a_{le} t^2 = \frac{v^2}{2a_{le}}. \quad (4.24.8)$$

E két egyenletből a sebesség a lejtő alján

$$v = \sqrt{2sa_{le}}. \quad (4.24.9)$$

Az s és a_{le} korábban kapott kifejezéseit behelyettesítve a sebességre a

$$v = v_0 \sqrt{\frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}} \quad (4.24.10)$$

eredmény adódik.

(b) Az energiátétel azt állítja, hogy a végső kinetikus és potenciális energia összege egyenlő a kezdeti kinetikus és potenciális energia összegével plusz a testen végzett munkával, azaz

$$U_{p2} + E_{k2} = U_{p1} + E_{k1} + W. \quad (4.24.11)$$

A felfele mozgásnál $U_{p1} = 0$; $E_{k1} = \frac{1}{2}mv_0^2$; $U_{p2} = mgs \sin \alpha$; $E_{k2} = 0$ és $W = -\mu mgs \cos \alpha$. Egy egyenletbe összeírva

$$mgs \sin \alpha = \frac{1}{2}mv_0^2 - \mu mgs \cos \alpha. \quad (4.24.12)$$

Ebből az s út

$$s = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}. \quad (4.24.13)$$

A lefele csúszásnál

$$U_{p2} + E_{k2} = U_{p1} + E_{k1} + W, \quad (4.24.14)$$

ahol $U_{p1} = mgs \sin \alpha$; $E_{k1} = 0$; $U_{p2} = 0$; $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$ és $W = -\mu mgs \cos \alpha$. Egy egyenletbe írva

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgs \sin \alpha - \mu mgs \cos \alpha. \quad (4.24.15)$$

Az s utat a (4.24.13) egyenletből behelyettesítve a sebességre a fentiekkel egyező

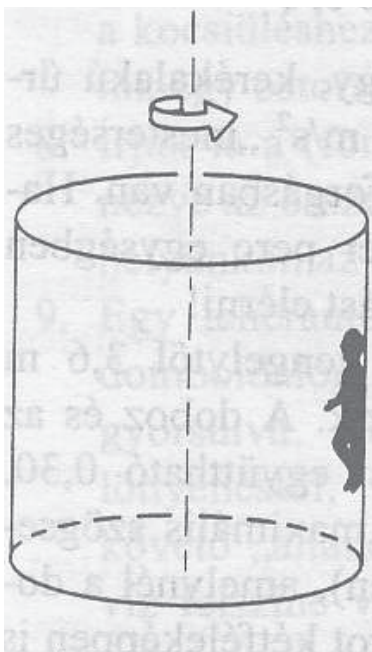
$$v = v_0 \sqrt{\frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}} \quad (4.24.16)$$

eredményt kapjuk.

5. Feladatok a gyorsuló koordináta-rendszerek tárgyköréből

Centrifugális erő

5.1. Feladat: (HN 13B-20) Egy népszerű vidámparki mutatványnál a látogatók egy függőleges tengely körül forgó henger belső falának támaszkodnak a 28. ábrának megfelelően. Ezután a padlót lesüllyesztik, és hagyják, hogy a látogatók a centrifugális erőből a falhoz "odaszögezve" és a súrlódási erő következtében a lecsúszástól védve a falon maradjanak. A henger R sugarának, az ω szögsebességnek és a g nehézségi gyorsulásának függvényében határozzuk meg azt a legkisebb μ nyugalmi súrlódási együtthatót, amely a lecsúszást megakadályozza. A feladatot forgó vonatkoztatási rendszerben oldjuk meg!



28. ábra.

Megoldás: A forgó vonatkoztatási rendszerben a falhoz "odaszögezt" látogatóra négy erő hat. A centrifugális erő (tehetetlenségi erő), amely radiálisan kifelé mutat és nagysága $F_{cf} = mR\omega^2$. A falon radiálisan befelé mutat az N támaszerő, amelynek nagysága pontosan $mR\omega^2$. Függőlegesen lefelé hat az mg súlyerő, ezzel ellentétesen az F_s súrlódási erő, és a kettő egymással egyenlő. Az fentieket matematikailag összefoglalva:

$$mg = F_s = \mu N = \mu mR\omega^2, \quad (5.1.1)$$

ahonnan

$$\mu = \frac{g}{R\omega^2}. \quad (5.1.2)$$

5.2. Feladat: Egy $M = 1,499 \cdot 10^{25}$ kg tömegű, $R = 10000$ km sugarú bolygó északi sarkán $k = 100$ N/m direkciós erejű rugóra $m = 1$ kg tömegű testet lógatunk. A bolygó $\omega = 10^{-4}$ 1/s szögsebességgel forog. (A gravitációs állandó: $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg².)

(a) Mekkora a rugó megnyúlása?

(b) Ezt követően a mérést az egyenlítőn megismételjük. Mennyi ekkor a rugó megnyúlása?

Megoldás:

(a) A bolygó északi sarkán végzett mérés során

$$\gamma \frac{mM}{R^2} = k\Delta x, \quad (5.2.1)$$

ahol Δx a rugó megnyúlása, amely

$$\Delta x = \gamma \frac{mM}{kR^2} = 0,1 \text{ m} = 100 \text{ mm}. \quad (5.2.2)$$

(b) Az egyenlítőn figyelembe kell vennünk a centrifugális erőt, amellyel az egyenlet úgy módosul, hogy

$$\gamma \frac{mM}{R^2} - mR\omega^2 = k\Delta x'. \quad (5.2.3)$$

Innen a $\Delta x'$ megnyúlás

$$\Delta x' = \gamma \frac{mM}{kR^2} - \frac{mR\omega^2}{k} = 0,099 \text{ m} = 99 \text{ mm}, \quad (5.2.4)$$

azaz a rugó megnyúlása 1 mm-rel kevesebb.

5.3. Feladat: (HN 14C-39) Az ω szögsebességgel forgó ringlispíl középpontjától r távolságra lévő helyen h magasságból egy tárgyat ejtenek a padlóra. A mozgást a ringlispíl vonatkoztatási rendszeréből vizsgálva mutassuk meg, hogy az elejtés talppontja és a becsapódási pont közötti távolság jó közelítéssel $\omega^2 rh/g$. Milyen feltételezésekkel kell élni a feladat megoldása során?

Megoldás: A tárgy

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (5.3.1)$$

idő alatt esik. A forgó vonatkoztatási rendszerben az

$$a_{cf} = r\omega^2 \quad (5.3.2)$$

centrifugális gyorsulása lesz, amely kifelé mutató radiális irányú. E gyorsulással az elejtés talpontja és a becsapódási pont közötti távolság

$$\Delta s = \frac{1}{2}a_{cf}(\Delta t)^2 = \frac{\omega^2 rh}{g}. \quad (5.3.3)$$

A forgás közbeni szögelfordulás

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t. \quad (5.3.4)$$

Ha azt tekintjük, hogy a test az álló rendszerből nézve érintő irányban $r\omega$ sebességgel egyenesvonalú egyenletes mozgást végez az elejtés után, akkor az ehhez tartozó elmozdulás

$$\Delta x = r\omega\Delta t. \quad (5.3.5)$$

Az ehhez az elmozduláshoz tartozó α központi szög

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta x}{r} = \omega\Delta t. \quad (5.3.6)$$

Ahhoz, hogy φ és α közelítőleg megegyezzenek egymással, az $\omega\Delta t \ll 1$ feltétel teljesülése szükséges.

Coriolis-erő

5.4. Feladat: (HN 14C-30) Írjuk le, hogyan tudna egy személy a forgásban lévő ringlispíl lapján járni úgy, hogy a rá ható Coriolis-erő és a centrifugális erő egymással egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú legyen! (A ringlispíl forogjon az óra járásával ellentétesen.)

Megoldás: Az ω szögsebességgel forgó ringlispíl origótól való R távolságú pontjában a személyre radiális kifelé mutató $F_{cf} = mR\omega^2$ centrifugális erő hat. Ahhoz, hogy a Coriolis-erő radiális befelé mutató legyen, ahhoz az óra járásával egyezően, az R sugarú kör érintője irányában kell v sebességgel haladnia. A Coriolis erő nagysága $F_{Co} = 2m\omega v$. A kettő

$$F_{cf} = mR\omega^2 = 2m\omega v = F_{Co} \quad (5.4.1)$$

egyenlőségéből a sebességre a

$$v = \frac{R\omega}{2} \quad (5.4.2)$$

adódik.

5.5. Feladat: Egy forgótárcsa szélén álló ember eldob egy testet vízszintesen a függőleges forgástengely irányába 10 m/s kezdősebességgel. A tárcsa percnként 600-at fordul. Mekkora a tárcsa vonatkoztatási rendszerében a test pályájának kezdeti görbületi sugara?

Megoldás: Jelölések: $v = 10$ m/s és $f = 600$ 1/perc = 10 1/s. A tárcsa szögsebessége $\omega = 2\pi f = 62,8$ rad/s. A forgó rendszerben a testet a Coriolis-erő téríti el, amelyhez tartozó gyorsulás nagysága

$$a_{Co} = 2\omega v. \quad (5.5.1)$$

Az indulás pillanatában körpályán mozog a test, amely esetén gyorsulás

$$a = \frac{v^2}{R}. \quad (5.5.2)$$

A kettő egyenlőségéből a görbületi sugár

$$R = \frac{v}{2\omega} = 0,159 \text{ m}. \quad (5.5.3)$$

5.6. Feladat: (HN 14C-33) A mesterlövész balról jobbra haladó célpontra céloz. A célt követő puskacső a vízszintes síkban mozog. A puska szögsebessége 1,5 rad/s abban a pillanatban, amikor az 5 g tömegű lövedék 500 m/s sebességgel éppen kilép a csőből.

- (a) A forgó rendszerben mekkora Coriolis-erő hat a lövedékre a cső elhagyásának pillanatában?
 (b) Milyen irányú ez az erő?

Megoldás: Jelölések: $\omega = 1,5$ rad/s; $m = 5$ g és $v = 500$ m/s.

(a) A puska csöve az óra járásának megfelelően fordul el, így az ω szögsebességvektor függőlegesen lefele mutat. A Coriolis-erő a ω szögsebességvektor és a v sebességvektorokkal

$$\mathbf{F} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (5.6.1)$$

amelynek nagysága – figyelembe véve, hogy ω és v egymásra merőlegesek

$$F = 2m\omega v = 7,5 \text{ N}. \quad (5.6.2)$$

- (b) Az erő iránya jobbról balra mutat.

5.7. Feladat: (HN 14C-38) A percnként tízet forgó ringlispíj szélén álló kislány 10 m/s vízszintes kezdősebességgel labdát dob a forgástengely felé. Úgy látja, hogy a pályagörbe jobbra kanyarodik.

- (a) Számítsuk ki a pályagörbe kezdeti vízszintes görbületi sugarát!
 (b) Amikor a labdát dobó kislány a ringlispíj közepe felé néz, jobbra vagy balra látja elmozdulni a távoli tájat?

Megoldás: Jelölések: A fordulatszám $f = 10 \text{ 1/perc} = 1/6 \text{ 1/s}$, amellyel a szögsebesség $\omega = 2\pi f = 1,047 \text{ rad/s}$; $v = 10 \text{ m/s}$.

- (a) A labda Coriolis-gyorsulása

$$a_{Co} = 2\omega v, \quad (5.7.1)$$

amely éppen az elkanyarodás

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (5.7.2)$$

gyorsulása. Itt r a pályagörbe görbületi sugara. A két gyorsulás egyenlőségéből

$$r = \frac{v}{2\omega} = 9,55 \text{ m}. \quad (5.7.3)$$

- (b) Mivel a pályagörbe jobbra kanyarodik, így a ringlispíj az óra járásával ellentétes irányban forog. Az ilyen irányban forgó rendszerből nézve a táj balról jobbra látszik mozogni.

5.8. Feladat: A Föld napi forgása következtében az eső testek kelet felé elhajlanak.

- (a) Mekkora az Egyenlítőre szabadon eső test keleti irányú gyorsulása?
 (b) Számítsuk ki, hogy a becsapódás pillanatában mekkora a keleti irányú sebessége annak a testnek, amely $h = 100 \text{ m}$ magasból esik szabadon az Egyenlítőre!

Megoldás:

- (a) Az Egyenlítőn szabadon eső testnek a Coriolis-erő következményeként – figyelembe véve, hogy a Föld ω szögsebessége és a leeső test v sebessége egymásra merőleges –

$$a(t) = 2\omega v = 2\omega gt \quad (5.8.1)$$

keleti irányú gyorsulása van.

- (b) A t időtartamú esés során az $a(t) = 2\omega gt$ egyenes alatti terület éppen a keleti irányú sebesség:

$$v(t) = \omega gt^2. \quad (5.8.2)$$

* Más úton:

$$v(t) = \int_0^t a(t) dt = \int_0^t 2\omega g t dt = \omega g t^2. \quad (5.8.3)$$

Az esés ideje 4,47 s, $\omega = 7,27 \cdot 10^{-5}$ rad/s, $g = 10$ m/s² adatokkal számolva:

$$v_{kelet} = 1.45 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}. \quad (5.8.4)$$

Megjegyzés: Az ω szögsebesség nagyon kicsi, és ezért a "Coriolis-gyorsulás" is nagyon kicsi (ha nem túl sokáig esik a test). Emiatt tekinthetjük úgy, hogy a test teljes sebessége végig gyakorlatilag lefelé mutat, és így a Coriolis-gyorsulásnak valóban tisztán vízszintes az iránya.

6. Feladatok rugalmas és rugalmatlan ütközések tárgyköréből

Impulzustétel, impulzusmegmaradás törvénye

6.1. Feladat: Egy $m = 4$ kg tömegű kalapács $v_0 = 6$ m/s sebességgel érkezik a szög fejéhez és $\Delta t = 0,002$ s alatt fékeződik le, miközben a szög behatol a fába. (A szög tömege elhanyagolható a kalapács tömegéhez viszonyítva.)

- Számítsuk ki az átlagos fékező erőt!
- Számítsuk ki a szög útját a fában!
- Mekkora munkát végzett a fa a kalapácson?

Megoldás:

- (a) A szögre ható átlagos fékező erő

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = -12000 \text{ N}, \quad (6.1.1)$$

ahol a negatív előjel a fékező hatást fejezi ki.

(b) A szög átlagos gyorsulása a sebességváltozásával számolható ki. Amennyiben a szög nem deformálódott az ütés alatt, a kezdeti sebessége meg kell hogy egyezzen a kalapács sebességével. Ezért a sebesség megváltozása $\Delta v = -v_0$. A szög gyorsulása ezért

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -3000 \text{ m/s}^2, \quad (6.1.2)$$

amit felhasználhatunk a szög által megtett út meghatározásához.

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 0,006 \text{ m} = 6 \text{ mm}. \quad (6.1.3)$$

- (c) A fa által végzett munka a kalapácson:

$$W = F s = -72 \text{ J}. \quad (6.1.4)$$

6.2. Feladat: (HN 8B-27) A kezdetben nyugalomban lévő 5 kg tömegű testre 5 másodpercig 6 N állandó erő hat, majd az erő 3 s alatt egyenletesen zérusra csökken. Mekkora sebességet ér el a test?

Megoldás: Jelölések: $m = 5$ kg; $t_1 = 5$ s; $F = 6$ N és $t_2 = 8$ s a második időintervallum vége.

A test impulzusváltozását kell kiszámoljuk. A $0 \leq t \leq t_1 = 5$ s időintervallumban az impulzusváltozás

$$\Delta I_1 = Ft_1 = 30 \text{ kgm/s.} \quad (6.2.1)$$

A második szakaszon az erő időbeli függése

$$F(t) = \frac{F}{t_2 - t_1}(t_2 - t). \quad (6.2.2)$$

A második időintervallumon történő impulzusváltozás az egyenes alatti területtel egyszerűen számolható, amely

$$\Delta I_2 = \frac{F}{2}(t_2 - t_1) = 9 \text{ kgm/s.} \quad (6.2.3)$$

A teljes impulzusváltozás

$$\Delta I = \Delta I_1 + \Delta I_2 = 39 \text{ kgm/s,} \quad (6.2.4)$$

amelyet a tömeggel osztva a végsebességet kapjuk:

$$v = \frac{\Delta I}{m} = 7,8 \text{ m/s.} \quad (6.2.5)$$

6.3. Feladat: Egy testet $F_1 = 10$ N erővel $t_1 = 3$ s alatt lehet felgyorsítani nyugalmi helyzetből $v = 15$ m/s sebességre. Mennyi ideig tart ugyanennek a testnek nyugalmi helyzetből ugyanerre a sebességre való felgyorsítása, ha az erő $F_2 = 2$ N?

Megoldás: A ható erő a test impulzusváltozását okozza

$$\Delta p = F \Delta t. \quad (6.3.1)$$

Mivel ugyanannak a testnek ugyanakkora impulzusváltozásáról van szó, így fenn áll a

$$F_1 t_1 = F_2 t_2 \quad (6.3.2)$$

összefüggés, amelyből $t_2 = 15$ s időtartam adódik.

6.4. Feladat: (HN 8C-42) * Egy 8 kg tömegű test nyugalmi helyzetből indulva $F = At - Bt^2$ erő hatására gyorsul, ahol $A = 24 \text{ N/s}$ és $B = 1,2 \text{ N/s}^2$.

- (a) Határozzuk meg, hogy mekkora maximális sebességet ér el a tömeg mielőtt újra megállna!
 (b) Mennyi idő múlva következik ez be?

Megoldás:

- (a) A test impulzusváltozása

$$\Delta I = \int_0^t F(t) dt = \int_0^t (At - Bt^2) dt = \frac{1}{2} At^2 - \frac{1}{3} Bt^3. \quad (6.4.1)$$

Innen a sebesség

$$v(t) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{2} At^2 - \frac{1}{3} Bt^3 \right). \quad (6.4.2)$$

A sebesség maximuma akkor van, ha a gyorsulás zérus, azaz most

$$t = \frac{A}{B}. \quad (6.4.3)$$

A behelyettesítések után a maximális sebesség

$$v_{max} = \frac{1}{6m} \frac{A^3}{B^2} = 200 \text{ m/s}. \quad (6.4.4)$$

- (b) A maximális sebesség elérése $t = 20 \text{ s}$ idő múlva következik ez be.

6.5. Feladat: (HN 8C-43) * A 2,5 kg tömegű test nyugalmi helyzetből indulva $F = At^2$ erő hatására gyorsul, ahol $A = 0,75 \text{ N/s}^2$.

- (a) Határozzuk meg a test sebességét 15 másodperccel az erő alkalmazása után!
 (b) Mekkora állandó erővel lehetne elérni ezt a sebességet?

Megoldás:

- (a) A test gyorsulása

$$a = \frac{1}{m} At^2, \quad (6.5.1)$$

amellyel a sebesség

$$v(t) = \int_0^t a(t) dt = \int_0^t \frac{1}{m} At^2 dt = \frac{1}{m} \left[\frac{1}{3} At^3 \right]_0^{15} = 337,5 \text{ m/s}. \quad (6.5.2)$$

- (b) Ha az erő állandó, akkor

$$v = at = \frac{F}{m} t, \quad (6.5.3)$$

ahonnan az erő

$$F = \frac{mv}{t} = 56,25 \text{ N} \quad (6.5.4)$$

kell legyen ekkora sebesség eléréséhez.

6.6. Feladat: Egy $M = 80$ kg tömegű ember jégen egy helyben állva eldob vízszintes irányban egy $m = 20$ kg tömegű golyót. A golyó az embertől mérve $v_0 = 20$ m/s sebességgel távolodik. Mekkora az ember v_M sebessége a jéghez viszonyítva? (A jég és az ember közötti súrlódási erő elhanyagolhatóan kicsi.)

Megoldás: Jelölje v_m a golyó jéghez viszonyított sebességét. Az impulzus megmaradás miatt

$$Mv_M = mv_m. \quad (6.6.1)$$

A golyó és az ember relatív sebessége pedig

$$v_0 = v_m + v_M \quad (6.6.2)$$

A két egyenletből

$$v_M = \frac{m}{m+M} v_0 \quad (6.6.3)$$

Behelyettesítve a számértékeket $v_M = 4$ m/s adódik.

Rugalmatlan ütközések

6.7. Feladat: Az m tömegű v_0 sebességű test tökéletesen rugalmatlanul ütközik az M tömegű álló testtel. Mekkora lesz az ütközés utáni együttes sebességük? Mekkora átlagos erőhatás lép fel köztük, ha az ütközés ideje (a becsapódástól számítva az összeragadásig) t .

Megoldás: Az impulzus megmaradás miatt:

$$mv_0 = (m+M)v, \quad (6.7.1)$$

ahol v az összeragadt testek együttes sebessége. Az ütközés utáni együttes sebesség ezért

$$v = \frac{m}{m+M} v_0. \quad (6.7.2)$$

Az ütközés közben fellépő átlagos erőhatás pedig: $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$, ahol ΔP az m tömegű test impulzusimpulzusváltozása:

$$\Delta P = mv - mv_0 = \frac{m^2}{m+M} v_0 - mv_0 = -\frac{mM}{m+M} v_0. \quad (6.7.3)$$

A negatív előjel arra utal, hogy a m tömegű test impulzusa csökken. Az F erő nagysága így

$$F = -\frac{mM}{m+M} \frac{v_0}{t}. \quad (6.7.4)$$

Hasonló megfontolásokból az M tömegű testre

$$F = \frac{mM}{m+M} \frac{v_0}{t} \quad (6.7.5)$$

erő hat, amely eredmény pont azt mutatja, hogy a kölcsönható erők párosával lépnek fel: azonos nagyságúak és ellentétes irányúak.

6.8. Feladat: Vízszintes légpárnás sínen két kis test mozoghat súrlódásmentesen. A testek tömege $m_1 = 0,2$ kg és $m_2 = 0,3$ kg, sebessége $v_1 = 2$ m/s illetve $v_2 = 1,5$ m/s. Mekkora lesz a testek sebessége, ha tökéletesen rugalmatlanul ütköznek?

Megoldás: A rugalmatlan ütközés azt jelenti, hogy a két test együtt fog mozogni, ugyanazzal a sebességgel. Az impulzusmegmaradás miatt

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u, \quad (6.8.1)$$

ahol u a kialakuló közös sebesség. Innen

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 1,7 \text{ m/s}. \quad (6.8.2)$$

6.9. Feladat: Két azonos m tömegű test azonos nagyságú v_0 sebességgel halad, az egyik az y tengelyen, a másik az x tengelyen, mindkét esetben a pozitív irányban. Az origóban a testek tökéletesen rugalmatlanul ütköznek. Mekkora lesz az együttes sebességvektoruk és annak nagysága?

Megoldás: Az y tengelyen mozgó test impulzusvektora

$$\mathbf{p}_y = m(0; v_0), \quad (6.9.1)$$

az x tengelyen mozgó test impulzusvektora pedig

$$\mathbf{p}_x = m(v_0; 0). \quad (6.9.2)$$

Az ütközés utáni $2m$ tömegű együttes test impulzusa e két impulzusvektor összege, azaz

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_y + \mathbf{p}_x = m(v_0; v_0). \quad (6.9.3)$$

Az összeragadt test sebességvektora pedig

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{2m} = \left(\frac{v_0}{2}, \frac{v_0}{2} \right). \quad (6.9.4)$$

a sebesség nagysága:

$$V = |\mathbf{V}| = \frac{\sqrt{2}}{2} v_0. \quad (6.9.5)$$

6.10. Feladat: (HN 8A-4) Egy m tömegű v_0 sebességgel mozgó test vele egyenlő tömegű, eredetileg nyugalomban lévő testbe ütközik és összeragad vele. Határozzuk meg a kinetikus energia $(K - K_0)/K_0$ relatív megváltozását!

Megoldás: Az ütközés tökéletes rugalmatlan, így az impulzus megmarad, a kinetikus energia viszont nem. Az impusumegmaradás az

$$mv_0 = 2mv \quad (6.10.1)$$

egyenlettel fejezhető ki, amelyben v az összeragadt testek végső együttes sebessége. Innen

$$v = \frac{v_0}{2}. \quad (6.10.2)$$

A kezdeti K_0 kinetikus energia

$$K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (6.10.3)$$

A végső kinetikus energia pedig:

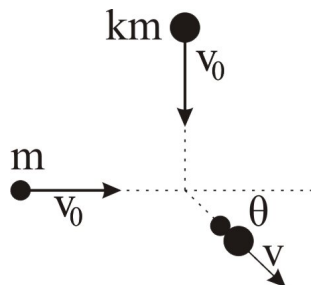
$$K = \frac{1}{2}2mv^2 = \frac{1}{4}mv_0^2. \quad (6.10.4)$$

A kinetikus energia $(K - K_0)/K_0$ relatív megváltozása:

$$\frac{K - K_0}{K_0} = -\frac{1}{2}. \quad (6.10.5)$$

A negatív előjel arra utal, hogy az ütközés mechanikai energiaveszteséggel jár.

6.11. Feladat: (HN 8B-11) Két, m illetve km (k állandó) tömegű test egyenlő v_0 sebességgel halad merőleges irányból a 29. ábrán látható módon közeledik egymáshoz, összeütközik, és összeragadva moognak együtt tovább. Fejezzük ki a végsebességük irányát meghatározó θ szöget a k segítségével!



29. ábra.

Megoldás: Az ütközés közben megmarad a testek lendülete az x és y irányban egyránt. Az összeragadt testek össz lendülete

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} mv_0 \\ kmv_0 \end{pmatrix}. \quad (6.11.1)$$

Az összeragadt testek össz lendületéből meghatározható azok sebességvektora is:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{m(1+k)} = \frac{v_0}{1+k} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}. \quad (6.11.2)$$

A 29. ábrán jelölt θ szög meghatározható a \mathbf{V} sebességvektor komponenseivel:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{V_y}{V_x} = k. \quad (6.11.3)$$

6.12. Feladat: (HN 8B-14) Két, m illetve km (k állandó) tömegű test egyenlő v_0 sebességgel halad a $+x$ és $-x$ irányban. Ütközésük után összeragadva haladnak tovább.

- (a) Határozzuk meg az adott paraméterek függvényében, hogy mekkora az összeragadt testek v sebességének nagysága és iránya?
 (b) Mekkora a v/v_0 arány, ha $k = 2$?

Megoldás:

(a) Az ütközés folyamatára érvényes a lendületmegmaradás törvénye:

$$mv_0 - kmv_0 = (1+k)v. \quad (6.12.1)$$

Az egyenlet bal oldala a részrendszerek ütközés előtti lendületeinek összegét írja le, míg a jobb oldal az összeragadt testek összlendületét jelöli. Az egyenletből meghatározható az összeragadt testek együttes sebessége:

$$v = \frac{1+k}{1-k}v_0. \quad (6.12.2)$$

Az eredményből látható, hogy $k > 1$ esetben az összeragadt testek $-x$ irányba haladnak, míg $k < 1$ esetben az ellenkező irányba.

(b) $k = 2$ esetben a sebességek aránya

$$\frac{v}{v_0} = -3. \quad (6.12.3)$$

6.13. Feladat: (HN 9B-7) Fából készült $M = 800$ g tömegű ballisztikus ingatestbe vízszintes irányból $m = 20$ g tömegű ólomsörétet lőttünk. A lengésbe jövő ingatest $h = 10$ cm magasba emelkedik.

(a) Mekkora v közös sebességgel indul az ingatest-sörét rendszer?

(b) Mekkora v_0 sebességgel csapódik az ingába a golyó? A sörét K kinetikus energiájának hányadrésze veszett el, azaz fordítódott a fa deformálására, ill. felmelegítésére?

Megoldás:

(a) Az összeragadt inga-sörét rendszer össz mozgási energiája teljes egészében átalakul helyzeti energiává miközben h magasságba emelkedik:

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = (m+M)gh, \quad (6.13.1)$$

mely egyenletből az együttes sebesség

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (6.13.2)$$

Behelyettesítve a számadatokat $v \approx 1,414$ m/s adódik.

(b) A golyó becsapódására az impulzus megmaradás tételét alkalmazhatjuk a sörétszemek sebességének meghatározására:

$$mv_0 = (m+M)v. \quad (6.13.3)$$

Az egyenlet segítségével meghatározhatjuk a sörétszemek sebességét:

$$v_0 = \frac{m+M}{m}v. \quad (6.13.4)$$

Behelyettesítve a számadatokat $v_0 \approx 57,98$ m/s adódik. A kezdeti kinetikus energia

$$K = E_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 \approx 33,62 \text{ J}, \quad (6.13.5)$$

míg az ütközés után

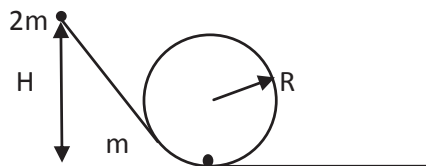
$$E_2 = \frac{1}{2}(m+M)v^2 \approx 0,82 \text{ J}. \quad (6.13.6)$$

A mechanikai energiának az ütközés során a

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{E_1 - E_2}{E_1} \approx 97,6\%. \quad (6.13.7)$$

része veszett el, illetve alakult át hőenergiává.

6.14. Feladat: Egy $2m$ tömegű test súrlódás mentesen csúszik le a hurokhoz illeszkedő lejtőn a 30. ábrának megfelelően. Mekkora H magasságból indítsuk a testet, hogy a tökéletesen rugalmatlan ütközés után a pálya alján lévő m tömegű test végighaladjon a hurkon?



30. ábra.

Megoldás: A test mozgását három szakaszra oszthatjuk:

(a) A $2m$ tömegű test lecsúszik a hurok aljára az ütközés előtti pillanatig. A $2m$ tömegű test H magasságból való lecsúszására a

$$2mgH = \frac{1}{2}2mv_0^2 \quad (6.14.1)$$

mechanikai energia-megmaradást kifejező egyenlet írható fel, amelyből az ütközés előtti sebesség

$$v_0 = \sqrt{2gH}. \quad (6.14.2)$$

(b) Ezután a $2m$ tömegű test rugalmatlanul ütközik az m tömegű testtel, majd összetapadva mozognak tovább. Az m tömegű testtel való tökéletesen rugalmatlan ütközésre az impulzus megmaradásának tételét alkalmazzuk

$$2mv_0 = 3mv_1, \quad (6.14.3)$$

ahonnan az ütközés utáni v_1 sebesség

$$v_1 = \frac{2}{3}v_0 = \frac{2}{3}\sqrt{2gH}. \quad (6.14.4)$$

(c) Végül az összetapadt $3m$ tömegű test feljut a hurok tetejére és éppen áthalad a tetőponton. A $2R$ magas hurok tetején az összeragadt $3m$ tömegű test v_2 sebessége az

$$\frac{1}{2}3mv_1^2 = \frac{1}{2}3mv_2^2 + 3mg \cdot 2R \quad (6.14.5)$$

egyenletből határozható meg. Innen a v_2 tetőponti sebesség

$$v_2 = \sqrt{\frac{8}{9}gH - 4gR}. \quad (6.14.6)$$

A tetőponton való áthaladáshoz szükséges minimális sebességet a test és a hurok között fellépő nyomási erő eltűnése határozza meg. Ekkor a testet csak a súlyerő tartja körpályán, azaz

$$3m \frac{v_2^2}{R} = 3mg. \quad (6.14.7)$$

Behelyettesítés után a minimális indítási magasság

$$H = \frac{45}{8}R. \quad (6.14.8)$$

Rugalmas ütközések

6.15. Feladat: Mutassa meg, hogy a kemény asztallapon pattogó m tömegű golyó hosszú idő átlagában mg erővel nyomja az asztallapot!

Megoldás: Ha a golyót h magasságból leejtjük, az $v = \sqrt{2gh}$ sebességgel csapódik be az asztallapba. Tökéletesen rugalmas ütközéskor a sebesség nagysága nem, csupán az iránya változik meg az ellenkezőjére. Ennek megfelelően a golyó impulzusváltozása

$$\Delta P = mv - (-mv) = 2mv = 2m\sqrt{2gh}. \quad (6.15.1)$$

Két ütközés között eltelt Δt idő (mely a mozgás során fellépő átlagos erőhatás kiszámolásához szükséges) kétszerese a szabadon eső test h magasságból történő esési idejének, azaz

$$\Delta t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (6.15.2)$$

Így az átlagos erő

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2m\sqrt{2gh}}{2\sqrt{\frac{2h}{g}}} = mg, \quad (6.15.3)$$

ami a feladat állításával megegyezik.

6.16. Feladat: Egy L oldalélű hasámban az oldallal párhuzamosan, v_0 sebességgel mozog egy m tömegű részecske.

- Mekkora átlagos erővel nyomja a részecske a szembenlévő falakat?
- Mekkora az átlagos nyomás, ha a mozgásra merőleges lapok felülete A ?
- Hogyan változik a megoldás, ha N részecske teszi ezt?

Megoldás:

(a) A részecske impulzusváltozása a fallal való ütközés során $\Delta P = 2mv_0$. Két egymást követő ütközés között eltelt idő pedig $\Delta t = \frac{2L}{v_0}$. Az ütközések során fellépő átlagos erő tehát

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{2mv_0}{\frac{2L}{v_0}} = \frac{mv_0^2}{L}. \quad (6.16.1)$$

(b) A falakon ébredő átlagos nyomás:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{mv_0^2}{LA}. \quad (6.16.2)$$

(c) N részecske esetén a falakat nyomó F_N erő, illetve p_N nyomás megsokszorozódnak:

$$F_N = N \frac{mv_0^2}{L}, \quad p_N = N \frac{mv_0^2}{LA}. \quad (6.16.3)$$

(Megjegyzés: Utóbbi eredmények szolgálnak a kinetikus gázelmélet alapjául!)

6.17. Feladat: Vízszintes légpárnás sínen két kis test mozoghat súrlódásmentesen. A testek tömege $m_1 = 0,2$ kg és $m_2 = 0,3$ kg, sebessége $v_1 = 2$ m/s illetve $v_2 = 1,5$ m/s. Mekkora lesz a testek sebessége, ha tökéletesen rugalmasan ütköznek?

Megoldás: A rugalmas ütközés azt jelenti, hogy a két test külön-külön fog mozogni u_1 illetve u_2 sebességgel. Az impulzusmegmaradás miatt

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (6.17.1)$$

A tökéletesen rugalmas fogalom pedig azt jelenti, hogy az ütközésben a kinetikus energia megmarad, azaz

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2. \quad (6.17.2)$$

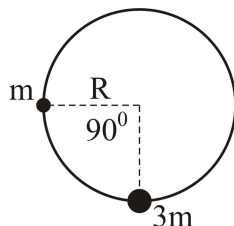
Az egyenletrendszert u_1 -re és u_2 -re megoldva

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 1,4 \text{ m/s} \quad (6.17.3)$$

és

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 1,9 \text{ m/s}. \quad (6.17.4)$$

adódik.



31. ábra.

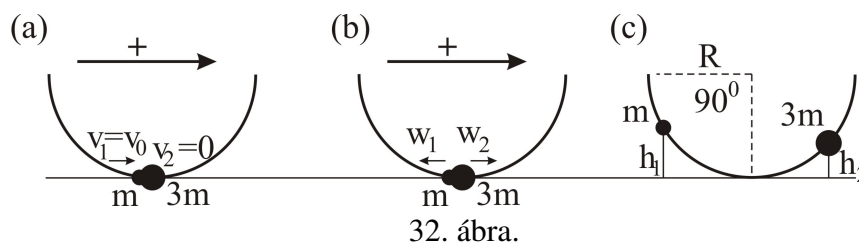
6.18. Feladat: (HN 9C-32) Függőleges síkú, R sugarú körré hajlított, merev huzalon a rá fűzött m tömegű gyöngy a 31. ábrán látható módon lecsúszik. A körpálya oldalsó pontjából nyugalomban lévő gyöngy pusztán a gravitáció hatására lecsúszik és rugalmasan ütközik a kör legmélyebb pontjában nyugalomban lévő $3m$ tömegű másik gyönggyel.

(a) Az R sugárral kifejezve határozzuk meg, hogy milyen magasra emelkednek a gyöngyök az ütközés után!

(b) Az ütközés után a gyöngyök súrlódámentesen folyamatosan tovább mozognak és újra rugalmasan ütköznek. Határozzuk meg, hogy mennyi a gyöngyök sebessége közvetlenül a második ütközés után!

Megoldás:

(a) A 32.(a) ábra az R magasságból lecsúszó v_0 sebességű és m tömegű gyöngy a $3m$ tömegű



32. ábra.

gyönggyel való ütközésének pillanatát mutatja. Az ütközés pillanatáig az R magasságból lecsúszó gyöngy potenciális energiája átalakul mozgási energiává:

$$mgR = \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (6.18.1)$$

Ezért az m tömegű gyöngy sebessége $v_0 = \sqrt{2gR}$. A rugalmas ütközés folyamatára az impulzus megmaradás mellett fennáll a mechanikai energia-megmaradása is. A 32.(a) és 32.(b) ábrákon bejelölt pozitív irányok alapján felírhatjuk az ütközés előtti és utáni lendületek mérlegét.

$$m_1v_1 - m_2v_2 = -m_1w_1 + m_2w_2. \quad (6.18.2)$$

A mechanikai energia-megmaradása pedig a

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1w_1^2 + \frac{1}{2}m_2w_2^2 \quad (6.18.3)$$

egyenlettel fejezhető ki. A (6.18.2) és (6.18.3) egyenletek egy általános, egyenes menti rugalmas ütközést írnak le. Esetünkben $m_1 = m$, $m_2 = 3m$, $v_1 = v_0$, $v_2 = 0$ és w_1 , valamint w_2 ismeretlen paraméterek. Átalakítva a (6.18.2) és (6.18.3) egyenleteket:

$$m_1(v_1 + w_1) = m_2(w_2 + v_2), \quad (6.18.4)$$

és

$$m_1(v_1^2 - w_1^2) = m_2(w_2^2 - v_2^2) \quad (6.18.5)$$

adódnak. Elosztva egymással a két egyenletet és felhasználva az $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ azonosságot

$$v_1 - w_1 = w_2 - v_2 \quad (6.18.6)$$

adódik. A (6.18.6) és (6.18.2) egyenletekből kiküszöbölve a w_2 sebességet,

$$w_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_1. \quad (6.18.7)$$

adódik. Analóg módon

$$w_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_2. \quad (6.18.8)$$

Esetünkben az ütközés utáni sebességek (lásd a 32.(b) ábrát) $w_1 = w_2 = \frac{v_0}{2}$ -nek adódnak. Mivel a gyöngyök sebessége az ütközés után azonos, a gyöngyök tömegüktől függetlenül ugyanolyan $h_1 = h_2 = h$ magasba emelkednek (lásd a 32.(c) ábrát). Az emelkedési magasságot a mechanikai energia-megmaradás segítségével számolhatjuk ki. Az m tömegű gyöngy esetében

$$mgh = \frac{1}{2}mw_1^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}mv_0^2 = \frac{1}{4}mgR. \quad (6.18.9)$$

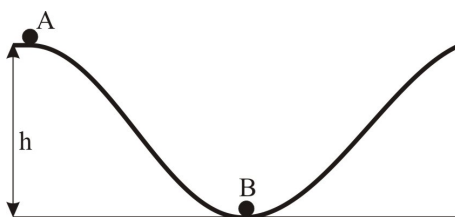
Az emelkedési magasság tehát $h = R/4$.

(b) A (6.18.7) és (6.18.8) egyenleteket felhasználhatjuk a második ütközés utáni sebességek meghatározásához is. Ebben az esetben a „beérkező” sebességek nagysága megegyezik az első ütközés utáni sebességek nagyságával. Behelyettesítve az értékeket, a második ütközés után $w_1 = v_0$ és $w_2 = 0$ adódik rendre az m és $3m$ tömegű gyöngyök sebességére. A sebességek nagysága pont akkora, mint amekkora sebességgel közvetlenül az első ütközés előtt találkoztak a gyöngyök. Ez az eredmény nem meglepő, hiszen a (6.18.2) és (6.18.3) egyenleteknek két független megoldása van, melyek mindegyike kielégíti a lendület és energia-megmaradás törvényit.

6.19. Feladat: A 33. ábrán látható súrlódásmentes pálya A pontjából elengedünk egy testet. Végigcsúszva a B pontban ütközik egy másik testtel.

(a) Mekkora v sebességgel ér az A pontból indított test a B pontban lévő testhez?

(b) Milyen magasra emelkedik a másik test, ha az ütközés tökéletesen rugalmas ($m_A = m_B/2$, $h = 1.8$ m)?



33. ábra.

Megoldás:

(a) A h m magasból kezdő sebesség nélkül induló, súrlódásmentesen lecsúszó test sebessége felhasználva az energia-megmaradás elvét $v = \sqrt{2gh} = 6$ m/s.

(b) A tökéletesen rugalmas ütközés esetében az

$$m_A v = m_A v_A + m_B v_B \quad (6.19.1)$$

impulzus-megmaradás mellett érvényes a mechanikai energia megmaradása is:

$$\frac{1}{2} m_A v^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2. \quad (6.19.2)$$

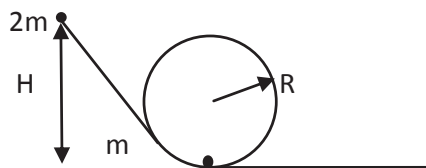
Az egyenletekben v_A és v_B az A illetve B testek ütközés utáni sebességét jelöli. Figyelembe véve, hogy $m_A = m_B/2$, e két egyenlettel a B test ütközés utáni sebessége:

$$v_B = \frac{2}{3} v = \frac{2}{3} \sqrt{2gh} = 4 \text{ m/s}. \quad (6.19.3)$$

A B test emelkedési magassága pedig

$$h_B = \frac{v_B^2}{2g} = 0,8 \text{ m}. \quad (6.19.4)$$

6.20. Feladat: Egy $2m$ tömegű test súrlódás mentesen csúszik le a hurokhoz illeszkedő lejtőn a 34. ábrának megfelelően. Mekkora H magasságból indítsuk a testet, hogy a tökéletesen rugalmas ütközés után a pálya alján lévő m tömegű test végighaladjon a hurkon? **Megoldás:**



34. ábra.

Általános ütközések

6.21. Feladat: $h_1 = 1,25$ m magasból $m = 1$ kg tömegű golyó a $\Delta t = 0,05$ s időtartamú kölcsönhatás után $h_2 = 80$ cm magasra pattan vissza. Mekkora átlagos erőt fejtett ki a talaj a golyóra ezen ütközés alatt?

Megoldás: A h_1 magasságból eső test

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} \quad (6.21.1)$$

sebességgel csapódik be, míg a h_2 magasságba feljutó test a talajról

$$v_2 = \sqrt{2gh_2} \quad (6.21.2)$$

sebességgel pattan vissza. Az ütközés alatt a teljes impulzusváltozás

$$\Delta P = mv_1 - (-mv_2). \quad (6.21.3)$$

A talaj és a golyó közt ébredő erő ezért

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2})}{\Delta t}. \quad (6.21.4)$$

Behelyettesítve a számadatokat $F = 180$ N adódik.

Folytonos közegek impulzusváltozása

6.22. Feladat: (HN 8A-33) A 600 l/perc hozamú és 20 m/s sebességű vízszintes irányú vízszög függőleges falba ütközik, s számottevő freccsenés nélkül szétterül rajta. Mekkora erőt fejt ki a vízszög a falra? (A víz sűrűsége 1000 kg/m^3 .)

Megoldás: Jelölések: $\eta = 600 \text{ l/perc} = 10 \text{ l/s} = 0.01 \text{ m}^3/\text{s}$, $v = 20 \text{ m/s}$ és $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. A falra Δt idő alatt

$$\Delta m = \eta \rho \Delta t \quad (6.22.1)$$

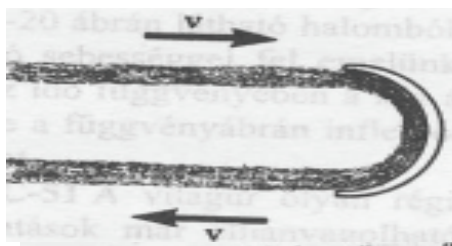
tömeg esik és áll meg. A beérkező víz teljes impulzusváltozása

$$\Delta P = v \Delta m = v \eta \rho \Delta t. \quad (6.22.2)$$

A falon ébredő erő

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = v \eta \rho = 200 \text{ N}. \quad (6.22.3)$$

6.23. Feladat: (HN 8A-34) Egy nyugvó turbinalapátba vízszöglet ütközik. A lapát a vízszöglet irányát az 35. ábrán látható módon megfordítja. A víz sebessége mind az ütközés előtt, mind



35. ábra.

az ütközés után v . Határozzuk meg a lapátra ható erőt, ha az időegységként becsapódó víz tömege μ !

Megoldás: Az időegységként becsapódó víz tömege

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t}. \quad (6.23.1)$$

A beérkező víz impulzusa $I_{\rightarrow} = mv$, a távozóé $I_{\leftarrow} = -mv$. Az impulzusváltozás:

$$\Delta I = 2mv, \quad (6.23.2)$$

amellyel az ébredő erő:

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\Delta 2mv}{\Delta t} = 2v \frac{\Delta m}{\Delta t} = 2\mu v. \quad (6.23.3)$$

6.24. Feladat: (HN 8A-40) Egy 3000 kg tömegű rakéta meghajtású űrhajó egy helyben lebeg a Hold felszíne felett, ahol a $g = 1,63 \text{ m/s}^2$. Mekkora sebességgel bocsátja ki a rakéta a hajtóanyagot, ha 2 kg/s sebességgel fogyasztja a fűtőanyagot?

Megoldás: A kezdeti lépésben tételezzük fel, hogy a t időpillanatban az m rakéta v sebességgel halad felfelé. Ekkor az impulzusa:

$$I_1 = mv \quad (6.24.1)$$

A $t + \Delta t$ időpillanatban a Δm kiáramlott gázzal kevesebb – azaz $m - \Delta m$ –, sebessége Δv -vel nő – azaz $v + \Delta v$. Ha kiáramló gáz sebessége a rakétához képest u – lefele irányban –, akkor a Δm kiáramlott gáz sebessége az álló megfigyelőhöz képest: $v - u$. A $t + \Delta t$ időpillanathoz tartozó impulzus:

$$I_2 = (m - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v - u). \quad (6.24.2)$$

A Δt alatti impulzusváltozás:

$$\Delta I = I_2 - I_1 = m\Delta v - u\Delta m. \quad (6.24.3)$$

Az m tömegű rakétára ható erő: $F = -mg$. Így az impulzus tétel értelmében:

$$F = -mg = \frac{\Delta I}{\Delta t} = I_2 - I_1 = m\frac{\Delta v}{\Delta t} - u\frac{\Delta m}{\Delta t}. \quad (6.24.4)$$

Felhasználva a feladat szövegét, hogy a rakéta áll, azaz $\frac{\Delta v}{\Delta t} = 0$, $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t}$, valamint a rakéta tömegének időbeli változását $m(t) = m_0 - \mu t$ (m_0 a kezdeti tömeg), felírható:

$$(m_0 - \mu t)g = \mu u(t), \quad (6.24.5)$$

amelyből

$$u(t) = \frac{m_0 - \mu t}{\mu} g = 1,63 \frac{3000 - 2t}{2}. \quad (6.24.6)$$

Világos, hogy egyre kisebb kiáramlási sebességre van szükség a csökkenő tömeg miatt. A $t = 0$ időpillanatban $u = 2445 \text{ m/s}$.

6.25. Feladat: (HN 8B-41) A 130000 kg tömegű rakéta függőlegesen helyezkedik el a kilövőálláson.

(a) Mekkora kell lennie a hajtóművek tolóerejének ahhoz, hogy a rakéta 17 m/s^2 gyorsulással induljon felfelé?

(b) Hány kg/s a hajtóanyag fogyasztás akkor, ha a hajtógáz rakétához viszonyított sebessége 2100 m/s ?

Megoldás: Jelölések: $m = 130000$ kg; $a = 17$ m/s² és $u = 2100$ m/s.

(a) Az indulás pillanatában

$$ma = F - mg \quad (6.25.1)$$

a rakéta mozgásegyenlete. Innen a tolóerő

$$F = m(a + g) = 3,51 \cdot 10^6 \text{ N}. \quad (6.25.2)$$

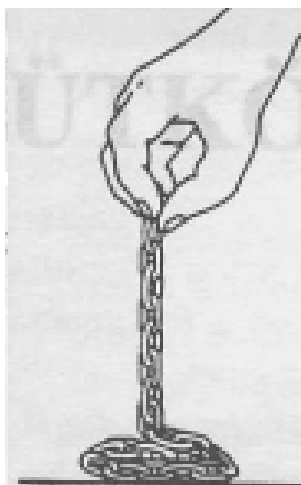
(b) Ez a tolóerő az u sebességgel kiáramló gáz következménye, azaz

$$F \Delta t = (\Delta m)u, \quad (6.25.3)$$

amelyből a hajtóanyag fogyasztás

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{F}{u} = 1671 \text{ kg/s}. \quad (6.25.4)$$

6.26. Feladat: (HN 8C-48) Egy függőlegesen lógó, m tömegű hajlékony l hosszúságú láncot állandó v sebességgel engedünk le az asztalra az 36. ábrán látható módon. Adjuk meg az idő függvényében, hogy mekkora erőt fejt ki a lánc az asztalra!



36. ábra.

Megoldás: A hosszegységenkénti tömeget jelölje $\lambda = \frac{m}{l}$; a t idő alatti süllyedés hossza $x = vt$. Így ennyi idő alatt $m(t) = \lambda x = \frac{m}{l}vt$ tömeg van az asztalon, amely

$$N_1 = \frac{m}{l}vtg \quad (6.26.1)$$

erővel nyomja az asztalt. Ez az ébredő erő egyik része. A másik rész ahhoz kötődik, hogy a v sebességű dx hossz megáll. Ennek a hosszának az impulzusváltozása:

$$\Delta I = \lambda dx v = \frac{m}{l} v \Delta t v = \frac{mv^2}{l} \Delta t. \quad (6.26.2)$$

A megállításból eredő másik rész

$$N_2 = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{mv^2}{l}. \quad (6.26.3)$$

Az összes erő tehát

$$N = \frac{m}{l} vtg + \frac{mv^2}{l}. \quad (6.26.4)$$

6.27. Feladat: (HN 9C-47) A Földhöz viszonyítva v sebességű és időegységenként μ tömeget szállító vízáram csapódik a turbinalapátra. Az ütközés hatására a turbinalapát egyenesvonalú mozgásba kezd, míg a vízáram $v/4$ sebességgel visszafelé halad a Földhöz képest.

(a) Mekkora sebességgel mozog a turbinalapát?

(b) Határozzuk meg v és μ függvényében, hogy mekkora erő hat a mozgó lapátra?

Megoldás:

(a) Az u sebességgel mozgó turbinalapáton fordul meg a vízáram. Figyelembe véve a relatív sebességeket fennáll, hogy

$$v - u = u + \frac{1}{4}v. \quad (6.27.1)$$

Innen a turbinalapát sebessége

$$u = \frac{3}{8}v. \quad (6.27.2)$$

(b) Ha m tömegű víz fordul meg, akkor annak impulzusváltozása

$$\Delta I = 2m(v - u) = \frac{5}{4}mv. \quad (6.27.3)$$

A Δt idő alatt a turbinalapátra beérkező tömeg

$$m = \mu \Delta t \frac{v - u}{v}, \quad (6.27.4)$$

amellyel az impulzusváltozás

$$\Delta I = \frac{25}{32} \mu v \Delta t. \quad (6.27.5)$$

Az ébredő erő

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{25}{32} \mu v. \quad (6.27.6)$$

7. Feladatok a gravitációs erő tárgyköréből. Kepler törvényei

Centrális erőtér. Potenciális energia

7.1. Feladat: (HN 16B-16) A "szinkron" műhold akkora sebességgel kering körpályán, hogy a földi megfigyelő számára nyugalomban lévőnek látszik.

- Magyarázzuk meg, miért csak az egyenlítő síkjában lévő pályán lehetséges az ilyen mozgás!
- Határozzuk meg a pálya sugarát a Föld középpontjától mérve!
- Határozzuk meg azt a legtávolabbi szélességi fokot, ahonnan ez a műhold a Földről még látható!

Megoldás: Jelölések: m a műhold tömege; M a Föld tömege; T a Föld forgásának periódus ideje; R a műhold távolsága a Föld középpontjától; R_F a Föld sugara.

(a) A körmozgás a Föld forgástengelye körül kell történjen, amelyhez kizárólag e tengelyre merőleges erő szükséges. A Föld a centruma felé vonzza a testeket. Az első feltétel csak akkor teljesül, ha a test az Egyenlítőn van.

(b) A műhold ún. geostacionárius pályán kering, azaz szögsebessége megegyezik a Föld forgáshoz tartozó $\omega = \frac{2\pi}{T}$ szögsebességgel. A keringő műhold mozgásegyenlete

$$mR\omega^2 = \gamma \frac{mM}{R^2}. \quad (7.1.1)$$

A szögsebesség behelyettesítése és az egyenlet átrendezése után az R sugár

$$R = \sqrt[3]{\frac{\gamma MT^2}{4\pi^2}} = 42170 \text{ km}. \quad (7.1.2)$$

(c) Az szélesség kör, ahonnan a műhold még látható

$$\cos \theta = \frac{R_F}{R} = 0,1511 \rightarrow \theta = 81,3^\circ. \quad (7.1.3)$$

7.2. Feladat: (HN 16B-31) Egy nem forgó gömb alakú bolygó tömege M , sugara R . A bolygó felszínéről radiális irányban egy részecskét lönek ki $\sqrt{\gamma M/(2R)}$ sebességgel. Számítsuk ki mekkora távolságra jut el a részecske a bolygó középpontjától?

Megoldás: A mechanikai energia megmaradás tételét kell alkalmazni – figyelembe véve, hogy az "eljutás" zérus pillanatnyi sebességet jelent –

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{R} = -\gamma \frac{mM}{R'}, \quad (7.2.1)$$

ahol R' a kérdéses távolság. A sebesség behelyettesítése után

$$R' = \frac{4}{3}R. \quad (7.2.2)$$

7.3. Feladat: (HN 16B-34) Jelölje M illetve R a Föld tömegét illetve sugarát.

(a) Mekkora az a minimális v_0 sebesség, amellyel az egyenlítőn függőlegesen kilőtt test a Föld felszínétől éppen két földugárnyi magasságig emelkedik? A Föld forgását és a légköri súrlódást ne vegyük figyelembe.

(b) A Föld forgását is számításba véve, növekszik, csökken vagy változatlan marad-e az a, kérdésre adott válasz számértéke?

Megoldás:

(a) A mechanikai energia megmaradásának tételét alkalmazva

$$-\gamma \frac{mM}{R} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\gamma \frac{mM}{3R} \quad (7.3.1)$$

egyenlet írható fel, amelyből a kért sebesség:

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\gamma M}{R}} = 9152 \text{ m/s}. \quad (7.3.2)$$

(b) A forgáshoz tartozó v_f sebesség érintő irányú (a kilövésre merőleges), amivel a kezdő sebesség négyzete: $v_0^2 + v_f^2$. Az impulzusmomentum megmaradása miatt $3R$ távolságban a érintő irányú sebesség a harmadára csökken: $v_f/3$. Így a fenti egyenlet

$$-\gamma \frac{mM}{R} + \frac{1}{2}m(v_0^2 + v_f^2) = -\gamma \frac{mM}{3R} + \frac{1}{2}m \left(\frac{v_f}{3}\right)^2 \quad (7.3.3)$$

alakú lesz. Belátható, hogy kisebb v_0 sebesség is elég a kívánt magasság eléréséhez.

7.4. Feladat: (HN 16B-36) A Föld felszínén egy testet emelünk.

(a) Határozzuk meg annak a munkának a nagyságát, amivel egy 100 kg tömegű hasznos terhet 1000 km-rel a Föld felszíne felé lehet juttatni!

(b) Határozzuk meg azt a többletmunkát, ami ezen a szinten a hasznos teher körpályára állításához szükséges!

Megoldás: Adatok: $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$; $m = 100 \text{ kg}$; $h = 1000 \text{ km}$. A Föld tömege:

$M = 6 \cdot 10^{24}$ kg; sugara: $R = 6,37 \cdot 10^6$ m.

(a) Az általunk végzett munka

$$W = \int_R^{R+h} \gamma \frac{mM}{r^2} dr = \left[\gamma \frac{mM}{r} \right]_R^{R+h} = \gamma \frac{mM}{R} - \gamma \frac{mM}{R+h} = 1,42 \cdot 10^8 \text{ J.} \quad (7.4.1)$$

(b) Az $R+h$ sugárnyi távolságban keringés feltétele, hogy az

$$\gamma \frac{mM}{(R+h)^2} = m \frac{v^2}{R+h} \quad (7.4.2)$$

fennálljon. E keringéshez tartozó többlet energia

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\gamma \frac{mM}{R+h} = 2,7 \cdot 10^9 \text{ J.}^* \quad (7.4.3)$$

* *Megjegyzés:* Tekintettel arra, hogy a Föld forog, és így a rakéta nem álló helyzetből indul, ennél kisebb energiára van szükség. Nem véletlen, hogy a kilövő állomásokat az Egyenlítőhöz közel egykezeknek telepíteni.

7.5. Feladat: (HN 16B-37) Mutassuk ki, hogy egy állandó sűrűségű bolygó felületéről a szökési sebesség a bolygó sugarával arányos!

Megoldás: A gömb alakú bolygó térfogata:

$$V = \frac{4R^3\pi}{3}, \quad (7.5.1)$$

tömege:

$$M = \rho \frac{4R^3\pi}{3}. \quad (7.5.2)$$

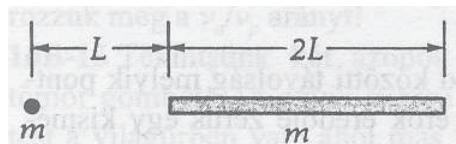
A szökéshez minimálisan szükséges kinetikus energia

$$\frac{1}{2}mv^2 = \gamma \frac{mM}{R} = \gamma \frac{m\rho \frac{4R^3\pi}{3}}{R} = \gamma m\rho \frac{4R^2\pi}{3}. \quad (7.5.3)$$

Egyszerűsítések után:

$$v = \sqrt{\frac{8}{3}\gamma\rho\pi R}, \quad (7.5.4)$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.



37. ábra.

7.6. Feladat: (HN 16C-47) * A 37. ábrán látható kicsiny test és vékony rúd mindegyikének tömege m . A pontszerű test a rúd vonalában fekszik. A test L távolságban van a $2L$ hosszúságú rúd végétől. Mekkora a kicsiny m tömegű testre ható gravitációs erő?

Megoldás: A rúd hosszegységnyi tömege $\lambda = \frac{m}{2L}$, így a dx hosszhoz tartozó dm tömeg

$$dm = \lambda dx. \quad (7.6.1)$$

Legyen a dm tömeg x távolságra az m tömegű testtől. A két test között ható erő nagysága

$$dF = \gamma \frac{m dm}{x^2}. \quad (7.6.2)$$

A teljes erő

$$F = \int_L^{3L} \gamma \frac{m \lambda dx}{x^2} = \gamma \frac{m^2}{2L} \left[-\frac{1}{x} \right]_L^{3L} = \gamma \frac{m^2}{3L^2}. \quad (7.6.3)$$

7.7. Feladat: (HN 16C-58) Egy ember a Föld felszínén guggoló helyzetből tömegközéppontját h magassággal tudja emelni. Számítsuk ki annak a legnagyobb (a Föld átlagsűrűségével azonos sűrűségű) kisbolygónak a sugarát, amelyről ez az ember ugyanilyen sebességgel felugorva elszökhetne, azaz elhagyhatná annak vonzáskörzetét.

Megoldás: A h magasságba ugró ember kezdősebessége

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (7.7.1)$$

A kisbolygó M tömege a ρ sűrűséggel és az R sugárral kifejezve

$$M = \rho \frac{4R^3 \pi}{3}. \quad (7.7.2)$$

A kisbolygón v sebességgel felugró emberre a mechanikai energia megmaradás tételét alkalmazzuk azzal az ismerettel, hogy a távolban a sebessége – így a kinetikus energiája – zérus, másrészt a távoli pontban zérus a potenciális energia. Felírhatjuk tehát, hogy

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{R} = 0, \quad (7.7.3)$$

amelybe a fenti tömeget behelyettesítve és az egyenletet a sugárra átrendezve kapjuk:

$$R = \sqrt{\frac{3gh}{4\pi\gamma\rho}}. \quad (7.7.4)$$

7.8. Feladat: * Az M tömegű R sugarú bolygó egyenletes ρ tömegsűrűségű.

- (a) Hogyan változik az m tömegű kicsiny testre ható erő a bolygó belsejébe való haladás során?
 (b) Hogyan változik a potenciális energia a bolygón belül?

Megoldás:

(a) Ha az m test a bolygó belsejében, annak középpontjától r távolságra van, akkor a gravitációs erőhatásba a bolygónak csak az r sugaron belüli része ad járulékot. Ezért először ezt a tömeget kell kiszámolni. A bolygó sűrűsége

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi}, \quad (7.8.1)$$

amelyből az r sugárhoz tartozó $M(r)$ tömeg

$$M(r) = \frac{M}{\frac{4}{3}R^3\pi} \frac{4}{3}r^3\pi = M \frac{r^3}{R^3}. \quad (7.8.2)$$

Mostmár alkalmazni tudjuk a gravitációs erőtvényt

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{mM(r)\mathbf{r}}{r^2} = -\gamma \frac{mM \frac{r^3}{R^3} \mathbf{r}}{r^2} = -\gamma mM \frac{r}{R^3} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (7.8.3)$$

azaz a középponttól való távolsággal lineárisan változik. (Az \mathbf{r}/r vektor a radiális egységvektor.)

- (b) A bolygó felszínén a potenciális energia végtelen távoli ponthoz képest

$$U_p(R) = -\gamma \frac{mM}{R}. \quad (7.8.4)$$

Ehhez az értékhez képest az r sugárnyi távolságnál

$$U_p(r) - U_p(R) = \int_R^r \gamma mM \frac{r}{R^3} dr = \left[\frac{1}{2} \gamma mM \frac{r^2}{R^3} \right]_R^r = \frac{1}{2} \gamma mM \frac{r^2}{R^3} - \frac{1}{2} \gamma mM \frac{1}{R}. \quad (7.8.5)$$

Így az a gravitációs potenciál az r pontban a végtelenhez képest

$$U_p(r) = -\gamma \frac{mM}{R} + \frac{1}{2} \gamma mM \frac{r^2}{R^3} - \frac{1}{2} \gamma \frac{mM}{R}. \quad (7.8.6)$$

Megjegyzés: Látható, hogy – talán nem meglepő módon – a bolygó közepén is véges a potenciális energia értéke

$$U_p(0) = -\frac{3}{2} \gamma \frac{mM}{R}. \quad (7.8.7)$$

7.9. Feladat: A *VIFIZ* nevű, $R = 40020$ km sugarú és $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg tömegű bolygó felszínétől R távolságban v_0 sebességgel keringő űrhajó pályájáról letér és a bolygó felszínébe csapódik. Mekkora a becsapódás sebessége? ($\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²)

Megoldás: Az űrhajó $2R$ sugarú keringésére érvényes, hogy

$$m \frac{v_0^2}{2R} = \gamma \frac{mM}{4R^2}, \quad (7.9.1)$$

ahonnan

$$v_0^2 = \gamma \frac{M}{2R}. \quad (7.9.2)$$

Másrészt érvényes a mechanikai energia megmaradás tétele, az a kezdeti kinetikai és potenciális energiák összege egyenlő a végső kinetikai és potenciális energiák összegével, azaz

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \gamma \frac{mM}{2R} = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{R}. \quad (7.9.3)$$

Ebből és a v_0 sebesség belyettesítéssel a becsapódási sebesség

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\gamma \frac{M}{R}} = \sqrt{\frac{5}{4}\gamma \frac{M}{R}} = 3535 \text{ m/s}. \quad (7.9.4)$$

Kepler törvényei

7.10. Feladat: M tömegű csillag körül m tömegű bolygó kering ellipszis pályán (– a csillag rögzítettnek tekinthető) a 38. ábra szerint. Az ellipszis fél nagytengelyét jelöljük " a "-val. A bolygó az $R_0 = R_A$ naptávolban (A) v_0 sebességgel halad.

- Mekkora a napközeli (B) távolság?
- Mekkora a bolygó sebessége?
- Mekkora munkát végzett a gravitációs erőtér?
- Ábrázolja grafikonon a potenciális energia értékeket (A, B)!

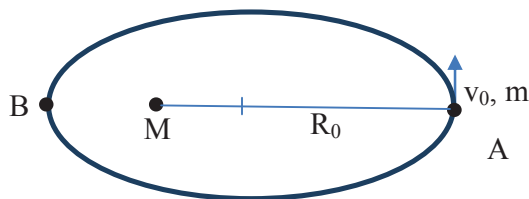
Megoldás:

(a) Az ellipsziszre nagytengelyére fennálló összefüggés

$$R_B + R_A = 2a, \quad (7.10.1)$$

ahol R_B a napközeli távolságot jelöli. Innen ez a távolság

$$R_B = 2a - R_A. \quad (7.10.2)$$



38. ábra.

(b) Centrális erőterről lévén szó, fennáll az impulzusmomentum megmaradás tétele, vagyis

$$mR_A v_0 = mR_B v_B, \quad (7.10.3)$$

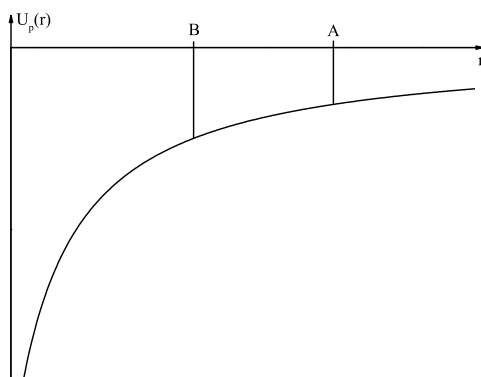
ahol v_B a B pontbeli (napközeli) sebességet jelöli. Innen

$$v_B = \frac{R_A v_0}{R_B} = \frac{R_A v_0}{2a - R_A}. \quad (7.10.4)$$

(c) Az erőter által végzett munka

$$W = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(\frac{R_A^2}{(2a - R_A)^2} - 1 \right) > 0. \quad (7.10.5)$$

(d) Az A és B pontokbeli potenciális energia értékeket a 39. ábra mutatja.



39. ábra.

8. Feladatok merev testek fizikájának tárgyköréből

Forgatónyomaték, impulzusmomentum, impulzusmomentum tétel

8.1. Feladat: (HN 10B-4) Egy $\mathbf{F} = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} + f_z\mathbf{k}$ ($f_x = 2\text{ N}$; $f_y = 3\text{ N}$; $f_z = 0\text{ N}$) erő hat egy testre. A test a z koordinátatengely mentén fekvő forgástengellyel van rögzítve. Az erő az $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ($x = 4\text{ m}$; $y = 5\text{ m}$; $z = 0\text{ m}$) pontban támad. Határozzuk meg a forgatónyomaték nagyságát és irányát!

Megoldás: A forgatónyomaték definíciója $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ szerint a

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = (yf_z - zf_y)\mathbf{i} + (zf_x - xf_z)\mathbf{j} + (xf_y - yf_x)\mathbf{k} \quad (8.1.1)$$

determináns kiszámolását kell elvégezzük. A számszerű adatok behelyettesítésével forgatónyomaték vektor

$$\mathbf{M} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad (8.1.2)$$

azaz a vektor nagysága 2 Nm , iránya a z tengely irányításával megegyezik.

8.2. Feladat: Egy "L" hosszúságú kötélen végén $0,2\text{ kg}$ tömegű test függőleges síkban körmozgást végez. A pálya csúcsán a kör középpontjára vett perdület fele akkora, mint a pálya alján, ahol a tömeg kinetikus energiája 4 J . Mekkora az "L"?

Megoldás: Jelölések: $m = 0,2\text{ kg}$, $E = 4\text{ J}$, valamint v_a az alsó, v_f a felső pontbeli sebességek. Mivel a pálya alsó pontján ismerjük a kinetikus energiát, így az

$$E = \frac{1}{2}mv_a^2 \quad (8.2.1)$$

összefüggésből az alsóponti sebesség

$$v_a = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{40}\text{ m/s} = 6,32\text{ m/s}. \quad (8.2.2)$$

Az impulzusmomentum $N = (L)mvL$ definíciójából következik, hogy a felső pontban úgy lehet a fele az alsó impulzusmomentumnak, ha a felső ponti sebesség

$$v_f = \frac{v_a}{2} = \sqrt{10}\text{ m/s} = 3,16\text{ m/s}. \quad (8.2.3)$$

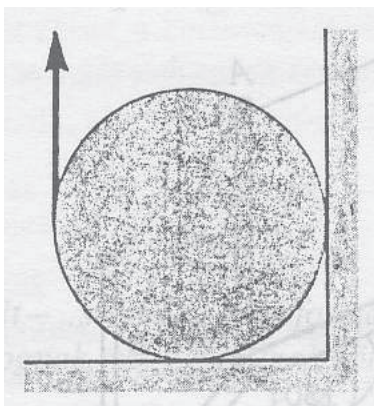
A két sebesség valamint az alsó és felső pontok magassága közötti kapcsolatot a mechanikai energia megmaradását kifejező összefüggéssel teremthetjük meg:

$$\frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + mg \cdot 2L. \quad (8.2.4)$$

Az alsó és felső pontok közötti távolság $2L$. A behelyettesítések után a kötélen hossza

$$L = 0,75\text{ m}. \quad (8.2.5)$$

8.3. Feladat: (HN 10C-48) A 40. ábra egy G súlyú homogén hengerre függőleges irányban ható F erőt mutat. A henger és a felületek közötti nyugalmi súrlódási együttható $\mu = 0,5$. Fejezzük ki a G függvényében azt a legnagyobb F erőt, amely még nem indítja meg a henger forgását!



40. ábra.

Megoldás: Jelölje N_1 a alsó érintkezési ponton felfele mutató támaszerőt, F_{s1} a balról jobbra mutató súrlódási erőt ugyanitt. Legyen N_2 a falnál jobbról balra mutató támaszerő, míg az itt ható felfele mutató súrlódási erő F_{s2} . E mennyiségek közötti kapcsolat

$$F_{s1} = \mu N_1 \quad (8.3.1)$$

és

$$F_{s2} = \mu N_2. \quad (8.3.2)$$

A henger akkor van egyensúlyban, ha a ható erők eredője és forgatónyomatéka zérus. Azaz előjel helyesen — pozitív az az erő, amely balról jobbra, illetve alulról felfele mutat — a függőleges irányban

$$0 = F - G + N_1 + F_{s2}, \quad (8.3.3)$$

a vízszintes irányban

$$0 = F_{s1} - N_2. \quad (8.3.4)$$

A forgatónyomatékra

$$0 = F_{s2}R + F_{s1}R - FR \quad (8.3.5)$$

A fenti öt egyenletből kell az F erőt kifejezni. A (8.3.1) és (8.3.2) súrlódási erők behelyettesítésével illetve az (8.3.5) egyenletben az R -rel való egyszerűsítés után kapjuk:

$$0 = F - G + N_1 + \mu N_2, \quad (8.3.6)$$

a vízszintes irányban

$$0 = \mu N_1 - N_2. \quad (8.3.7)$$

A forgatónyomatékra

$$0 = \mu N_2 + \mu N_1 - F \quad (8.3.8)$$

A (8.3.7) egyenletből N_2 -öt kifejezve és a (8.3.6) valamint a (8.3.8) egyenletekbe helyettesítve

$$0 = F - G + (1 + \mu^2)N_1 \quad (8.3.9)$$

és

$$0 = \mu(\mu + 1)N_1 - F \quad (8.3.10)$$

adódik. Az N_1 eliminálásával az F erő

$$F = \frac{\mu(\mu + 1)}{2\mu^2 + \mu + 1}G. \quad (8.3.11)$$

A $\mu = 0,5$ behelyettesítési értékkel az F erő maximális értéke

$$F = 0,375G. \quad (8.3.12)$$

8.4. Feladat: (HN 13B-7) Homogén tömör henger csúszás nélkül gördül le az α szög alatt hajló lejtőn. Bizonyítsuk be, hogy a csúszást gátló nyugalmi tapadási súrlódási együttható legkisebb értéke $\tan \alpha / 3$ kell, hogy legyen! (A henger tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{1}{2}mR^2$.)

Megoldás: A hengerre az mg súlyerő, az $N = mg \cos \alpha$ támaszerő és az F_s tapadási súrlódási erő hat. A mozgásegyenletek a haladó mozgásra

$$ma = mg \sin \alpha - F_s, \quad (8.4.1)$$

és a forgómozgásra

$$\theta \beta = F_s R. \quad (8.4.2)$$

A tiszta gördülés feltétele az

$$a = R\beta. \quad (8.4.3)$$

összefüggéssel fogalmazható meg. A három egyenletből az F_s erő alakja

$$F_s = \frac{mg \sin \alpha}{1 + \frac{mR^2}{\theta}}. \quad (8.4.4)$$

Figyelembe véve, hogy a tapadási erő maximális, ha

$$F_s = \mu mg \cos \alpha, \quad (8.4.5)$$

így ezt behelyettesítve a minimális μ tapadási együttható értékére — felhasználva a tehetetlenségi nyomaték kifejezését —

$$\mu = \frac{mg \sin \alpha}{(1 + \frac{mR^2}{\theta})mg \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{1 + \frac{mR^2}{\theta}} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{3}. \quad (8.4.6)$$

adódik. Q.E.D.

8.5. Feladat: Egy tömör hengert és egy vékony falú csövet egyszerre engedünk el egy adott hajlásszögű lejtő tetejéről. Mindkét tárgy tisztán gördül.

- Határozza meg a henger tömegközéppontjának gyorsulását!
- Határozza meg a cső tömegközéppontjának gyorsulását!
- Milyen messze gurul el a cső, míg a henger s_h utat tesz meg?

Megoldás: Jelölje α a lejtő hajlásszögét, θ_h a henger és θ_{cs} a cső tehetetlenségi nyomatékát, F_s a tapadási súrlódási erőt. Az m és R a gördülő test tömege és sugara. ($\theta_h = \frac{1}{2}mR^2$; $\theta_{cs} = mR^2$)

A lejtőn legördülő test mozgásegyenlete a haladómozgásra

$$ma = mg \sin \alpha - F_s, \quad (8.5.1)$$

és a forgómozgásra — θ a gördülő test tehetetlenségi nyomatéka —

$$\theta \beta = F_s R. \quad (8.5.2)$$

A tiszta gördülés feltétele az

$$a = R\beta. \quad (8.5.3)$$

összefüggéssel fogalmazható meg. E három egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{m}{m + \frac{\theta}{R^2}} g \sin \alpha. \quad (8.5.4)$$

(a) A henger gyorsulása

$$a_h = \frac{m}{m + \frac{\theta_h}{R^2}} g \sin \alpha = \frac{2}{3} g \sin \alpha. \quad (8.5.5)$$

(b) A cső gyorsulása

$$a_{cs} = \frac{m}{m + \frac{\theta_{cs}}{R^2}} g \sin \alpha = \frac{1}{2} g \sin \alpha. \quad (8.5.6)$$

(c) A henger az s_h utat

$$t = \sqrt{\frac{2s_h}{a_h}} \quad (8.5.7)$$

idő alatt teszi meg. Ezalatt a cső

$$s_{cs} = \frac{1}{2}a_{cs}t^2 = \frac{1}{2}a_{cs}\frac{2s_h}{a_h} = \frac{3}{4}s_h \quad (8.5.8)$$

utat tesz meg.

8.6. Feladat: Egy jójó külső R sugara tízszerese belső r sugarának. A jójó orsója körüli tehetlenségi nyomatéka jó közelítéssel $\theta = \frac{1}{2}mR^2$, ahol m a jójó teljes tömege. A fonál vége nem mozog.

- (a) Számítsa ki a jójó tömegközéppontjának gyorsulását!
 (b) Határozza meg a fonálban ébredő erőt!

Megoldás: Jelölés: a kötél erő K és $r = R/10$.

- (a) A jójó tömegközéppontja körüli forgásra vonatkozó mozgásegyenlet

$$\theta\beta = Kr, \quad (8.6.1)$$

azaz a kötél erő hozza létre a β szöggyorsulású forgást. A haladó mozgásra felírható, hogy

$$ma = mg - K. \quad (8.6.2)$$

A haladó és forgómozgás közötti kapcsolat (tisztá gördülés)

$$a = r\beta. \quad (8.6.3)$$

A három egyenletből a gyorsulás

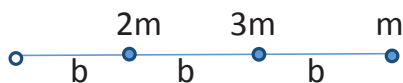
$$a = \frac{g}{\frac{1}{2}\frac{R^2}{r^2} + 1} = \frac{1}{51}g. \quad (8.6.4)$$

- (b) A kötél erő

$$K = \frac{50}{51}mg. \quad (8.6.5)$$

8.7. Feladat: Egy elhanyagolható tömegű merev rúdra három pontszerű testet erősítettek. Az egyik végén csapágyazott rúd függőleges síkban lenghet.

- (a) Mekkora a tehetlenségi nyomaték a csapágyra nézve?
 (b) Mekkora lesz az alsó test sebessége a rúd függőleges helyzetben való áthaladásakor, ha a 41. ábrán látható helyzetből kezdősebesség nélkül elengedjük?



41. ábra.

Megoldás:

(a) A felfüggesztési pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\theta = \sum_i m_i r_i^2 = 2mb^2 + 3m(2b)^2 + m(3b)^2 = 23mb^2. \quad (8.7.1)$$

(b) A testek helyzeti energiájának összes megváltozása:

$$\Delta E_h = 2mgb + 3mg \cdot 2b + mg \cdot 3b = 11mgb. \quad (8.7.2)$$

E helyzeti energiaváltozás alakul forgási energiává:

$$\Delta E_h = \frac{1}{2}\theta\omega^2, \quad (8.7.3)$$

amelyből behelyettesítés után a szögsebességre kapjuk:

$$\omega = \sqrt{\frac{22g}{23b}}. \quad (8.7.4)$$

Az m tömegű test sebessége az alsó pontban:

$$v = R\omega = 3b\omega = 3\sqrt{\frac{22gb}{23}}. \quad (8.7.5)$$

8.8. Feladat: Homogén tömör tárcsa sugara 6 cm, tömege 1,5 kg. Nyugalomból indul a motor által kifejtett 0,6 Nm forgatónyomaték hatására. Mennyi idő alatt éri el az 1200 1/perc fordulatszámot? ($\theta = \frac{1}{2}mr^2$)

Megoldás: Jelölések: $r = 6 \text{ cm} = 0,06 \text{ m}$, $m = 1,5 \text{ kg}$, $M = 0,6 \text{ Nm}$ és $f = 1200 \text{ 1/perc} = 20 \text{ 1/s}$. A forgómozgás alapegyenlete szerint

$$\theta\beta = M, \quad (8.8.1)$$

ahonnan a β szöggyorsulás

$$\beta = \frac{M}{\theta} = \frac{2M}{mr^2} = 222,2 \text{ 1/s}^2. \quad (8.8.2)$$

A szögsebesség és a fordulatszám közötti összefüggés

$$\omega = 2\pi f, \quad (8.8.3)$$

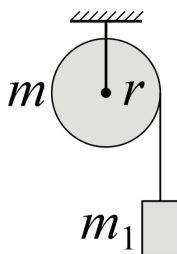
másrészt

$$\omega = \beta t. \quad (8.8.4)$$

A kérdéses fordulatszám eléréséhez szükséges idő

$$t = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = 0,565 \text{ s}. \quad (8.8.5)$$

8.9. Feladat: Egy tömör, homogén m tömegű és r sugarú henger a rögzített, vízszintes helyzetű tengelye körül szabadon foroghat. A henger palástjára vékony, nyújthatatlan fonalat tekerünk, amelynek egyik vége a henger palástjára van rögzítve, a másik végére pedig m_1 tömegű testet rögzítünk. A homogén henger tehetetlenségi nyomatéka $\theta = 1/2mr^2$.



42. ábra.

- (a) Mekkora szöggyorsulással mozog a henger, ha az m_1 testet elengedjük?
 (b) Mekkora lesz a henger szöggyorsulása, ha az m_1 tömegű test helyett egy $F = m_1g$ húzóerőt alkalmazunk?

Megoldás:

- (a) A kötélben ébredő erőt jelöljük K -val. Így az m_1 tömegű test mozgásegyenlete

$$m_1 a = m_1 g - K. \quad (8.9.1)$$

A K kötélerő nyomatékot gyakorol az m tömegű hengerre, így a forgómozgás egyenlete

$$\theta \beta = Kr. \quad (8.9.2)$$

Az a gyorsulás és a β szöggyorsulás között érvényes a tiszta gördülés feltétele

$$a = r\beta. \quad (8.9.3)$$

Az egyenletrendszer megoldása a szöggyorsulásra

$$\beta = \frac{m_1 g}{(m_1 + m/2)r}. \quad (8.9.4)$$

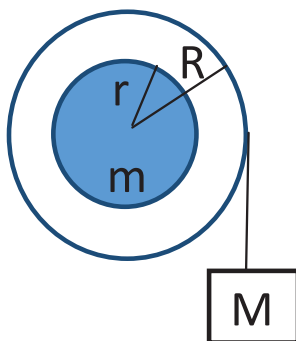
(b) Amennyiben $F = m_1 g$ húzóerőt alkalmazunk, úgy a szöggyorsulás közvetlenül kifejezhető a

$$\theta\beta = m_1 g r \quad (8.9.5)$$

egyenletből, azaz

$$\beta = \frac{2m_1 g}{mr}. \quad (8.9.6)$$

8.10. Feladat: Egy $r = 20$ cm "tehetetlenségi" sugarú, $m = 40$ kg tömegű kerék sugara $R = 30$ cm. Az R sugárhoz tartozó keréktömeget hanyagoljuk el.) Függőlegesen helyeztük egy vízszintes tengelyre. Egy $M = 2.0$ kg tömegű testet erősítettünk a szélére tekert kötéltre a 43. ábrának megfelelően. Határozza meg a kerék elengedés utáni kezdeti szöggyorsulását! (A kerékre: $\theta = mr^2$.)



43. ábra.

Megoldás: Jelölés: a kötelben ébredő erő K . A kerék forgómozgására felírhatjuk, hogy

$$\theta\beta = KR, \quad (8.10.1)$$

míg az m tömegű test haladó mozgására

$$Ma = Mg - K. \quad (8.10.2)$$

A tiszta gördülés feltétele, hogy

$$a = R\beta. \quad (8.10.3)$$

E három egyenletből a kiszámolt szöggyorsulás

$$\beta = \frac{MgR}{\theta + MR^2} = \frac{MgR}{mr^2 + MR^2} = 3,371/s^2. \quad (8.10.4)$$

8.11. Feladat: Egy lendkerék fordulatszáma 60 rad/s-ról 180 rad/s-ra növekedett a rajta történt 100 J munkavégzés következtében.

- (a) Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka?
 (b) Ezt követően egy 3-szor nagyobb tehetetlenségi nyomatékú álló kereket nyomunk a lendkerékhez. Mekkora lesz a kialakuló közös fordulatszám?

Megoldás: a, A végzett munka a kinetikus energiát változtatja meg, azaz

$$W = \frac{1}{2}\theta\omega_2^2 - \frac{1}{2}\theta\omega_1^2, \quad (8.11.1)$$

ahol ω_1 a kezdeti, ω_2 a végső szögsebesség, θ a tehetetlenségi nyomaték. Innen a tehetetlenségi nyomaték

$$\theta = \frac{2W}{\omega_2^2 - \omega_1^2} = 0,00694 \text{ kgm}^2. \quad (8.11.2)$$

b, Az impulzusmomentum megmaradása miatt

$$\theta\omega_2 = (\theta + 3\theta)\omega', \quad (8.11.3)$$

amelyből

$$\omega' = \frac{1}{4}\omega_2 = 45 \text{ rad/s}. \quad (8.11.4)$$

8.12. Feladat: Egy m tömegű, $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ tehetetlenségi nyomatékú kereket ω_0 szögsebességgel megforgatunk és zérus kezdősebességgel a μ súrlódási együtthatójú talajra engedjük.

- (a) Mennyi idő múlva fog tisztán gördülni a kerék?
 (b) Mekkora utat tesz meg eközben?

Megoldás:

(a) A kerék és a talaj között ébredő μmg súrlódási erő kezdi haladó (transzlációs) mozgásában gyorsítani a kereket, másrészt az súrlódási erő miatt ébredő forgatónyomaték fékezi forgó (rotációs) mozgásában. A kerék haladó mozgására érvényes dinamikai egyenlet

$$ma = \mu mg, \quad (8.12.1)$$

ahol a pozitív előjel a sebesség növekedését fejezi ki. Míg a forgómozgásra felírható egyenlet — a forgómozgás alapegyenlete — a

$$\theta\beta = M = -\mu mgR, \quad (8.12.2)$$

ahol a negatív előjel azt fejezi ki, hogy a súrlódási erő által létrehozott forgatónyomaték csökkenti a szögsebességet. Ezekből a kerék a gyorsulása és β szöggyorsulása

$$a = \mu g \quad (8.12.3)$$

és

$$\beta = -\frac{\mu mgR}{\theta}. \quad (8.12.4)$$

A $v(t)$ sebesség és az $\omega(t)$ szögsebesség egyszerűen

$$v(t) = \mu gt \quad (8.12.5)$$

és

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{\mu mgR}{\theta} t. \quad (8.12.6)$$

A tiszta gördülés feltétele, hogy az

$$v(t) = R\omega(t) \quad (8.12.7)$$

feltétel teljesüljön, azaz

$$\mu gt = R \left(\omega_0 - \frac{\mu mgR}{\theta} t \right). \quad (8.12.8)$$

A θ behelyettesítésével a kérteltelt idő

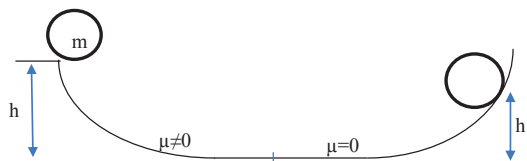
$$t = \frac{R\omega_0}{3\mu g}. \quad (8.12.9)$$

(b) Az eközben megtett út

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\mu g \frac{R^2\omega_0^2}{9\mu^2g^2} = \frac{1}{18} \frac{R^2\omega_0^2}{\mu g}. \quad (8.12.10)$$

8.13. Feladat: A 44. ábrán látható módon az m tömegű $\theta = \frac{1}{2}mR^2$ tehetetlenségi nyomatékú korongot egy lejtőn h magasságban elengedünk. A lejtő tapadási súrlódási együtthatója $\mu \neq 0$, ezért a korong itt tisztán gördül. A pálya második fele viszont súrlódásmentes.

- Mekkora sebessége és szögsebessége van a korongnak a lejtő alján?
- Milyen h' magasra megy fel a súrlódásmentes emelkedőn a korong?
- Mennyi a lejtő tetején a korong impulzus momentuma?



44. ábra.

Megoldás:

(a) A korong a lejtőn tisztán gördül, ezért sebesség és szögsebesség között fenn áll a $v = R\omega$. A mechanikai energia megmaradás tétele miatt:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2. \quad (8.13.1)$$

A két összefüggés segítségével kifejezhető a sebesség

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \quad (8.13.2)$$

és

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh}. \quad (8.13.3)$$

(b) A lejtő jobb oldala súrlódásmentes, ami azt jelenti, hogy a test a lejtőn felszalad h' és ott egy helyben forog ω szögsebességgel. Azaz translációs kinetikus energiája alakul csak át helyzeti energiává:

$$mgh' = \frac{1}{2}mv^2. \quad (8.13.4)$$

Innen az emelkedés magassága

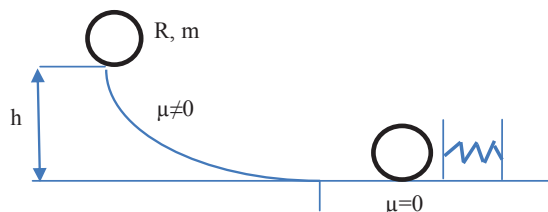
$$h' = \frac{2}{3}h. \quad (8.13.5)$$

(c) A lejtő tetején forgó korong az impulzusmomentuma:

$$N = \theta\omega = \frac{1}{2}mR^2 \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh} = mR\sqrt{\frac{gh}{3}}. \quad (8.13.6)$$

8.14. Feladat: Egy $R = 10$ cm sugarú, $m = 1$ kg tömegű tömör korong ($\theta = \frac{1}{2}mR^2$) tisztán legördül egy $h = 0,3$ m magasságú lejtős pályán. A lejtő alján nekiütközik a 45. ábrán látható fékezőrugónak, amelynek ütközője és a pálya ezen szakasza súrlódásmentes. A $k = 400$ N/m rugóállandójú rugó nyugalmi hossza $l_0 = 20$ cm.

- (a) Mekkora a korong sebessége és szögsebessége a lejtő alján?
- (b) Mekkora a korong impulzusmomentuma a rugó összenyomódása után?
- (c) Mennyivel nyomódott össze a rugó?



45. ábra.

Megoldás:

- (a) A korong a lejtőn tisztán gördül, ezért sebesség és szögsebesség között fenn áll a $v = R\omega$. A mechanikai energia megmaradás tétele miatt:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2. \quad (8.14.1)$$

A két összefüggés segítségével kifejezhető a sebesség

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = 2\text{m/s} \quad (8.14.2)$$

és

$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh} = 20\text{rad/s}. \quad (8.14.3)$$

- (b) A lejtő jobb oldala súrlódásmentes, ami azt jelenti, hogy a test a rugót összenyomja és ott egyhelyben forog ω szögsebességgel:

$$N = \theta\omega = \frac{1}{2}mR^2\frac{1}{R}\sqrt{\frac{4}{3}gh} = mR\sqrt{\frac{gh}{3}} = 0,1\text{ kg m}^2/\text{s}. \quad (8.14.4)$$

- (c) A fentiek szerint a translációs kinetikus energiája alakul csak át rugalmas energiává:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(l_0 - l)^2. \quad (8.14.5)$$

Innen az összenyomódás mértéke:

$$\Delta = l_0 - l = \sqrt{\frac{mv^2}{k}} = 0,1 \text{ m.} \quad (8.14.6)$$

8.15. Feladat: Egy R sugarú, m tömegű homogén tömegeloszlású nem forgó kereket tengelyre merőlegesen v_0 sebességgel meglökünk és a μ súrlódási együtthatójú talajra engedjük. A kerék tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{1}{2}mR^2$.

(a) Mennyi idő múlva fog tisztán gördülni a kerék?

(b) Mekkora utat tesz meg eközben?

Megoldás:

(a) A kereket a talajra engedve a v_0 sebességgel ellentétes $F_s = -\mu mg$ súrlódási erő hat, amely egyrészt csökkenti a sebességet, másrészt a kerék középpontjára forgatónyomatékot ad, amely a kereket forgásba hozza. A translációra vonatkozó mozgásegyenlet

$$ma = F_s = -\mu mg, \quad (8.15.1)$$

amelyből a gyorsulás

$$a = -\mu g. \quad (8.15.2)$$

Így a kerék sebessége a

$$v(t) = v_0 - \mu gt \quad (8.15.3)$$

függvény szerint változik. A forgómozgásra a forgómozgás alapegyenlete írható fel, amely — figyelembe véve a forgatónyomaték előjelét —

$$\theta\beta = \mu mgR. \quad (8.15.4)$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítésével, valamint az egyenlet rendezésével a szöggyorsulás

$$\beta = \frac{2\mu g}{R}. \quad (8.15.5)$$

A kerék szögsebessége az

$$\omega(t) = \frac{2\mu g}{R}t \quad (8.15.6)$$

függvény szerint változik. A tiszta gördülés feltétele, hogy a

$$v(t) = R\omega(t) \quad (8.15.7)$$

összefüggés teljesüljön, azaz a

$$v_0 - \mu gt = R \frac{2\mu g}{R}t \quad (8.15.8)$$

fennálljon. Ebből a tiszta gördülésig eltelt időt kifejezve kapjuk, hogy

$$t = \frac{v_0}{3\mu g}. \quad (8.15.9)$$

(b) A megtett út az

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (8.15.10)$$

négyzetes úttörvénybe helyettesítve

$$s = \frac{5}{18} \frac{v_0^2}{\mu g} \quad (8.15.11)$$

8.16. Feladat: Egy BMX versenyző sík talajon teker v_0 sebességgel. A bicikliváz és a biciklista együttes tömege M , a kerekek tömege egyenként m , sugaruk R . Tehetetlenségi nyomatékuk mR^2 . Vizsgáljuk a biciklista, a bicikliváz és a kerekek által alkotott rendszert!

- Mekkora a rendszer teljes mozgási energiája? A kerekek tisztán gördülnek.
- A versenyző abbahagyja a tekerést, és felgurul egy h magasságú, 45° -os hajlásszögű rámpán. Mekkora lesz a bicikli v_1 sebessége a rámpa tetején? (Feltételezzük, hogy adott v_0 kezdősebesség mellett a rendszer képes felgurulni a rámpa tetejéig.)
- A rámpa tetején a biciklista „ugratni” kezd, vagyis a rámpa tetejét elhagyva a rendszerre csak a nehézségi erő hat, a kerekek pedig szabadon forognak. Mekkora a rendszer tömegközéppontjának sebessége pályájának legfelső pontján? Mekkora lesz ott a kerekek szögsebessége?
- Mekkora lesz a rendszer mozgási energiája a pálya tetőpontján?

Megoldás:

8.17. Feladat: ** A m tömegű R sugarú homogén korongot forgástengelye körül ω_0 szögsebességgel megforgatunk, majd lapjával — a tengely merőleges a felületre — a sík asztalra helyezük. A korong és asztal között μ súrlódási tényező van. Feltételezve, hogy korong egyenletesen nyomja az asztalt, mennyi idő múlva áll meg a korong? (A korong tehetetlenségi nyomatéka $\theta = \frac{1}{2}mR^2$.)

Megoldás: A feladat megoldásának kulcsa az eredő forgatónyomaték kiszámolása. Vezessük be a felületi tömegsűrűséget, amely

$$\eta = \frac{m}{R^2\pi}. \quad (8.17.1)$$

A korongból tekintsünk egy r sugarú dr szélességű körgyűrűt. Ennek tömege

$$dm = \eta 2r\pi dr. \quad (8.17.2)$$

A körgyűrű érintője mentén ébredő dF_s súrlódási erő

$$dF_s = \mu dm g, \quad (8.17.3)$$

amely erő a körgyűrű középpontjára vonatkoztatva

$$dM = \mu dm gr = 2\pi\mu\eta gr^2 dr \quad (8.17.4)$$

forgatónyomatékok hoz létre. A korongra ható teljes forgatónyomaték

$$M = \int_0^R 2\pi\mu\eta gr^2 dr = \frac{2\pi}{3}\mu\eta gR^3 = \frac{2}{3}\mu mgR. \quad (8.17.5)$$

Felírva a forgómozgás alapegyenletét

$$\theta\beta = M = \frac{2}{3}\mu mgR \quad (8.17.6)$$

a szögsebesség kiszámolható:

$$\beta = \frac{4}{3} \frac{\mu g}{R}. \quad (8.17.7)$$

A megállásig eltelt idő

$$t = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{3}{4} \frac{\omega_0 R}{\mu g}. \quad (8.17.8)$$

Impulzusmomentum megmaradása

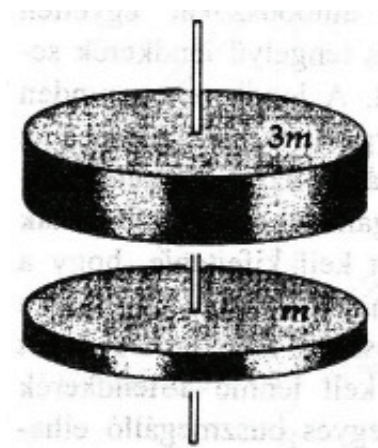
8.18. Feladat: (HN 12B-28) A 46. ábrán látható két tömör tárcsa sugara R , egyik tömeg m , a másiké $3m$. A bemutatott módon súrlódásmentes csapágyazással közös tengelyre vannak szerelve. A felső tárcsának ω_0 kezdő szögsebességet adunk, majd nagyon kis magasságból ráejtjük a kezdetben nyugalomban lévő alsó tárcsára. A tárcsák — a közöttük fellépő súrlódás hatására — végül közös ω szögsebességgel együtt forognak.

- A megadott mennyiségekkel fejezzük ki a végső ω szögsebességet, és
- a tárcsák egymáson való súrlódása közben végzett munkát!
- Mi lenne az egyenesvonalú analogonja ennek a forgási "ütközésnek"?

Megoldás:

(a) Külső forgatónyomatékok hiányában az impulzusmomentum megmaradás tételét alkalmazhatjuk. Kezdetben a $3m$ tömegű test forog ω_0 szögsebességgel. Az impulzusmomentum

$$N_1 = \theta_{3m}\omega_0 = \frac{1}{2}3mR^2\omega_0, \quad (8.18.1)$$



46. ábra.

ahol θ_{3m} a $3m$ tömegű test tehetetlenségi nyomatéka. Az összetapadás után együtt forog a két test, az együttes impulzusmomentum

$$N_2 = (\theta_m + \theta_{3m})\omega = \left(\frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}3mR^2\right)\omega, \quad (8.18.2)$$

ahol θ_m az m tömegű test tehetetlenségi nyomatéka. Mivel $N_1 = N_2$, így

$$\frac{1}{2}3mR^2\omega_0 = \left(\frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}3mR^2\right)\omega, \quad (8.18.3)$$

amelyből

$$\omega = \frac{3}{4}\omega_0. \quad (8.18.4)$$

(b) A kezdeti kinetikus energia

$$E_1 = \frac{1}{2}\theta_{3m}\omega_0^2 = \frac{1}{4}3mR^2\omega_0^2 = \frac{3}{4}mR^2\omega_0^2, \quad (8.18.5)$$

míg az összetapadás után

$$E_2 = \frac{1}{2}(\theta_m + \theta_{3m})\omega^2 = \frac{1}{4}4mR^2\omega^2 = \frac{9}{16}mR^2\omega_0^2. \quad (8.18.6)$$

A két energia különbsége, amennyi a belső energiát növeli:

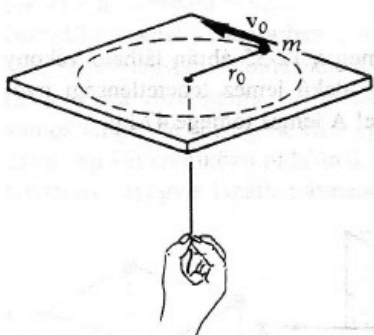
$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{3}{4}mR^2\omega_0^2 - \frac{9}{16}mR^2\omega_0^2 = \frac{3}{16}mR^2\omega_0^2. \quad (8.18.7)$$

(c) Az egyenesvonalú analogon: a $3m$ tömegű v_0 sebességű test ütközése a nyugvó m tömegű testtel. Ekkor a közös sebesség:

$$v = \frac{3}{4}v_0. \quad (8.18.8)$$

8.19. Feladat: (HN 12C-50) A 47. ábra egy r_0 sugarú körpályán v_0 sebességgel vízszintes súrlódásmentes felületen mozgó m tömegű testet mutat. A testre rögzített és kicsiny lyukon átvezetett fonál biztosítja a centripetális erőt. Most a fonalat lassan húzzuk úgy, hogy a test az $r_0/2$ sugarú körpályára kerüljön. Számítsuk ki az m , az r_0 és v_0 függvényében

- a test végső sebességét és
- a fonál új helyzetbe húzása során végzett munkát!
- Mutassuk meg, hogy a végzett munka egyenlő a test kinetikus energiájának megváltozásával!



47. ábra.

Megoldás:

(a) Mivel jelen esetben a mozgás során mindvégig a kötélerő sugárirányú, azaz centrális, így az impulzusmomentum megmaradásának tétele alkalmazható

$$mv_0r_0 = mv\frac{r_0}{2}. \quad (8.19.1)$$

Ebből a test végső sebessége

$$v = 2v_0. \quad (8.19.2)$$

(b) A munka kiszámolásához először a K kötélerőt egy közbenső r sugarú pályára kell megadni. Ehhez egyrészt újra alkalmazni kell az impulzusmomentum megmaradásának tételét

$$mv_0r_0 = mvr, \quad (8.19.3)$$

másrészt fel kell írni a körpályán való mozgásra a

$$K = m\frac{v^2}{r} \quad (8.19.4)$$

mozgásegyenletet. E kettőből az origó felé mutató K kötél erő

$$K = m \frac{v_0^2 r_0^2}{r^3}. \quad (8.19.5)$$

A végzett munka — figyelembe véve az erő és a radiális egységvektor ellentétes irányát —

$$W = - \int_{r_0}^{r_0/2} m \frac{v_0^2 r_0^2}{r^3} dr = \frac{1}{2} m v_0^2 r_0^2 \left[\frac{1}{r^2} \right]_{r_0}^{r_0/2} = \frac{3}{2} m v_0^2. \quad (8.19.6)$$

(c) A kinetikus energia megváltozása

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m (2v_0)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{3}{2} m v_0^2 = W, \quad (8.19.7)$$

ahogy annak lennie is kell.

Forgási energia

8.20. Feladat: Az L hosszúságú m tömegű rúd függőlegesen áll, az alsó pontja súrlódásmentes csapággal csatlakozik a talajhoz. Az egyensúlyi helyzetből kimozdul és a talajba csapódik. Mekkora a rúd szögsebessége a becsapódás pillanatában? A rúd tehetetlenségi nyomatéka a rúd végére vonatkoztatva $\theta = \frac{1}{3} m L^2$.

Megoldás: A talajszintet választva a potenciális energia zérus pontjának a rúd — a rúd tömegközéppontjának — potenciális energiája álló helyzetben

$$E_{p1} = m g \frac{L}{2}, \quad (8.20.1)$$

míg a fekvő helyzetben

$$E_{p2} = 0. \quad (8.20.2)$$

A kezdeti kinetikus energia

$$E_{k1} = 0, \quad (8.20.3)$$

míg a végső kinetikus energia a forgásból származó

$$E_{k2} = \frac{1}{2} \theta \omega^2. \quad (8.20.4)$$

A mechanikai energiamegmaradás tételét alkalmazva ($E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$) kapjuk, hogy

$$m g \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \theta \omega^2. \quad (8.20.5)$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítése és az egyenlet rendezése után a szögsebességre

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} \quad (8.20.6)$$

adódik.

8.21. Feladat: * Az L szárhosszúságú, száranként m tömegű létra egyik lába a falnál áll, míg a másik lába súrlódásmentesen csúszhat a vízszintes talajon. A kezdetben 2α szögbe szétnyitott létra szára csúszik, és a létra teljesen szétnyílván a talajba csapódik. Mekkora a létra szárainak szögsebessége a becsapódás pillanatában? (A rúd végpontjára vett tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{3}mL^2$.)

Megoldás: A létra a becsapódás pillanatában csak forgómozgást végez. Ez belátható, ha végiggondoljuk a következőt. Ha a létra csúcsa — a két szár találkozási pontja — v_x sebességgel halad, akkor csúszó talppont sebessége $2v_x$. A csúcspont a becsapódás pillanatában csak függőleges mozgást végez ($v_x = 0$), így a csúszó talppont sebessége ugyancsak zérus. Azaz a létra egyetlen pontja sem végez haladó mozgást. A kezdeti helyzeti energia alakul át forgási energiává:

$$2mg \frac{L}{2} \cos \alpha = 2 \frac{1}{2} \theta \omega^2. \quad (8.21.1)$$

Egyszerűsítés és átrendezés után mindkét rúd szögsebessége

$$\omega \sqrt{\frac{3g}{L}}. \quad (8.21.2)$$

8.22. Feladat: * A h magasságú toronyugró a palló szélén áll és összegörnyedés nélkül — merev rúdként — a vízbe fordul. (A lába a pallón nem csúszik meg a dőlés során.) Mekkora szögnél válik el a pallótól?

Megoldás: Jelölje α azt a függőlegessel bezárt szöveget, amelynél éppen elvélük a pallótól a toronyugró lába. Első lépésként számítsuk ki mekkora ebben a pillanatban a szögsebessége. A palló szintjét tekintve a potenciális energia zérus pontjának a kezdeti helyzeti energia

$$E_{p1} = mg \frac{L}{2}, \quad (8.22.1)$$

míg a dőlt helyzetben

$$E_{p2} = mg \frac{L}{2} \cos \alpha. \quad (8.22.2)$$

A kezdeti kinetikus energia

$$E_{k1} = 0, \quad (8.22.3)$$

míg az elválás pillanatához tartozó forgásból származó kinetikus energia

$$E_{k2} = \frac{1}{2}\theta\omega^2. \quad (8.22.4)$$

A mechanikai energiamegmaradás tételét alkalmazva ($E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$) kapjuk, hogy

$$mg\frac{L}{2} = mg\frac{L}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\theta\omega^2. \quad (8.22.5)$$

A tehetetlenségi nyomaték behelyettesítése és az egyenlet rendezése után a szögsebességre azt kapjuk, hogy

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1 - \cos\alpha)}. \quad (8.22.6)$$

A rúd tömegközéppontjának sebessége

$$v = \frac{L}{2}\omega = \sqrt{\frac{3}{4}gL(1 - \cos\alpha)}. \quad (8.22.7)$$

Az elválás pillanatában — egyetlen erőként — az mg súlyerő rúdirányú (radiális) komponense hat és tartja körpályán a rúd tömegközéppontját, azaz

$$m\frac{v^2}{(\frac{L}{2})} = mg\cos\alpha. \quad (8.22.8)$$

A sebesség behelyettesítése és az egyszerűsítések után

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} \quad (8.22.9)$$

adódik, amelyből az elválás pillanatához tartozó szög $\alpha = 53,1^\circ$.

9. Feladatok a rezgőmozgás és a mechanikai hullámok tárgyköréből

Harmonikus rezgőmozgás

9.1. Feladat: (HN 15A-1) 20 g tömegű részecske harmonikus rezgőmozgást végez 3 rezgés/másodperc frekvenciával és 5 cm amplitúdóval.

- Mekkora teljes távolságot fut be a részecske egy teljes periódus folyamán?
- Mekkora a legnagyobb sebessége? Hol lép ez fel?

(c) Határozzuk meg a részecske legnagyobb gyorsulását! Hol lép fel a mozgás során a legnagyobb gyorsulás?

Megoldás: Jelölések: $m = 20 \text{ g} = 0,02 \text{ kg}$, $f = 3 \text{ 1/s}$ és $A = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$. A rezgés körfrekvenciája $\omega = 2\pi f = 18,85 \text{ 1/s}$.

(a) Egy teljes periódus alatt 4-szer futja be az amplitúdónyi kitérést, így a megtett út

$$s = 4A = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}. \quad (9.1.1)$$

(b) A sebesség maximális értéke

$$v_{max} = A\omega = 0,94 \text{ m/s}. \quad (9.1.2)$$

Ezt az egyensúlyi helyzetben való áthaladáskor éri el a részecske.

(c) A gyorsulás maximális értéke

$$a_{max} = A\omega^2 = 17,77 \text{ m/s}^2. \quad (9.1.3)$$

Ezt a maximális kitérésű helyeken való áthaladáskor éri el a részecske.

9.2. Feladat: Pontszerűnek tekinthető 1 kg tömegű testre $F = -Dx$ alakú rugalmas erő hat. A rugóállandó $D = 0,25 \text{ N/cm}$. A $t = 0$ pillanatban a kitérés 20 cm , a sebesség $2,83 \text{ m/s}$. Mekkora a rezgés amplitúdója?

Megoldás: Jelölések: $m = 1 \text{ kg}$, a $t = 0$ pillanathoz tartozó kitérés és sebesség értékek $y_0 = 20 \text{ cm}$ és $v_0 = 2,83 \text{ m/s}$.

A rezgés körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 5 \text{ 1/s}. \quad (9.2.1)$$

A rezgés kitérése és sebessége

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (9.2.2)$$

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi), \quad (9.2.3)$$

ahol A az amplitúdó és φ a kezdőfázis. A $t = 0$ pillanatra

$$y_0 = A \sin \varphi, \quad (9.2.4)$$

$$v_0 = A\omega \cos \varphi. \quad (9.2.5)$$

E két egyenletből behelyettesítés után az amplitúdó

$$A = \frac{\sqrt{y_0^2 \omega^2 + v_0^2}}{\omega} = 0,6 \text{ m}. \quad (9.2.6)$$

9.3. Feladat: A 4 N/m rugóállandójú rugóra egy 0,8 kg tömegű testet függesztünk. Nyugalmi helyzetéből 12 cm-t kitérítjük és itt 0,4 m/s kezdősebességgel indítva harmonikus rezgőmozgásba hozzuk. Mészbe merítve megáll a test. Mekkora a súrlódás által disszipált mechanikai energia?

Megoldás: Jelölések: $k = 4 \text{ N/m}$, $m = 0,8 \text{ kg}$, $x = 12 \text{ cm} = 0,12 \text{ m}$ és $v = 0,4 \text{ m/s}$.

A mozgás kezdetén a teljes mechanika energia a rugalmas energiából és a mozgási energiából áll

$$E_{\text{mech}} = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2 = 0,0928 \text{ J}. \quad (9.3.1)$$

Mivel a test megáll és a kitérése zérus lesz, így éppen ennyi a súrlódás következtében disszipált ("szétszórt") mechanikai energia.

9.4. Feladat: Mutassa meg, hogy a $F = -kx$ rugalmas erejű rugóra akasztott m tömegű test g homogén nehézségi erőterében harmonikus rezgőmozgást végez!

Megoldás: Fordítsuk lefelé az y tengely irányítását. Tegyük a rugó végére a testet és engedjük megnyúlni y hosszal, amíg el nem éri az egyensúlyi (gyorsulásmentes) helyzetét. Ekkor érvényes, hogy

$$0 = mg - ky. \quad (9.4.1)$$

Ezt követően húzzuk lejjebb további x távolsággal, aminek következtében, ha elengedjük, a test gyorsulni fog. Az erre a helyzetre felírható mozgásegyenlet

$$ma = mg - k(x+y). \quad (9.4.2)$$

Figyelembe az ezt megelőző egyenletet végül az

$$ma = -kx \quad (9.4.3)$$

egyenletre jutunk, amely éppen a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete.

Megjegyzés: A megoldásból az is kiolvasható, hogy egyrészt a rezgés az egyensúlyi helyzet körül jön létre, másrészt a homogén nehézségi erőter jelenléte ellenére a mozgás harmonikus.

9.5. Feladat: Egy harmonikus rezgőmozgást végző test legnagyobb gyorsulása 8π m/s², legnagyobb sebessége 1,6 m/s.

- (a) Határozza meg a rezgésidőt és az amplitúdót!
 (b) Mennyi a rezgés összenergiája?

Megoldás:

- (a) A maximális gyorsulás illetve sebesség

$$a_{max} = A\omega^2 \quad (9.5.1)$$

illetve

$$v_{max} = A\omega, \quad (9.5.2)$$

ahol A az amplitúdó, ω a körfrekvencia. E két egyenletből

$$\omega = \frac{a_{max}}{v_{max}} = \frac{8\pi}{1,6} = 15,7 \text{ rad/s} \quad (9.5.3)$$

és

$$A = \frac{v_{max}^2}{a_{max}} = \frac{2,56}{8\pi} \sim 0,1 \text{ m}. \quad (9.5.4)$$

A rezgésidő

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \sim 0,4 \text{ s}. \quad (9.5.5)$$

- (b) Jelölje m a tömeget kg-ban. A rezgés teljes energiája

$$E = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = 1,28m \text{ J}. \quad (9.5.6)$$

Megjegyzés: Látható, hogy a kinematikai adatok önmagukban nem elegendőek a dinamikai mennyiségek meghatározásához!

9.6. Feladat: Két, azonos amplitúdójú rezgés, melyek frekvenciája $\nu_1 = 40$ Hz és $\nu_2 = 60$ Hz, egyszerre kezdi meg rezgését az egyensúlyi helyzetből. Mikor lesz legelőször ismét azonos a kitérésük?

Megoldás: A rezgések kitérését az $y(t) = A \sin 2\pi\nu_1 t$ illetve $y(t) = A \sin 2\pi\nu_2 t$ alakba írjuk fel. Az első találkozási idő a kettő egyenlőségéből számolható

$$A \sin 2\pi\nu_1 t = A \sin 2\pi\nu_2 t. \quad (9.6.1)$$

Az egyenletet átrendezve és a szögek szinusza különbségére vonatkozó összefüggést alkalmazva

$$0 = \sin 2\pi\nu_2 t - \sin 2\pi\nu_1 t = 2 \cos \frac{2\pi\nu_2 + 2\pi\nu_1}{2} t \sin \frac{2\pi\nu_2 - 2\pi\nu_1}{2} t \quad (9.6.2)$$

írható. Leghamarabb akkor teljesül az egyenlőség, ha

$$\cos \frac{2\pi\nu_2 + 2\pi\nu_1}{2} t = 0, \quad (9.6.3)$$

azaz

$$\frac{2\pi\nu_2 + 2\pi\nu_1}{2} t = \frac{\pi}{2}. \quad (9.6.4)$$

Innen az első találkozás időpontja

$$t = \frac{1}{2(\nu_2 + \nu_1)} = 0,005\text{s}. \quad (9.6.5)$$

9.7. Feladat: (HN 15A-19) Határozzuk meg a 2,3 m hosszú fonálinga

- (a) frekvenciáját és
- (b) lengésidőjét a Hold felszínén, ahol a gravitációtól származó nehézségi gyorsulás $1,67 \text{ m/s}^2$.

Megoldás:

(a) A kitérített inga pályagörcbéje kör. A g nehézségi gyorsulású erőterben α szöggel kitérített l hosszúságú fonálingán az m tömegű testet a testre ható gravitációs erőnek a pályagörbe érintője irányába eső erőkomponense fogja az egyensúlyi irányba mozgatni. A mozgásegyenlet

$$ma_t = -mg \sin \alpha, \quad (9.7.1)$$

ahol a tangenciális (érintő irányú) gyorsulás, a negatív előjel pedig arra utal, hogy a növekvő szögekkel ellentétes irányú az erőkomponens. A tangenciális gyorsulás

$$a_t = l\beta = l\ddot{\alpha}, \quad (9.7.2)$$

ahol $\beta = \ddot{\alpha}$ a szöggyorsulás. Így az

$$l\ddot{\alpha} = -g \sin \alpha, \quad (9.7.3)$$

differenciál egyenlet kapható. Ez az egyenlet kis szögekre – ha $\alpha \ll 5^\circ$, akkor $\sin \alpha \sim \alpha$ – a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenletébe megy át, azaz

$$l\ddot{\alpha} = -g\alpha. \quad (9.7.4)$$

Innen az inga körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (9.7.5)$$

A frekvencia

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = 0,135 \text{ 1/s.} \quad (9.7.6)$$

(b) A periódusidő

$$T = \frac{1}{f} = 7,4 \text{ s.} \quad (9.7.7)$$

9.8. Feladat: A földi Egyenlítőn egy zárt épületben egy fonálinga segítségével hogyan állapítanánk meg, hogy a Hold felettünk vagy a Föld túlsó oldalán van?

Megoldás: Ha a Hold a Föld túlsó oldalán van, akkor a Holdtól származó vonzó kölcsönhatás hozzáadódva a Földéhez a g nehézségi gyorsulásnál nagyobb g' értékkel kell számolni. Így a kialakuló rezgés ω' körfrekvenciája nagyobb mint az az ω , amely csak a Föld hatását veszi figyelembe:

$$\omega' = \sqrt{\frac{g'}{l}} > \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (9.8.1)$$

Ennek megfelelően a periódusidőkre az áll fenn, hogy $T' < T$.

9.9. Feladat: (HN 15A-20) Egy világítótorny látogatója meg akarja mérni a torony magasságát. Van nála egy orsó cérna, erre kis kavicsot köt, és a torony spirál-lépcsőházának közepén – mint fonálingát – lelógatja. A lengésidő 9,4 s. Milyen magas a torony?

Megoldás: A fonálinga ω körfrekvenciája az l fonálhosszal és a g nehézségi gyorsulással

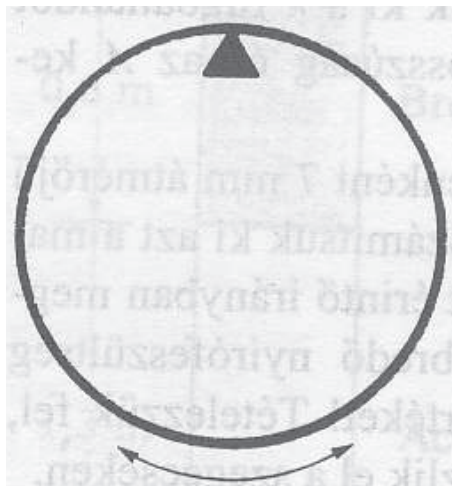
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (9.9.1)$$

A T periódusidő

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (9.9.2)$$

Innen az inga hossza, ami most a torony h magassága is egyben

$$h = l = \frac{T^2}{4\pi^2} g = 22,38 \text{ m.} \quad (9.9.3)$$



48. ábra.

9.10. Feladat: (HN 15B-26) Vékony, 20 cm sugarú karikát vízszintesen álló késélre helyezünk a 48. ábra szerint úgy, hogy fizikai ingaként a karika síkjában leng.

- (a) Határozzuk meg kis amplitúdójú lengéseinek periódusidejét.
 (b) Mekkora annak a fonálingának a hossza, amelynek azonos a lengésideje?

Megoldás: Jelölés: $R = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$; m a karika tömege, $\theta_0 = mR^2$ a szimmetria tengelyére vett tehetetlenségi nyomatéka; φ a kitérés szöge a függőlegeshez viszonyítva.

(a) A kés élén felfüggesztett inga karja – felfüggesztés és tömegközéppont távolsága – az R sugár, a felfüggesztésre vett θ tehetetlenségi nyomaték a Steiner-tétel szerint

$$\theta = \theta_0 + mR^2 = 2mR^2. \quad (9.10.1)$$

Kitérítve φ szöggel a karikát

$$M = -mgR \sin \varphi \quad (9.10.2)$$

forgatónyomaték fog hatni. A negatív előjel éppen arra utal, hogy a nyomaték az egyensúlyi helyzet felé mozgat. A forgómozgás alapegyenlete szerint

$$\theta \beta = M = -mgR \sin \varphi, \quad (9.10.3)$$

ahol β a szöggyorsulás. Mivel $\beta = \ddot{\varphi}$, így

$$\theta \ddot{\varphi} = -mgR \sin \varphi, \quad (9.10.4)$$

amely "majdnem" a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Ha kis szögkitérésekre szorítkozunk, akkor alkalmazhatjuk a $\sin \varphi \sim \varphi$ közelítést, így a

$$\theta \ddot{\varphi} = -mgR \varphi \quad (9.10.5)$$

egyenlet harmonikus rezgőmozgást ír le. Az ω körfrekvencia közvetlenül leolvasható:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{\theta}} = \sqrt{\frac{g}{2R}}. \quad (9.10.6)$$

A periódusidő

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}. \quad (9.10.7)$$

(b) A fonálinga (matematikai inga) lengésideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (9.10.8)$$

ahonnan a kérdéses fonál hossz

$$l = 2R. \quad (9.10.9)$$

9.11. Feladat: Egy m tömegű, l hosszúságú homogén rudat tömegközéppontján átmenő, rúdra merőleges, vízszintes tengelyre rögzítjük, hogy egy hagyományos mérleghintát kapjunk. A rúd vízszintes helyzetében mindkét vége alá k rugóállandójú rugót rögzítünk.

(a) A rugók kismértékű x megnyúlását (összenyomódását) fejezze ki a mérleghinta vízszintes helyzethez képesti kicsiny φ szögkitérésének függvényében! (Éljünk a $\sin \varphi \sim \tan \varphi \sim \varphi$ és a $\cos \varphi \sim 1$ közelítésekkel.)

(b) Fejezze ki a mérleghintára ható erők forgatónyomatékainak eredőjét a φ szögkitérés függvényében!

(c) Írja fel a fenti rendszerre a forgómozgás alapegyenletét! ($\theta = 1/12ml^2$) Mutassa meg, hogy a rendszer kis kitérések esetén harmonikus rezgőmozgást végez, valamint határozza meg a rezgés körfrekvenciáját!

(d) Hogyan módosul a körfrekvencia, ha a mérleghinta végeire egy-egy M tömegű gyerek ül?

Megoldás:

9.12. Feladat: (HN 15C-37) Egy meg nem feszített l hosszúságú, k rugóállandójú homogén rugót úgy vágunk két részre, hogy az egyik darab kétszer akkora, mint a másik.

(a) Fejezzük ki rugódarabok k_1 és k_2 rugóállandóját!

(b) Ha mindkét darab egyik végére azonos tömegű testet akasztanánk, mi lenne a frekvenciák aránya?

Megoldás:

(a) Elég csak gondolatban szétválasztani az l hosszúságú rugót egy l_1 és l_2 hosszúságú darabra, ahol legyen $l_1 = 2l_2$. Ha a rugót F erővel húzzuk, akkor jelölje a megnyúlást Δx , azaz

$$F = k\Delta x. \quad (9.12.1)$$

Az l_1 és l_2 szakaszok megnyúlása Δx_1 és Δx_2

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2, \quad (9.12.2)$$

amelyekre, mivel az F erő a rugó teljes hosszában hat – fennáll, hogy

$$F = k_1\Delta x_1 \quad (9.12.3)$$

és

$$F = k_2\Delta x_2. \quad (9.12.4)$$

A Δx_1 és Δx_2 megnyúlások arányosak az l_1 és l_2 szakaszok hosszaival, így

$$\Delta x_1 = 2\Delta x_2. \quad (9.12.5)$$

A fenti egyenletekből

$$k_1 = 1,5k, \quad (9.12.6)$$

míg

$$k_2 = 3k. \quad (9.12.7)$$

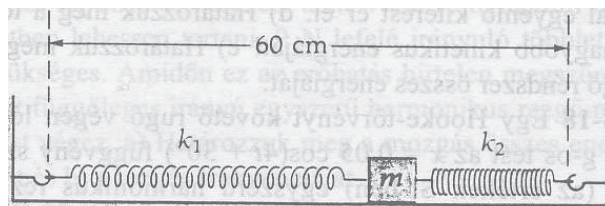
(b) A frekvenciák aránya

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{\frac{k_1}{m}}}{\sqrt{\frac{k_2}{m}}} = \sqrt{\frac{1}{2}}. \quad (9.12.8)$$

9.13. Feladat: (HN 15C-38) Két rugó mindegyike feszítetlen állapotban $l_0 = 20$ cm hosszú, de rugóállandóik különbözőek: $k_1 = 40$ N/m és $k_2 = 80$ N/m. A rugókat vízszintes súrlódásmentes felületen nyugvó $m = 0,60$ kg tömegű kicsiny testhez rögzítik. A rugókat ellentétes irányban megfeszítik és egymástól $L = 60$ cm távolságban lévő kampókhöz rögzítik a 49. ábra szerint. Feltéve, hogy a test mérete elhanyagolható.

(a) A baloldali kampótól milyen távol lesz a test egyensúlyi helyzete?

(b) Mekkora a test rugóirányú harmonikus rezgőmozgásának a körfrekvenciája?



49. ábra.

Megoldás:

(a) Jelölje az egyes rugók megnyúlását x_1 illetve x_2 . A teljes megnyúlás

$$D = L - 2l_0 = x_1 + x_2. \quad (9.13.1)$$

Az egyensúlyi helyzetben a rugókban ugyanakkora nagyságú erő ébred, azaz

$$k_1 x_1 = k_2 x_2. \quad (9.13.2)$$

A test baloldali faltól való távolságának meghatározásához az x_1 kiszámolására van szükség

$$x_1 = \frac{Dk_2}{k_1 + k_2} = 12 \text{ cm}. \quad (9.13.3)$$

Tehát a test egyensúlyi helyzete a faltól

$$l_0 + x_1 = 32 \text{ cm} \quad (9.13.4)$$

távolságra van.

(b) Mozdítsuk ki a testet az egyensúlyi helyzetéből a pozitív irányba x -szel és írjuk fel a mozgásegyenletet a ható erőkkel – figyelembe véve az irányokat és azt, hogy a megnyúlások megváltoztak –

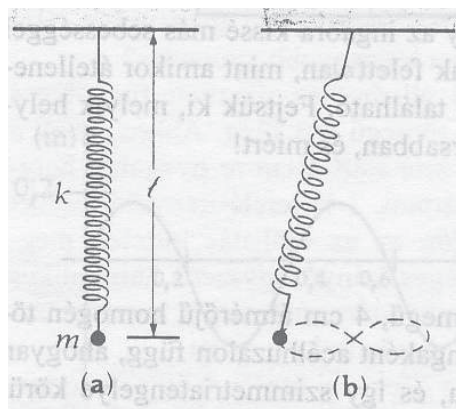
$$ma = -k_1(x_1 + x) + k_2(x_2 - x). \quad (9.13.5)$$

Alkalmazva a (9.13.2) egyenletbeli összefüggést az

$$ma = -(k_1 + k_2)x \quad (9.13.6)$$

egyenletre jutunk, amely a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Innen a rezgés körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}. \quad (9.13.7)$$



50. ábra.

9.14. Feladat: (HN 15C-39) Egy k rugóállandójú rugó végére akasztott m tömegű test a rugó (nyugalmi állapotban) l hosszúságúra nyújtja a 50.a ábra szerint. A testet most mozgásba hozzuk úgy, hogy fel-le rezeg és ingaként ide-oda leng. A test a 50.b ábra szerint a függőleges síkban mozogva "nyolcasokat" ír le. Fejezzük ki a k rugóállandót az m , l és g függvényében!

Megoldás: A mozgás egy rezgésre és egy ingalengésre bontható. A rezgés ω_r körfrekvenciája

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (9.14.1)$$

az ingamozgás ω_i körfrekvenciája

$$\omega_i = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (9.14.2)$$

alakban írható fel. A "8"-as leírása során egy ingalengéshez két rezgés tartozik, tehát

$$\omega_r = 2\omega_i, \quad (9.14.3)$$

vagyis

$$\frac{k}{m} = 4\frac{g}{l}. \quad (9.14.4)$$

Innen a rugóállandó

$$k = 4\frac{mg}{l}. \quad (9.14.5)$$

9.15. Feladat: Egy d vastagságú egyenletes A keresztmetszetű falapocskát vízre teszünk g homogén nehézségi erőterben. A falapocskát függőleges irányban kicsit megnyomva, majd elengedve rezgőmozgást jön létre. Mutassuk meg, hogy a mozgás harmonikus rezgőmozgás. A közegellenállástól és a felületi feszültségtől tekintsünk el. A fa sűrűsége ρ_f , a vízé ρ_v .

Megoldás: Helyezzük a falapocskát a vízre és várjuk meg az egyensúlyi helyzet beálltát. Ha ekkor x -szel jelöljük a bemerülés nagyságát, akkor lefele irányított koordinátarendszer esetén a testre ható erők a

$$0 = \rho_f A d g - \rho_v A x g \quad (9.15.1)$$

egyenletnek tesznek eleget. Ezt követően a falapocskát y -nal lejjebb nyomjuk, majd elengedjük. A falapocska mozgásegyenlete a

$$\rho_f A d \ddot{y} = \rho_f A d g - \rho_v A (x + y) g \quad (9.15.2)$$

lesz. Figyelembe véve a (9.15.1) egyenletet a

$$\rho d \ddot{y} = -\rho_v g y \quad (9.15.3)$$

egyenlethez jutunk, amely a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Innen a rezgés körfrekvenciája közvetlenül leolvasható:

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_v g}{\rho_f d}} \quad (9.15.4)$$

9.16. Feladat: Az M tömegű, R sugarú homogén anyageloszlású bolygó északi és déli pólusa között lyukat fúrunk. Mutassuk meg, hogy a bedobott m tömegű test harmonikus rezgőmozgást végez! (A sűrűdástól tekintsünk el.)

Megoldás: A homogén bolygó közepétől r távolságban lévő testre a bolygónak attól a részétől származik eredő erőhatás, amennyi az r sugáron belül van. Így az arányosság miatt a figyelembe veendő tömeg

$$M(r) = \frac{r^3}{R^3} M. \quad (9.16.1)$$

Az m tömegű test mozgásegyenlete

$$m \ddot{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2} = -\gamma \frac{mM}{R^3} r, \quad (9.16.2)$$

amelyből

$$\ddot{r} = -\gamma \frac{M}{R^3} r \quad (9.16.3)$$

adódik. Ez egy harmonikus rezgőmozgás egyenlete. A körfrekvencia közvetlenül leolvasható:

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma M}{R^3}}. \quad (9.16.4)$$

9.17. Feladat: Az M tömegű, R sugarú homogén bolygó északi pólusán lefektetünk egy súrlódásmentes sík lapot, amely a póluson átmenő érintősík. Mutassuk meg, hogy egy, a póluson átmenő egyenes mentén mozgó m tömegű test harmonikus rezgőmozgást végez! Mi az itteni harmonikus rezgés feltétele? (A bolygó forgásától tekintsünk el.)

Megoldás: A síkon az érintési ponttól x távolságban a testre ható erő

$$F = -\gamma \frac{mM}{R^2 + x^2}, \quad (9.17.1)$$

amely a bolygó középpontja felé mutat. Az egyensúlyi helyzet felé mutató tangenciális komponens

$$F = -\gamma \frac{mM}{R^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}. \quad (9.17.2)$$

Ezzel a test mozgásegyenlete

$$m\ddot{x} = -\gamma \frac{mM}{(R^2 + x^2)^{3/2}} x. \quad (9.17.3)$$

Ha kis $x \ll R$ kitérésekre szorítkozunk, akkor alkalmazhatjuk a

$$\frac{1}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \sim \frac{1}{R^3} \quad (9.17.4)$$

közelítést, amellyel a mozgásegyenlet

$$m\ddot{x} = -\gamma \frac{mM}{R^3} x \quad (9.17.5)$$

alakú lesz. Ez pedig a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Innen a körfrekvencia

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma M}{R^3}}. \quad (9.17.6)$$

Csillapodó és gerjesztett rezgések

9.18. Feladat: (HN 15B-28) Egy 2 kg tömegű testet 200 N/m rugóállandójú rugóra függesztünk. Súrlódás miatt a test csillapított harmonikus mozgást végez. A rezgés amplitúdója a $t = 0$ s időpillanatban 0,20 m, majd ezt követően 6 másodperc múlva 0,16 m-re csökken.

- Határozzuk meg a súrlódási erőből származó csillapítási együtthatót.
- Határozzuk meg a rendszer rezonanciafrekvenciáját.

Megoldás: Jelölések: $m = 2$ kg; $k = 200$ N/m; $A = 0,2$ m; $t = 6$ s és $A(t) = 0,16$ m.

(a) A csillapodó rezgés mozgásegyenlete

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (9.18.1)$$

ahol

$$\beta = \frac{c}{2m} \quad (9.18.2)$$

a keresett c csillapítási együtthatóval és

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (9.18.3)$$

A (9.18.1) mozgásegyenletet kielégítő kitérés az idő függvényében

$$y(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta), \quad (9.18.4)$$

ahol δ a kezdeti feltételhez illesztett kezdőfázis, valamint $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Itt a t időpillanathoz tartozó amplitúdó

$$A(t) = Ae^{-\beta t}. \quad (9.18.5)$$

Ebből β kifejezhető és a paraméterek behelyettesítése után kiszámolható:

$$\beta = -\frac{1}{t} \ln \frac{A(t)}{A} = 0,0371/\text{s}. \quad (9.18.6)$$

A c csillapodási tényező a (9.18.2) összefüggésből

$$c = 2m\beta = 0,1488 \text{ kg/s}. \quad (9.18.7)$$

(b) A rendszer rezonanciafrekvenciája

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = 99,991/\text{s}. \quad (9.18.8)$$

9.19. Feladat: Egy csillapítatlan rezgő rendszerben mozgó test tömege 0,5 g. A rendszert változtatható frekvenciájú gerjesztő erő hajtja, amplitúdója minden frekvencián F_0 . A test 400 Hz-en 9 mm, 405 Hz-en 5 mm amplitúdóval rezeg.

- Határozzuk meg az oszcillátor ω_0 sajátfrekvenciáját és
- a rezgés amplitúdóját 395 Hz frekvencián.
- Állapítsuk meg a gerjesztő erő nagyságát. **Megoldás:**

Rugalmas közegekben terjedő hullámok

9.20. Feladat: Mindkét végén nyitott síp alaphfrekvenciája 110 Hz. Milyen hosszú a síp, ha a hang terjedési sebessége 340 m/s?

Megoldás: Ha a síp mindkét vége nyitott, akkor mindkét helyen duzzadóhely van. Ebből következik, hogy a hang fél hullámhossza a síp hossza, azaz

$$d = \frac{\lambda}{2}. \quad (9.20.1)$$

A hullámhossz kifejezhető a frekvenciával és a terjedési sebességgel, amely

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 3,091 \text{ m}. \quad (9.20.2)$$

Így a síp hossza

$$d = 1,55 \text{ m}. \quad (9.20.3)$$

9.21. Feladat: A pozitív x tengely irányában egy transzverzális harmonikus hullám terjed 2 m/s sebességgel, amely a $t = 0$ időpillanatban az origóban van. Amplitúdója 10 cm, frekvenciája 0,5 Hz.

- (a) Mennyi a körfrekvencia?
- (b) Mekkora a hullámhossz?
- (c) Mekkora a cirkuláris hullámszám?

Megoldás:

- (a) A körfrekvencia

$$\omega = 2\pi\nu = 3,14 \text{ 1/s}. \quad (9.21.1)$$

- (b) A hullám terjedési v sebessége, a ν frekvencia és a λ hullámhossz közötti összefüggés

$$v = \lambda\nu, \quad (9.21.2)$$

ahonnan

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = 4 \text{ m}. \quad (9.21.3)$$

- (c) A cirkuláris hullámszám

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 1,57 \text{ 1/m}. \quad (9.21.4)$$

9.22. Feladat: (HN 18B-8) Kifeszített huzalon haladó transzverzális hullám amplitúdója 0,2 mm, frekvenciája 500 Hz, sebessége 196 m/s.

(a) Írjuk fel SI egységekkel a hullámfüggvényt $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ alakban.

(b) A huzal lineáris tömegsűrűsége 4,1 g/m. Mekkora a huzalt feszítő erő?

Megoldás:

(a) Az amplitúdó méterben

$$A = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m.} \quad (9.22.1)$$

A körfrekvencia

$$\omega = 2\pi f = 3140 \text{ 1/s.} \quad (9.22.2)$$

A hullámhossz

$$\lambda = v/f = 0,392 \text{ m.} \quad (9.22.3)$$

A cirkuláris hullámszám

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 16 \text{ 1/m.} \quad (9.22.4)$$

Így a hullámfüggvény

$$y(x, t) = 2 \cdot 10^{-4} \sin(16x - 3140t). \quad (9.22.5)$$

(b) A terjedési sebesség négyzete

$$v^2 = \frac{F}{\mu}, \quad (9.22.6)$$

ahol μ a hosszegységenkénti tömeg. Innen a kötelet feszítő erő

$$F = \mu v^2 = 157 \text{ N.} \quad (9.22.7)$$

9.23. Feladat: Egy húron csillapítatlan transzverzális harmonikus hullám terjed 20 m/s sebességgel pozitív irányba. Amplitúdója 50 cm, frekvenciája 2 Hz. A $t_0 = 0$ pillanatban az $x_0 = 0$ helyen levő részecske kitérése 25 cm, és negatív irányban mozog. Mekkora a kitérése az $x = 5$ m helyen lévő részecskének a $t = 2$ s pillanatban?

Megoldás: Jelölések: $v = 20$ m/s; $A = 50$ cm = 0,5 m; $\nu = 2$ Hz; $A(x_0 = 0, t_0 = 0) = A(0, 0) = 25$ cm = 0,25 m.

A hullámfüggvény általános alakja

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \delta), \quad (9.23.1)$$

amelyre a kezdeti feltételeket alkalmazva

$$A(0, 0) = A \sin \delta. \quad (9.23.2)$$

Ahhoz, hogy a hullámfüggvény a kezdeti időpillanatot követően az $x_0 = 0$ helyen csökkenjen, úgy $0 < \delta < \pi/2$ kell legyen. Így az adatok behelyettesítése után

$$\delta = \frac{\pi}{6}. \quad (9.23.3)$$

Az ω körfrekvencia

$$\omega = 2\pi\nu = 12,56 \text{ 1/s}. \quad (9.23.4)$$

A hullám terjedési sebessége a

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (9.23.5)$$

összefüggéssel számolható, ahonnan a k cirkuláris hullámszám

$$k = \frac{\omega}{v} = 0,628 \text{ 1/m}. \quad (9.23.6)$$

A hullámfüggvény az SI egységekkel kifejezve a

$$y(x, t) = 0,5 \sin \left(0,628x - 12,56t + \frac{\pi}{6} \right) \quad (9.23.7)$$

alakot ölti. Az $x = 5$ m és $t = 2$ s helyettesítést elvégezve az ezen a helyen és ebben az időpontban a kitérés

$$y(5, 2) = -0,25 \text{ m}. \quad (9.23.8)$$

9.24. Feladat: Megszólaltatjuk egy $L = 0,6$ m hosszúságú, mindkét végén rögzített gitárhúr alapharmonikusát, amely $f_0 = 440$ Hz frekvenciájú.

- Rajzolja le az állóhullámot! Mekkora a hullámhossz?
- Mekkora a hang terjedési sebessége a húrban?
- Tudjuk, hogy a húr közepe $A_1 = 2$ mm-es amplitúdóval rezeg. A húr végétől mekkora távolságra található a húrnak azon része, ahol az állóhullám amplitúdója $A_2 = 1$ mm?
- A húr végétől mekkora távolságban fogjuk le a húrt, ha azt szeretnénk, hogy egy $f_1 = 660$ Hz frekvenciájú hang szólaljon meg?

[Megoldás:](#)

10. Feladatok a termodinamika tárgyköréből

Hővezetés, hőterjedés sugárzással

10.1. Feladat: (HN 19A-23) Határozzuk meg egy 20 cm hosszú, 4 cm átmérőjű hengeres vörösréz rúdon időegység alatt átvezetett hőmennyiséget, ha a rúd két vége $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, ill. $220\text{ }^{\circ}\text{C}$ hőmérsékletű!

Megoldás:

10.2. Feladat: (HN 19A-25) Egy épület téglafalának mérete: $4\text{ m} \times 10\text{ m}$ és, a fal 15 cm vastag. A hővezetési együtthatója $\lambda = 0,8\text{ W/m K}$. Mennyi hő áramlik át a falon 12 óra alatt, ha az átlagos belső hőmérséklet $20\text{ }^{\circ}\text{C}$, a külső pedig $5\text{ }^{\circ}\text{C}$?

Megoldás: Jelölések: a fal felülete $A = 4\text{ m} \times 10\text{ m} = 40\text{ m}^2$; a falvastagság $d = 15\text{ cm}$; az eltelt idő $t = 12\text{ óra} = 43200\text{ s}$; $T_1 = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ és $T_2 = 5\text{ }^{\circ}\text{C}$.

A hőáram (a belső energia árama, itt most a fal teljes felületére vett teljesítmény) a Fourier-törvény szerint

$$I = P = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d} A. \quad (10.2.1)$$

A 12 óra alatt átáramlott hő

$$Q = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d} A t = 1,38 \cdot 10^8 \text{ J}. \quad (10.2.2)$$

10.3. Feladat: (HN 19B-33) Egy 3 cm élhosszúságú alumínium kockát lámpakorommal vontak be és így ideális hőszigetelő lett. A kockát vákuumkamrába tették, amelynek falait $27\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on tartották. Milyen teljesítményű legyen az a fűtőtest, amely annyi energiát ad a kockának, hogy hőmérséklete állandóan $90\text{ }^{\circ}\text{C}$ maradjon?

Megoldás: Jelölések, adatok: $a = 3\text{ cm}$; $T_0 = 27\text{ }^{\circ}\text{C} = 300\text{ K}$; $T_1 = 90\text{ }^{\circ}\text{C} = 363\text{ K}$ és $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$.

A stacionárius (időben állandó) állapot beálltakor a fűtőtest teljesítménye

$$P = \sigma(T_1^4 - T_0^4)A \quad (10.3.1)$$

ahol a kocka felszíne $A = 6a^2$. Az adatok behelyettesítése után

$$P = 2,836\text{ W}. \quad (10.3.2)$$

Ideális gázok állapotegyenlete

10.4. Feladat: (HN 20B-26) Egy tó fenekén, ahol a hőmérséklet $4\text{ }^{\circ}\text{C}$, egy $0,2\text{ cm}$ átmérőjű légbuborék képződött. Ez 25 m -t emelkedik a felszínig, ahol a víz hőmérséklete $24\text{ }^{\circ}\text{C}$. Határozzuk meg a gömb alakú buborék méretét, amint éppen eléri a víz felszínét, feltételezve, hogy a buborék belsejében lévő levegő mindig felveszi a környező víz hőmérsékletét! A légköri nyomás 10^5 Pa .

Megoldás: Jelölések: $T_1 = 4\text{ }^{\circ}\text{C} = 277\text{ K}$; $d_1 = 0,2\text{ cm}$; $h = 25\text{ m}$; $T_2 = 24\text{ }^{\circ}\text{C} = 297\text{ K}$; a külső légnyomás $p_k = 10^5\text{ Pa}$; a víz sűrűsége $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$.

Az egyesített gáztörvény szerint

$$\frac{(p_k + \rho gh)\frac{4}{3}\left(\frac{d_1}{2}\right)^3\pi}{T_1} = \frac{p_k\frac{4}{3}\left(\frac{d_2}{2}\right)^3\pi}{T_2}, \quad (10.4.1)$$

ahonnan — behelyettesítés után — a buborék átmérője

$$d_2 = 0,31\text{ cm}. \quad (10.4.2)$$

10.5. Feladat: (HN 20A-29) A Nap belsejének hőmérséklete kb. $2 \cdot 10^7\text{ K}$.

(a) Határozzuk meg egy proton átlagos kinetikus energiáját a Nap belsejében!

(b) Határozzuk meg a proton négyzetes középsebességét!

Megoldás:

10.6. Feladat: (HN 20B-36) Milyen hőmérsékleten egyenlő az oxigén atomok négyzetes középsebessége a Föld felszínéről való szökési sebességgel?

Megoldás: Adatok: A Föld sugara $R_F = 6370\text{ km}$, tömege $M_F = 6 \cdot 10^{24}\text{ kg}$; gravitációs állandó $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ Nm}^2/\text{kg}^2$; egyetemes gázállandó $R = 8,31\text{ J}/(\text{mol K})$; az oxigén móltömege $M = 16\text{ g/mol}$.

A v_{sz} szökési sebesség

$$v_{sz} = \sqrt{\frac{2\gamma M_F}{R_F}}, \quad (10.6.1)$$

a v_{nks} négyzetes középsebesség

$$v_{nks} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (10.6.2)$$

A kettő egyenlőségéből a fenti adatokkal a kérdéses hőmérséklet

$$T = 80642\text{K}. \quad (10.6.3)$$

10.7. Feladat: 2 mól, 2 atomos gázzal állandó nyomáson 747,9 J hőt közlünk. A hőmérséklete 10°C -kal változik. Hány szabadsági fokú a gáz?

Megoldás: Az állandó nyomáson vett mólhő és a szabadsági fokok száma közötti összefüggés

$$c_p = \frac{f+2}{2}R. \quad (10.7.1)$$

A közölt hő és a hőmérséklet változás között fenn áll, hogy

$$Q = c_p n \Delta T, \quad (10.7.2)$$

amelyből behelyettesítés után az állandó nyomáson vett mólhőre $c_p = \frac{9}{2}$ adódik. Innen egyszerűen leolvasható, hogy a szabadsági fokok száma

$$f = 7. \quad (10.7.3)$$

Megjegyzés: A szoba hőmérsékletű kétatomos gázok állandó nyomáson vett mólhője $c_p = \frac{7}{2}$, a szabadsági fokok száma $f = 5$, amelyek a translációs és rotációs mozgásokhoz kapcsolódnak. Magas hőmérsékleten ($\sim 2000\text{ K}$) azonban a rezgéshez tartozó 2 újabb szabadsági fok jelenik meg. A mérést ezen a hőmérsékleten végezték!

10.8. Feladat: (HN 21B-12) Mutassuk meg, hogy egyatomos ideális gázra az izotermikus kompresszió-modulus ($K = -V \cdot dp/dV$) egyenlő a nyomással!

Megoldás: Az ideális gáz állapotegyenlete

$$pV = nRT, \quad (10.8.1)$$

ahonnan a nyomás

$$p(V) = nRT \frac{1}{V}. \quad (10.8.2)$$

A dp/dV differenciálhányadost kiszámolva

$$\frac{dp}{dV} = -nRT \frac{1}{V^2}, \quad (10.8.3)$$

az izoterm kompresszió-modulus — felhasználva az állapotegyenlet alakját —

$$K = -V \frac{dp}{dV} = V nRT \frac{1}{V^2} = p. \quad (10.8.4)$$

Körfolyamatok ideális gázzal

10.9. Feladat: (HN 21C-22) Kezdeti p_1 , V_1 , T_1 állapotjelzőkkel jellemzett egyatomos ideális gázzal a következő, három lépésből álló körfolyamatot végezzük: izotermikus expanzió V_2 térfogatig, izobár kompresszió az eredeti térfogatig és izochor melegítés a kezdeti nyomás és hőmérséklet visszaállítására.

- Ábrázoljuk a körfolyamatot a $p-V$ síkon!
- Határozzuk meg a gáz mólszámát a megadott paraméterekkel, a gázállandóval és c_v -vel kifejezve.
- Határozzuk meg a T_2 hőmérsékletet az izobár kompresszió végén a b) feladat eredményét felhasználva!
- Írjuk fel mindhárom folyamatra a hőmérséklet változását a megfelelő változók függvényében.

Megoldás:

- (ábra)
- Az ideális gáz

$$pV = nRT \quad (10.9.1)$$

állapotegyenletéből és a mólhőre érvényes

$$c_v = \frac{3}{2}R \quad (10.9.2)$$

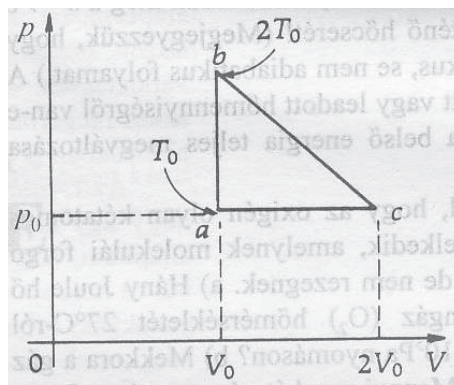
összefüggéssel az n mólszám

$$n = \frac{3p_1V_1}{2c_vT_1} = \frac{3p_2V_2}{2c_vT_1} = \frac{3p_2V_1}{2c_vT_2}. \quad (10.9.3)$$

- A fenti egyenletből a T_2 hőmérséklet

$$T_2 = \frac{V_1}{V_2}T_1. \quad (10.9.4)$$

- Az első folyamatban $\Delta T = 0$; a másodikban $\Delta T = T_2 - T_1 = \left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right)T_1$; míg a harmadikban $\Delta T = T_1 - T_2 = \left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right)T_1$.



51. ábra.

10.10. Feladat: (HN 21C-26) Két mól egyatomos gázzal a 51. ábrán látható abca körfolyamatot végezzük. A $p-V$ síkon mindhárom folyamat ábrája egyenes. Az a pontban a paraméterek: p_0 , V_0 , T_0 . Az alábbi feladatokat oldjuk meg RT_0 függvényében.

- Határozzuk meg egy teljes ciklus alatt végzett munkát.
- Határozzuk meg a $b \rightarrow c$ folyamat során történő hőcserét! A rendszer által felvett vagy leadott hőmennyiségről van-e szó?
- Mekkora a belső energia teljes megváltozása egy ciklus során?

Megoldás: Az egyesített gáztörvény alkalmazásával az egyes pontokban az állapotváltozók:

$$a: (p_0, V_0, T_0)$$

$$b: (2p_0, V_0, 2T_0)$$

$$c: (p_0, 2V_0, 2T_0)$$

(a) A körfolyamatban végzett munka

$$W = \frac{1}{2}(2p_0 - p_0)(2V_0 - V_0) = \frac{1}{2}p_0V_0 = \frac{1}{2}nRT_0. \quad (10.10.1)$$

(b) A $b \rightarrow c$ folyamat kezdő és végállapotában a hőmérséklet egyaránt T_2 , de ettől a folyamat maga nem izotermikus. Ugyanakkor a belső energia megváltozása zérus. A gáz által végzett munka

$$W_{b \rightarrow c} = \frac{1}{2}(2p_0 + p_0)(2V_0 - V_0) = \frac{3}{2}p_0V_0 = \frac{3}{2}nRT_0, \quad (10.10.2)$$

s ennek megfelelően a felvett hő

$$Q_{b \rightarrow c} = \frac{3}{2}nRT_0. \quad (10.10.3)$$

Megjegyzés: E folyamat további diszkusszióra érdemes!

(c) A körfolyamat egy teljes ciklusában a belső energia megváltozása zérus.

10.11. Feladat: (HN 22A-5) Egy hőerőgép, amelynek a Carnot-hatásfoka 30%, a 400 K hőmérsékletű hőtartályból vesz fel hőt. Határozzuk meg a hidegebb hőtartály hőmérsékletét!

Megoldás: A Carnot-körfolyamat hatásfoka

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (10.11.1)$$

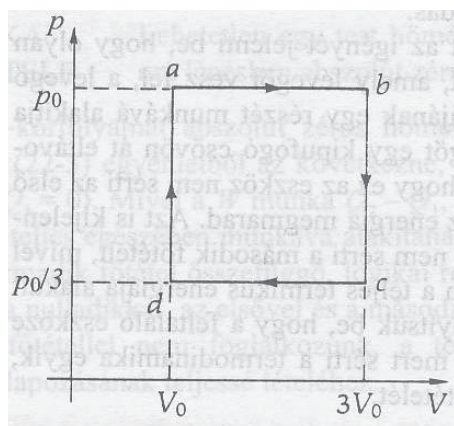
ahol T_1 a felső, T_2 az alsó hőtartály hőmérséklete. Innen

$$T_2 = (1 - \eta)T_1 = 280\text{K}. \quad (10.11.2)$$

10.12. Feladat: (HN 22B-23) Egyatomos ideális gázzal a 52. ábrán látható, $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$ körfolyamatot végezzük.

(a) Határozzuk meg a gáz által végzett eredő munkát p_0 és V_0 segítségével!

(b) Határozzuk meg a körfolyamat hatásfokát! **Megoldás:**

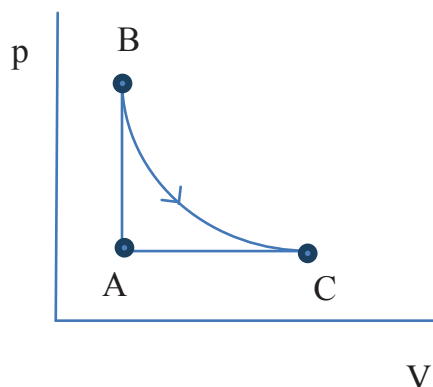


52. ábra.

10.13. Feladat: A 53. ábra 1 kmol héliumgázon végzett körfolyamatot mutat. A BC ív izotermát jelöl, $p_A = 10^5$ Pa, $V_A = 22,4$ m³, $p_B = 2 \cdot 10^5$ Pa. a, Határozzuk meg T_A , T_B és V_C értékeit! b, Számítsuk ki a körfolyamatban az AB és BC folyamatban végzett munkát!

Megoldás: a, Az ideális gáz állapotegyenletét

$$p_A V_A = nRT_A \quad (10.13.1)$$



53. ábra.

felhasználva az A-beli hőmérséklet

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = 269,6 \text{ K.} \quad (10.13.2)$$

A B-beli hőmérsékletet Gay-Lussac II. törvénye

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B} \quad (10.13.3)$$

segítségével határozhatjuk meg. Innen

$$T_B = T_A \frac{p_B}{p_A} = 539,2 \text{ K.} \quad (10.13.4)$$

Mivel a $B \rightarrow C$ folyamat izoterm, így

$$T_C = T_B = 539,2 \text{ K.} \quad (10.13.5)$$

A C-beli térfogatot pl. Gay-Lussac I. törvénye

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_C}{T_C} \quad (10.13.6)$$

segítségével határozhatjuk meg. Innen

$$V_C = V_A \frac{T_C}{T_A} = 44,8 \text{ m}^3. \quad (10.13.7)$$

b, Mivel az $A \rightarrow B$ folyamatban nincs térfogatváltozás, így a végzett munka is zérus:

$$W_{A \rightarrow B} = 0. \quad (10.13.8)$$

A $B \rightarrow C$ izoterm folyamatban a gáz által végzett munka

$$W = \int_{V_B}^{V_C} p(V) dV = \int_{V_B}^{V_C} \frac{nRT_B}{V} dV = nRT_B \ln \frac{V_C}{V_B} = 3,1 \cdot 10^6 \text{ J.} \quad (10.13.9)$$

10.14. Feladat: $1 \text{ m}^3, 0 \text{ C}^0$ -os 10^5 Pa nyomású héliumot állandó nyomáson addig hűtenek, amíg térfogata $0,75 \text{ m}^3$ nem lesz. Mennyi hőt kell ehhez elvonni?

Megoldás: Jelölések: $V_1 = 1 \text{ m}^3, T_1 = 0 \text{ C}^0 = 273 \text{ K}, p_1 = p_2 = 10^5 \text{ Pa}$ és $V_2 = 0,75 \text{ m}^3$. Mivel egyatomos gázzal van szó, az állandó nyomáson vett mólhő $c_p = \frac{5}{2}R$. A folyamat állandó nyomáson történik, így

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \quad (10.14.1)$$

amelyből a hűtés utáni hőmérséklet

$$T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = 204,75 \text{ K}. \quad (10.14.2)$$

A elvont hő kiszámolásához tudni kell, hány mól hélium van rendszerben. Ez a

$$pV = nRT \quad (10.14.3)$$

összefüggésből tehető meg, azaz

$$n = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = 44,08 \text{ mol}. \quad (10.14.4)$$

Ezzel a közölt hő

$$Q = c_p n (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} R n (T_2 - T_1) = -62500 \text{ J}. \quad (10.14.5)$$

Megjegyzés: A negatív előjel arra utal, hogy hőelvonás történik.

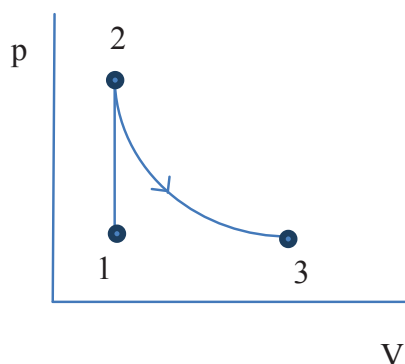
10.15. Feladat: Tekintsünk $n = 2$ mólnyi egyatomos ideális gázt: $p_1 = 10^5 \text{ Pa}, T_1 = 273 \text{ K}$. A gázzal $Q = 6806 \text{ J}$ hőt közlünk, állandó térfogat mellett, majd izoterm módon tágulni engedjük úgy, hogy a végső térfogat háromszorosa legyen a kiindulási térfogatnak.

- Ábrázolja a folyamatot állapotdiagramon!
- Mennyi lesz a hőközlés utáni hőmérséklet?
- Mekkora lesz a nyomás a folyamat végén?
- Mekkora az entrópia-változás a két folyamatban?

Megoldás:

- Az állapotdiagram a 54. ábrán látható.
- A közölt hő és a hőmérséklet-változás közötti összefüggés

$$Q = c_v n \Delta T, \quad (10.15.1)$$



54. ábra.

ahol $c_v = \frac{3}{2}nR$. Innen a hőközlés során a hőmérséklet-változás

$$\Delta T = \frac{Q}{c_v n} = \frac{Q}{\frac{3}{2}nR} = 273 \text{ K.} \quad (10.15.2)$$

Így az állandó nyomású hőközlés utáni hőmérséklet

$$T_2 = 546 \text{ K.} \quad (10.15.3)$$

(c) Az állandó térfogaton végzett hőközlés során kialakuló p_2 nyomás a

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \quad (10.15.4)$$

összefüggésből

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa.} \quad (10.15.5)$$

A térfogatváltozás miatti nyomás – figyelembe véve, hogy $V_1 = V_2$ és $V_3 = 3V_1$ – a Boyle-Mariotte törvény szerint a

$$p_2 V_2 = p_3 V_3 \quad (10.15.6)$$

összefüggésből

$$p_3 = \frac{V_2}{V_3} p_2 = 0,667 \cdot 10^5 \text{ Pa.} \quad (10.15.7)$$

(d) Az izochor ($1 \rightarrow 2$) folyamatbeli S_1 entrópiaváltozás a

$$S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_v n dT}{T} = \frac{3}{2} n R \ln \frac{T_2}{T_1} = 17,28 \text{ J/K.} \quad (10.15.8)$$

Az izoterm (2 \rightarrow 3) folyamatban a gáz belsőenergia változása, a felvett hő a tágulási munkára fordítódik. Így a felvett hő

$$Q = \int_{V_1}^{V_2} p(V)dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_2}{V} dV = nRT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} = 9969,4 \text{ J.} \quad (10.15.9)$$

Az izoterm S_2 entrópiaváltozás

$$S_2 = \frac{Q}{T_2} = 18,26 \text{ J/K.} \quad (10.15.10)$$

Az össz entrópiaváltozás: 35,54 J/K.

10.16. Feladat: 8 g tömegű, 5 l térfogatú, 27 °C hőmérsékletű N_2 gázt ($M = 28$ g) adiabatikusan kiterjesztünk 50 liter térfogatra. Mennyi hőmennyiséget kell ezen a térfogaton a gázzal közölni, hogy hőmérséklete újra 27 °C legyen?

Megoldás: Jelölések: $m = 8$ g, $V_1 = 5$ l, $T_1 = 27^\circ\text{C} = 300$ K és $V_2 = 50$ l. Mivel kétatomos szoba hőmérsékletű gázzal van szó, ezért a mólhők $c_p = \frac{7}{2}R$, $c_v = \frac{5}{2}R$, így $\kappa = c_p/c_v = \frac{7}{5}$. Elsőként az adiabatikus folyamat végi hőmérsékletet határozzuk meg a $TV^{\kappa-1} = \text{const.}$ összefüggés alapján

$$T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1}. \quad (10.16.1)$$

Behelyettesítés után

$$T_2 = 119,43 \text{ K.} \quad (10.16.2)$$

A 8 g nitrogén gáz $n = 0,2857$ molnak felel meg, így az állandó térfogaton történő visszamelegítéshez szükséges hő

$$Q = c_v n \Delta T = \frac{5}{2} R n (T_1 - T_2) = 1071,8 \text{ J.} \quad (10.16.3)$$

Hőátadás

10.17. Feladat: A c_1 fajhőjű, m_1 tömegű, T_1 hőmérsékletű pohárba c_2 fajhőjű, m_2 tömegű, T_2 hőmérsékletű sört öntünk. ($c_1 = 670$ J/kgK, $T_1 = 37^\circ\text{C}$, $m_1 = 0,3$ kg, $c_2 = 4000$ J/kgK, $T_2 = 8^\circ\text{C}$, $m_2 = 0,5$ kg)

- Mekkora lesz a közös hőmérséklet?
- Mennyi az átadott hő?
- Mekkora a hőáram, ha $\Delta t = 5$ s alatt áll be az egyensúly?
- Mekkora a teljes entrópia változás?

Megoldás:

(a) Az energiamegmaradás kifejezhető úgy, hogy a belső energiákat a $T_0 = 0^\circ\text{C}$ -hoz viszonyítjuk:

$$c_1 m_1 T_1 + c_2 m_2 T_2 = (c_1 m_1 + c_2 m_2) T, \quad (10.17.1)$$

ahol T a közös hőmérséklet. Innen

$$T = \frac{c_1 m_1 T_1 + c_2 m_2 T_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2} = 10,64^\circ\text{C} = 283,64\text{K}. \quad (10.17.2)$$

(b) Az átadott hő nagysága

$$\Delta Q = c_1 m_1 (T_1 - T) = 5298\text{J}. \quad (10.17.3)$$

(c) A hőáram

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = 1059,6\text{W}. \quad (10.17.4)$$

(d) A teljes entrópiaváltozás

$$S = \int_{T_1}^T c_1 m_1 \frac{dT}{T} + \int_{T_2}^T c_2 m_2 \frac{dT}{T} = c_1 m_1 \ln \frac{T}{T_1} + c_2 m_2 \ln \frac{T}{T_2} \quad (10.17.5)$$

$$= (-17,86 + 18,70)\text{J/K} = 0,84\text{J/K}.^* \quad (10.17.6)$$

**Emlékeztető:* A hőmérsékletet kelvinben kell behelyettesíteni.

10.18. Feladat: $m = 1\text{ kg}$ tömegű, $T_1 = 273\text{ K}$ hőmérsékletű vizet $T_2 = 300\text{ K}$ hőmérsékletű végtelen hőkapacitású hőtartállyal hozunk kapcsolatba. (A víz fajhője: $4,18\text{ kJ/kg}$.) Mennyi a rendszer teljes entrópiájának megváltozása?

Megoldás: A víz és a hőtartály által cserélt hő nagysága

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} c_v m dT = c_v m (T_2 - T_1), \quad (10.18.1)$$

amely pozitív a vízre, negatív a hőtartályra nézve. A víz S_1 entrópiaváltozása – figyelembe véve, hogy a hőfelvétel a víz esetén nem állandó hőmérsékleten történik –

$$S_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v m \frac{dT}{T} = c_v m \ln \frac{T_2}{T_1} = 394,2\text{J/K}. \quad (10.18.2)$$

A hőtartály végtelen hőkapacitású, ami azt jelenti, hogy T_2 hőmérséklete nem változik, azaz a hőtartály S_2 entrópiaváltozása egyszerűen

$$S_2 = -\frac{Q}{T_2} = -376,2 \text{ J/K.} \quad (10.18.3)$$

Azaz az össz entrópiaváltozás: 18 J/K.

10.19. Feladat: (HN 23B-9) Igazoljuk, hogy n mól ideális gáz V_0 kezdeti térfogatról $2V_0$ végső térfogatra való izobár tágulásakor a gáz entrópiaváltozása $nR[\kappa/(\kappa-1)] \ln 2$!

Megoldás: A folyamat során felvett elemi hő

$$dQ = nc_p dT, \quad (10.19.1)$$

így az entrópiaváltozás

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} nc_p \frac{dT}{T} = nc_p \ln \frac{T_2}{T_1}, \quad (10.19.2)$$

ahol T_1 a kezdeti, T_2 a végső hőmérséklet. Felhasználva Gay-Lussac I. törvényét

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1}, \quad (10.19.3)$$

ahol most $V_1 = V_0$ a kezdeti, $V_2 = 2V_0$ a végső térfogat, az entrópiaváltozás

$$\Delta S = nc_p \ln \frac{V_2}{V_1} = nc_p \ln 2. \quad (10.19.4)$$

Most már csak az kell belátni, hogy

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} R = \frac{c_p}{c_v - 1} R = c_p. \quad (10.19.5)$$

Így az állítást igazoltuk.

10.20. Feladat: (HN 23C-17) Igazoljuk, hogy az egyatomos ideális gáz izochor állapotváltozása során az entrópiaváltozás $3/2 nR \ln (p_v/p_k)$, ahol p_k a kezdeti, p_v a végső nyomás!

Megoldás: Mivel egyatomos gázzól van szó, az állandó térfogaton vett mólhő

$$c_v = \frac{3}{2} R. \quad (10.20.1)$$

A folyamat során felvett elemi hő

$$dQ = nc_v dT, \quad (10.20.2)$$

így az entrópiaváltozás

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_k}^{T_v} \frac{3}{2} nR \frac{dT}{T} = \frac{3}{2} nR \ln \frac{T_v}{T_k}, \quad (10.20.3)$$

ahol T_k a kezdeti, T_v a végső hőmérséklet. Felhasználva Gay-Lussac II. törvényét

$$\frac{T_v}{T_k} = \frac{p_v}{p_k}, \quad (10.20.4)$$

az entrópiaváltozás

$$\Delta S = \frac{3}{2} nR \ln \frac{p_v}{p_k}. \quad (10.20.5)$$

11. Feladatok az elektrosztatika tárgyköréből

Coulomb-törvény

11.1. Feladat: (HN 24B-7) Két kicsiny, 100 g-os ezüst gömb egymástól 1 m-es távolságra helyezkedik el. Az ezüstgömb elektronjainak hányadrészét kell az egyik gömbről a másikra átvinni, hogy közöttük 10^4 N vonzóerő hasson? (Az ezüstben atomonként 47 elektron van, és az ezüst atomtömege 107,9.)

Megoldás: A fellépő erő nagysága

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2}, \quad (11.1.1)$$

amelyből az adatok behelyettesítésével az átvitt töltés

$$Q = 1,054 \cdot 10^{-3} \text{C}. \quad (11.1.2)$$

Ez $6,58 \cdot 10^{15}$ számú elektronnak felel meg. A 100 g ezüst $2,61 \cdot 10^{25}$ elektront tartalmaz. Így az elektronok $2,51 \cdot 10^{-10}$ -nyi hányadát kell átvinni.

11.2. Feladat: (HN 24B-9) Két pontszerű töltés az x tengelyen a következőképpen helyezkedik el: egy $-3 \mu\text{C}$ töltés az origóban, és egy $+2 \mu\text{C}$ töltés az $x = 0,15$ m koordinátájú pontban van. Keressük meg azt a helyet, egy q' ponttöltésre ható erő zérus.

Megoldás: A q' töltésre ható erő ott zérus, ahol zérus a két töltéstől származó elektromos térerősség. Osszuk fel az x tengelyt három intervallumra. Jelölje D a q' helyét az x tengelyen.

(a) $-\infty < D < 0$: Számolás nélkül belátható, hogy a térerősség egyetlen D pontban sem lehet zérus. A $-3 \mu\text{C}$ töltéstől származó tér nagysága – az $1/r^2$ -es erőtvény miatt – mindenütt felülmúlja a $+2 \mu\text{C}$ töltéstől származó teret. Itt tehát nincs megoldás.

(b) $0 < D < x$: Az intervallum minden pontjában mindkét töltéstől származó erőter negatív irányú, így az összegük is. Itt sincs megoldás.

(c) $x < D < \infty$: Legyen $Q_1 = -3\mu\text{C}$ és $Q_2 = +2\mu\text{C}$. A két töltéstől származó tér zérus voltát a

$$0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{D^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{(D-x)^2} \quad (11.2.1)$$

egyenlet fejezi ki. Ezt D -re megoldva és az adatokat behelyettesítve

$$D = 0,82\text{m} \quad (11.2.2)$$

adódik. Ebben a pontban zérus a térerősség.

11.3. Feladat: Egy homogén elektromos erőter térerőssége (derékszögű koordináta-rendszerben) $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{y}} = E_0\mathbf{j} = E_0 \cdot (0, 1, 0)$, ahol E_0 konstans. (Itt a többféle lehetséges jelölés látható.) Egy m tömegű és $+q$ töltésű részecskét juttatunk a koordináta-rendszer origójába $\mathbf{v} = v_0\hat{\mathbf{x}} = v_0\mathbf{i} = v_0 \cdot (1, 0, 0)$ sebességgel. Számítsuk ki a részecske pályájának egyenletét!

Megoldás: A $+q$ töltésre ható erő

$$\mathbf{F} = qE_0 \cdot (0, 1, 0) = (0, qE_0, 0), \quad (11.3.1)$$

amely

$$\mathbf{a} = \frac{qE_0}{m} \cdot (0, 1, 0) = \left(0, \frac{qE_0}{m}, 0\right) \quad (11.3.2)$$

gyorsulást hoz létre. A sebességre vonatkozó kezdőfeltételt figyelembe véve a test sebessége az idő függvényében

$$\mathbf{v} = \left(v_0, \frac{qE_0}{m}t, 0\right). \quad (11.3.3)$$

Míg a test helyzete – figyelembe véve, hogy az origóból indult –

$$\mathbf{r} = \left(v_0t, \frac{1}{2} \frac{qE_0}{m}t^2, 0\right). \quad (11.3.4)$$

Látható, hogy

$$x(t) = v_0t \quad (11.3.5)$$

és

$$y(t) = \frac{1}{2} \frac{qE_0}{m} t^2, \quad (11.3.6)$$

ahonnan a t eliminálásával az

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{qE_0}{mv_0^2} x^2 \quad (11.3.7)$$

pályagörbe adódik.

11.4. Feladat: (HN 24B-19) A $+Q$ töltés egy L hosszúságú egyenes szakasz mentén oszlik el egyenletesen (ld. 55. ábra.). Számítsuk ki az E elektromos térerősséget a vonal irányában lévő,



55. ábra. 24B-19 feladat

annak végpontjától d távolságra lévő P pontban!

Megoldás: Mivel a P pont a szakasz meghosszabbításában van és a szakasz töltése pozitív a térerősség vektora a szakasztól el mutat. Válasszuk a koordináta-rendszerünket úgy, hogy a szakasz az x tengelyén fekszen és a P pont legyen az origóban! Osszuk fel a szakaszt kis dx hosszúságú darabokra! Egy ilyen darab töltése $dQ = dx \cdot \frac{Q}{L}$. A teljes térerősség ezen kis dx szakaszok térerősségeinek összegével közelíthető ami integrállá válik, amennyiben $dx \rightarrow 0$. A P ponttól x távolságban levő szakasz darabtól származó térerősség nagysága:

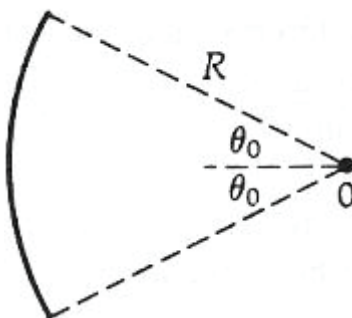
$$dE(x) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dx Q}{Lx^2} \quad (11.4.1)$$

A teljes térerősség

$$\begin{aligned} E(x) &\approx -\sum_{x=d}^{x=d+L} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q dx}{Lx^2} = -\frac{Q}{4L\pi\epsilon_0} \sum_{x=d}^{x=d+L} \frac{dx}{x^2} \\ E(x) &= -\frac{Q}{4L\pi\epsilon_0} \int_{x=d}^{x=d+L} \frac{dx}{x^2} = -\frac{Q}{4L\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{x} \right]_d^{d+L} \\ &= -\frac{Q}{4L\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{d+L} + \frac{1}{d} \right) = -\frac{Q}{4L\pi\epsilon_0} \left(\frac{L}{d(d+L)} \right) \end{aligned} \quad (11.4.2)$$

$$E(x) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d(d+L)} \quad (11.4.3)$$

11.5. Feladat: (HN 24B-20) Egy vékony, nem vezető rudat a 56. ábrán vázolt módon meghajlítunk úgy, hogy az egy R sugarú kör íve legyen, mely e kör középpontjából 20° szög alatt látszik. Legyen e hajlított rúdon egyenletes pozitív λ töltéssűrűség. Számítsuk ki az E elektromos tér tér-



56. ábra. 24B-20 feladat

erősséget a kör O középpontjában. (Útmutatás: számítsuk ki a $dl = R d\theta$ hosszúságú szakasz dq töltésétől származó dE térerősséget. Használjuk ki a rendszer szimmetriatulajdonságát a $\theta = -\theta_0$ és $\theta = +\theta_0$ közötti integrál kiszámításakor.)

Megoldás: Osszuk fel a körívet egyenlő dl hosszúságú kis darabokra! A körív középpontjában minden ilyen kis darab térerőssége ugyanakkora:

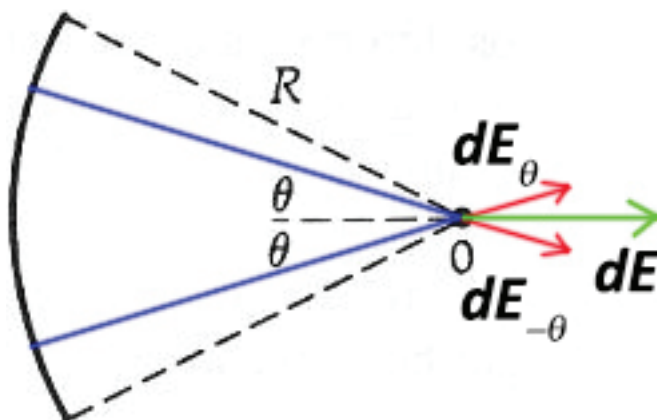
$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\theta}{R} \quad (11.5.1)$$

nagyságú és az O pontból a körívvel ellentétes irányba mutat. Mivel a vízszintes tengelyre szimmetrikusan, θ és $-\theta$ szögben elhelyezkedő szakaszoktól származó térerősség nagysága ugyanakkora, és irányuk a vízszintes tengelyre szimmetrikus ezek függőleges komponensei kiejtik egymást: vízszintes komponenseik nagysága pedig összeadódik, az eredő térerősség kiszámításához elegendő a pozitív θ értékekre, vagyis fél körívre összegezni a dE_θ térerősségek vízszintes komponensének kétszeresét, azaz $2dE_\theta \cdot \cos\theta$ -t. A $dl \rightarrow 0$ határesetben egy integrált kapunk:

$$E = 2 \int_0^{\theta_0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \cos\theta d\theta = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} [\sin\theta]_0^{\theta_0}, \quad (11.5.2)$$

azaz

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \sin\theta_0. \quad (11.5.3)$$



57. ábra. Az eredő térerősség kiszámításához

11.6. Feladat: (HN 24C-23) Mutassuk meg, hogy két egymástól meghatározott távolságban lévő kis tárgy, amelyek között adott töltésmennyiség oszlik meg, akkor taszítja egymást a legnagyobb erővel, ha a töltés egyenletesen oszlik meg közöttük.

Megoldás: Osszunk meg Q töltést úgy, hogy az egyik testen q , a másikon $Q-q$ töltés legyen. Ekkor a két test között ható Coulomb-erő nagysága

$$F(q) = K \frac{q(Q-q)}{r^2}. \quad (11.6.1)$$

A erő maximális értékét úgy kereshetjük meg, ha megoldjuk a

$$\frac{dF(q)}{dq} = 0 \quad (11.6.2)$$

egyenletet. A deriválást elvégezve

$$\frac{K}{r^2}(Q-2q) = 0 \quad (11.6.3)$$

adódik, amelyből a

$$q = \frac{1}{2}Q \quad (11.6.4)$$

következik. Ezzel az állítást igazoltuk.

11.7. Feladat: (HN 24C-26) Két (fix helyzetű) $+Q$ nagyságú ponttöltés egymástól d távolságra helyezkedik el. Egy harmadik, pozitív q töltést a két előbbi töltést összekötő egyenes mentén mozgatunk.

- (a) Mutassuk meg, hogy ha a q töltést egyensúlyi helyzetéből kissé (x távolságnyira, $x \ll d$) kimozdítjuk, akkor közelítőleg egyszerű harmonikus rezgő mozgást végez.
- (b) Számítsuk ki az ehhez a mozgáshoz rendelhető k „rugóállandót”.

Megoldás: Legyen mindegyik töltés az x tengelyen! Ekkor a q töltés által érzékelt térerősség is x irányú. Mivel mindegyik töltés azonos előjelű a q töltésre a két Q töltéstől ható erők ellentétes irányúak:

$$F_{bal\ oldali\ Q\ tol} = K \frac{Qq}{r_{bal\ oldali\ Q\ tol}^2} \quad F_{jobb\ oldali\ Q\ tol} = -K \frac{Qq}{r_{jobb\ oldali\ Q\ tol}^2} \quad (11.7.1)$$

q egyensúlyi helyzete a két $+Q$ töltés között éppen félúton van, ahol a két erő kiegyenlíti egymást. Térítsük ki a q töltést egyensúlyi helyzetétől pozitív irányba. Ekkor a rá ható erők eredője már nem lesz 0, hanem :

$$F = F_{bal\ oldali\ Q\ tol} + F_{jobb\ oldali\ Q\ tol} = K \left[\frac{Qq}{\left(\frac{d}{2} + x\right)^2} - \frac{Qq}{\left(\frac{d}{2} - x\right)^2} \right]. \quad (11.7.2)$$

Ha $x \ll d$, akkor $x \ll \frac{d}{2}$ is igaz. Legyen $d = 2L$! Ekkor $\frac{d}{2} = L$ és a nevezők az előző képletben közelíthetők a következő módon:

$$\frac{1}{(L \pm x)^2} = \frac{1}{L^2} \cdot \frac{1}{\left(1 \pm \frac{x}{L}\right)^2} \approx \frac{1}{L^2} \cdot \frac{1}{\left(1 \pm 2\frac{x}{L}\right)} \approx \frac{1}{L^2} \cdot \left(1 \mp 2\frac{x}{L}\right). \quad (11.7.3)$$

Ez konkrét példákön is ellenőrizhető¹. Tehát

$$F \approx \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{L^2} \left(\left(1 - 2\frac{x}{L}\right) - \left(1 + 2\frac{x}{L}\right) \right) = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{L^2} 4\frac{x}{L} = -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{d^2} 8\frac{x}{d}. \quad (11.7.5)$$

$$F = -\frac{8Qq}{\pi\epsilon_0} \frac{x}{d^3}. \quad (11.7.6)$$

Mint látjuk, amennyiben a kitérés sokkal kisebb, mint d , az erő ellentétes irányú és arányos a kitéréssel vagyis valóban harmonikus rezgőmozgásról van szó amelynek "rugóállandója"

$$k = \frac{8Qq}{d^3 \pi\epsilon_0}. \quad (11.7.7)$$

¹Egy példa: legyen $d = 10$, vagyis $L = 5$ és $x = 0,01$. Ekkor

$$\frac{1}{(L+x)^2} = 0,0398404 \frac{1}{L^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + 2\frac{x}{L}\right)} = 0,0398406 \frac{1}{L^2} \cdot \left(1 - 2\frac{x}{L}\right) = 0,0398400. \quad (11.7.4)$$

11.8. Feladat: (HN 24C-27) Számítsuk ki azt a munkát, ami ahhoz szükséges, hogy egy R sugarú gömb felszínére Q töltést juttassunk. A feltöltést végezzük úgy, hogy infinitezimális dq elemi töltést viszünk a végtelenből a gömb felszínére mindaddig, amíg a gömb töltése a Q -t el nem éri.

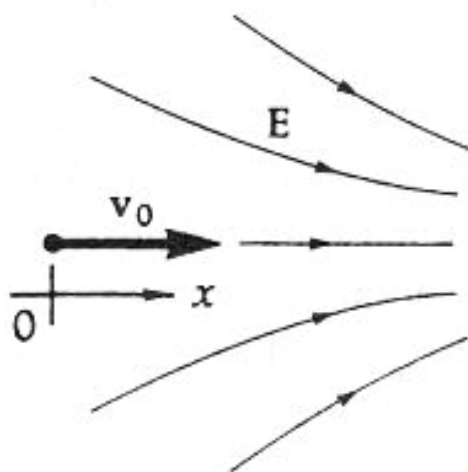
Megoldás: Tételezzük fel, hogy a gömbön már van q töltés. Ekkor a végtelenből további dq töltés viszünk a gömbre. Az eközben végzett munka

$$W(q \rightarrow q + dq) = - \int_{\infty}^R K \frac{q dq}{r^2} dr = K \frac{q dq}{r}. \quad (11.8.1)$$

A teljes feltöltéshez ezen munkákat kell összeadni:

$$W = \int_0^Q K \frac{q dq}{r} = \frac{1}{2} K \frac{Q^2}{r}. \quad (11.8.2)$$

11.9. Feladat: (HN 24C-29) Miként az a 58. ábrán látható, egy elektron, amelynek az $x_0 = 0$ helyen $v_0 = 10^6$ m/s a kezdősebessége, az x tengely pozitív irányában halad olyan tértartományban, ahol az elektromos térerősséget az $E_x = (4V/m) \cdot (1 + 10^3 x)$ függvény adja meg (az x távolságot méterben kell megadni). Számítsuk ki azt a távolságot, ahol az elektron sebessége (legalábbis egy pillanatra) zérussá válik.



58. ábra. 24C-29 feladat

Megoldás: Az elektrosztatikus tér helytől függő potenciálja

$$\Phi(x) = - \int E(x) dx = - \int 4(1 + 10^3 x) dx = -4(x + 500x^2). \quad (11.9.1)$$

Az elektron helyfüggő potenciális energiája ebben a térben (az elektron töltése negatív)

$$E_{pot} = -e\Phi(x) = 4e(x + 500x^2). \quad (11.9.2)$$

Az elektron abban az x koordinátájú pontban áll meg amikor minden kinetikus energiáját elveszti. Az elektron potenciális energiájának megváltozása $\Delta x = x - x_0$ úton tehát egyenlő a kezdeti kinetikus energiájával:

$$\begin{aligned} \Delta E_{pot} &= E_{kin,kezdeti} \\ \Delta E_{pot} &= E_{pot}(x) - E_{pot}(x_0) = 4e(x + 500x^2) - 0 \\ 4e(x + 500x^2) &= \frac{1}{2}mv_0^2 \\ 500x^2 + x - \frac{1}{8}\frac{m}{e}10^{12} &= 0. \end{aligned} \quad (11.9.3)$$

A másodfokú egyenlet megoldása

$$\begin{aligned} x_{\pm} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{8}\frac{m}{e}10^{12} \cdot 500}}{1000} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{2}\frac{m}{e}10^{12} \cdot 500}}{1000} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1422,408}}{1000} = \frac{-1 \pm 37,715}{1000} \\ x_+ &= 3,67 \cdot 10^{-2} \text{m} \\ x_- &= -3,871 \cdot 10^{-2} \text{m}. \end{aligned} \quad (11.9.4)$$

A mi esetünkben csak a pozitív eredmény jöhet szóba.

11.10. Feladat: Egy dipól $-Q$ töltése a $(-\frac{l}{2}, 0)$ koordinátájú pontban, $+Q$ töltése a $(\frac{l}{2}, 0)$ koordinátájú pontban van. Mekkora az elektromos térerősségvektor

- az x tengelyen az origótól d távolságban, illetve
- az y tengelyen az origótól ugyancsak d távolságban?
- Minkét esetben vizsgáljuk meg azt, milyen közelítő végeredmény adható meg, ha $l \ll d$, azaz a dipóltól nagy távolságban adjuk meg a térerősséget?

Megoldás:

- A $-Q$ töltéstől származó elektromos térerősség vektor

$$\mathbf{E}_{-Q} = \left(-K \frac{Q}{(d + \frac{l}{2})^2}, 0 \right), \quad (11.10.1)$$

míg a $+Q$ -tól származó

$$\mathbf{E}_{+Q} = \left(K \frac{Q}{(d - \frac{l}{2})^2}, 0 \right). \quad (11.10.2)$$

Az eredő térerősség

$$\mathbf{E} = \left(K \frac{Q}{(d - \frac{l}{2})^2} - K \frac{Q}{(d + \frac{l}{2})^2}, 0 \right). \quad (11.10.3)$$

(b) A $-Q$ töltéstől származó elektromos térerősség vektor

$$\mathbf{E}_{-Q} = \left(-K \frac{Ql}{2 \left(d^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right)^{3/2}}, -K \frac{Qd}{2 \left(d^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right)^{3/2}} \right) \quad (11.10.4)$$

A $+Q$ töltéstől származó elektromos térerősség vektor

$$\mathbf{E}_{+Q} = \left(-K \frac{Ql}{2 \left(d^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right)^{3/2}}, K \frac{Qd}{2 \left(d^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right)^{3/2}} \right) \quad (11.10.5)$$

Az eredő térerősség

$$\mathbf{E}_{+Q} = \left(-K \frac{Ql}{\left(d^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right)^{3/2}}, 0 \right) \quad (11.10.6)$$

(c) Az (a) feladatrészben végezzük el az alábbi közelítéseket:

$$\frac{1}{(d - \frac{l}{2})^2} - \frac{1}{(d + \frac{l}{2})^2} \sim \frac{1}{d^2} \left(1 + \frac{l}{2d} \right)^{-2} - \frac{1}{d^2} \left(1 + \frac{l}{2d} \right)^{-2} \sim \frac{1}{d^2} \left(1 + \frac{l}{d} \right) - \frac{1}{d^2} \left(1 - \frac{l}{d} \right) \sim \frac{2l}{d^3}. \quad (11.10.7)$$

Így a térerősség vektor:

$$\mathbf{E} = \left(K \frac{2Ql}{d^3}, 0 \right) \quad (11.10.8)$$

A (b) feladatrészben végezzük el azt a közelítést, hogy $l \ll d$. Ekkor a nevezőbeli l -es tag a d -s tag mellett elhanyagolható, így

$$\frac{l}{\left(d^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right)^{3/2}} \sim \frac{l}{d^3}. \quad (11.10.9)$$

A térerősség vektor:

$$\mathbf{E} = \left(-K \frac{Ql}{d^3}, 0 \right). \quad (11.10.10)$$

11.11. Feladat: (HN 24C-31) Egy elektromos dipólus egymástól l távolságra lévő, m tömegű pontszerű töltésekből áll, melyek nagysága $+q$ és $-q$. A dipólust E homogén elektromos erőterbe helyezünk úgy, hogy a minimális potenciális energiájú állapot közelében legyen.

- (a) Mutassuk meg, hogy a dipólus rezgő-forgó mozgást végez a tömegközéppontja körül.
 (b) Vezessünk le olyan összefüggést, amely (közelítőleg) megadja a rezgés T periódusidejét.

Megoldás:

(a) A dipólus töltéseire azonos nagyságú, ellentétes erő hat (erőpár). A dipólusra ható erők eredője zérus, így haladó mozgást nem fog végezni. A forgatónyomaték azonban nem zérus, így a dipólus a tömegközéppontja (a két töltés felezőpontja) körül forgómozgást végezhet. Attól függően hogy a dipólusnak milyen a térbeli helyzete, azaz a $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ dipólmomentum vektor és az \mathbf{pE} elektromos erőter irányja a szögelfordulás az $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ vektorral párhuzamos és mind a \mathbf{p} mind az \mathbf{E} vektorra merőleges. Azt, hogy kis kitérések esetén harmonikus rezgőmozgást végez a dipól, az a következőkben látjuk be.

(b) A minimális potenciálú állapot akkor van, ha a \mathbf{p} dipólmomentum vektor párhuzamos és azonos irányba mutat az \mathbf{E} elektromos térerősség vektorral. (A dipólus potenciális energiája $U = -\mathbf{pE}$.) Ha ebből a helyzetből φ szöggel kitérítjük, akkor

$$M = -qlE \sin \varphi \quad (11.11.1)$$

nagyságú forgatónyomaték fog a dipólusra hatni. A dipólus tehetetlenségi nyomatékát θ -val jelölve a forgómozgás mozgásegyenlete

$$\theta \ddot{\varphi} = -qlE \sin \varphi. \quad (11.11.2)$$

Kis szögelfordulásokra szorítkozva ($\sin \varphi \sim \varphi$)

$$\theta \ddot{\varphi} = -qlE \varphi \quad (11.11.3)$$

egyenletre jutunk, amely a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete². Innen a rezgő-forgómozgás körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{qlE}{\theta}}. \quad (11.11.4)$$

Ha felhasználjuk, hogy a tehetetlenségi nyomaték

$$\theta = 2m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2, \quad (11.11.5)$$

²Csillapítás nélkül mindig rezgőmozgás alakul ki! Harmonikus rezgő-forgómozgás kis szögelfordulások esetén valósul meg.

akkor

$$\omega = \sqrt{\frac{2qE}{ml}}. \quad (11.11.6)$$

A periódusidő

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{2qE}}. \quad (11.11.7)$$

11.12. Feladat: (24C-34) Az x tengely mentén – a $(0, l)$ intervallumban – elhelyezkedő l hosszúságú, vékony, szigetelő rúdon a $\lambda(x)$ töltéssűrűség helyfüggését a $\lambda(x) = Ax$ összefüggés írja le. A rúd végétől l távolságra – az $x = 2l$ pontban – egy pontszerű q töltés helyezkedik el az x tengelyen (59 ábra).



59. ábra.

- Mi az A állandó SI mértérendszerbeli egysége?
- Mekkora a töltés helyén az elektromos térerősség?

Megoldás:

- Az A mértékegysége C/m^2 .
- A x tengelyen az x pontban tekintsünk $dq = \lambda(x)dx$ töltést. Az ettől származó dE térerősség a $2l$ pontban

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(x)dx}{(2l-x)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ax}{(2l-x)^2} dx. \quad (11.12.1)$$

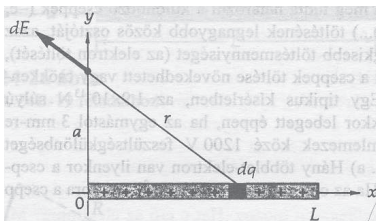
A teljes térerősség integrállal határozható meg:

$$E = \int_0^l \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ax}{(2l-x)^2} dx = \frac{A}{4\pi\epsilon_0} (1 - \ln 2). \quad (11.12.2)$$

11.13. Feladat: (HN 24C-35) Tekintsünk az $x = 0$ és $x = L$ pontok között, az x tengely mentén egy λ pozitív lineáris (hosszegységenkénti) töltéssűrűséget (60 ábra).

- Számítsuk ki az \mathbf{E} elektromos térerősség vektor y komponensét az $x = 0, y = a$ pontban;
- Számítsuk ki az \mathbf{E} elektromos térerősség vektor x komponensét ugyanebben a pontban.

Megoldás:



60. ábra.

(a) Az elektromos térerősség y komponensét a következőképpen számoljuk ki. Az origótól x távolságban lévő dx hosszútól származó dE elektromos térerősség nagysága a $(0, a)$ pontban

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2 + a^2}. \quad (11.13.1)$$

Az a és r által közbezárt szöget θ -val jelölve, a dE térerősség vektor y komponense

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2 + a^2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2 + a^2} \frac{a}{(x^2 + a^2)^{1/2}}. \quad (11.13.2)$$

A teljes E_y térerősség a

$$E_y = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \lambda dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (11.13.3)$$

integrállal számolható ki. A számolás végrehajtásához válasszuk a következő helyettesítést:

$$x = a \tan\theta, \quad (11.13.4)$$

amellyel

$$dx = a \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta. \quad (11.13.5)$$

Ezeket behelyettesítve, valamint a határokat illesztve a

$$E_y = \int_0^{\arcsin \frac{L}{(L^2 + a^2)^{1/2}}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} \cos\theta d\theta \quad (11.13.6)$$

integrálhoz jutunk. A számolást végrehajtva a térerősség y komponense

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{a(L^2 + a^2)^{1/2}}. \quad (11.13.7)$$

(b) A dE térerősség x komponense

$$dE_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2 + a^2} \sin\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2 + a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{1/2}}, \quad (11.13.8)$$

ahol a "-" előjel a koordináta-rendszerbeli irányítást jelenti. Ezzel a teljes E_x komponens

$$E_x = - \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\lambda dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (11.13.9)$$

integrállal fejezhető ki. A számolás az előbbinél egyszerűbben elvégezhető

$$E_x = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[- \frac{\lambda}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \right]_0^{\infty} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\lambda}{a} - \frac{\lambda}{(L^2 + a^2)^{1/2}} \right). \quad (11.13.10)$$

Tehát a térerősség vektor a $(0, a)$ pontban

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(- \left(\frac{\lambda}{a} - \frac{\lambda}{(L^2 + a^2)^{1/2}} \right), \frac{\lambda L}{a(L^2 + a^2)^{1/2}} \right). \quad (11.13.11)$$

11.14. Feladat: (HN 24C-36) Egy R sugarú körgyűrűn $+Q$ teljes töltés, a gyűrű középpontjában egy m tömegű, $-q$ negatív töltés van. Ha a $-q$ töltést a gyűrű tengelye mentén kissé kimozdítjuk, majd elengedjük, akkor a gyűrű tengelye mentén rezgőmozgást végez (feltéve, hogy a tengelyvonalból való kimozdulást valamilyen módon megakadályozzuk). Adjuk meg a rezgés f (közelítő) frekvenciáját.

Megoldás: A kör szimmetria tengelye legyen az x tengely, a kör középpontja az origó. Először a tengelyen az x pontban pontban számoljuk ki a töltött körtől származó térerősséget. A kör kerületén vezessük be a $\lambda = \frac{Q}{2R\pi}$ töltéssűrűséget. A $d\theta$ központi szögtől származó dE térerősség nagysága az x pontban

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{x^2 + R^2}. \quad (11.14.1)$$

A tengely irányú dE_x vetület

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R d\theta}{x^2 + R^2} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}}. \quad (11.14.2)$$

A szög szerint integrálva megkapjuk a teljes E_x térerősséget, amely

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (11.14.3)$$

A $-q$ töltésre ható erő

$$F_x = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (11.14.4)$$

Ha kis kitérésekre szorítkozunk, azaz $x \ll R$, úgy

$$(x^2 + R^2)^{3/2} \sim R^3. \quad (11.14.5)$$

Ezzel

$$F_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^3} x. \quad (11.14.6)$$

A $-q$ töltés mozgásegyenlete

$$m\ddot{x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^3} x, \quad (11.14.7)$$

amely a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. A kialakuló rezgés frekvenciája:

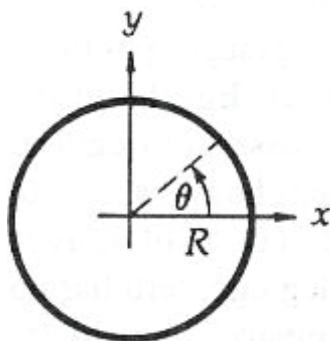
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}. \quad (11.14.8)$$

11.15. Feladat: (HN 24C-37) Egy vékony, nem vezető, R sugarú gyűrűn nem egyenletes a λ lineáris töltéssűrűség: $\lambda = \lambda_0 \sin \theta$, ahol a θ szög a 61. ábra szerint értelmezendő.

(a) Vázoljuk a gyűrű töltéseloszlását.

(b) Milyen az E elektromos térerősség iránya a gyűrű középpontjában?

(c) Mutassuk meg, hogy az elektromos térerősség nagysága a gyűrű középpontjában $\frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R}$.



61. ábra. 24-C37 feladat

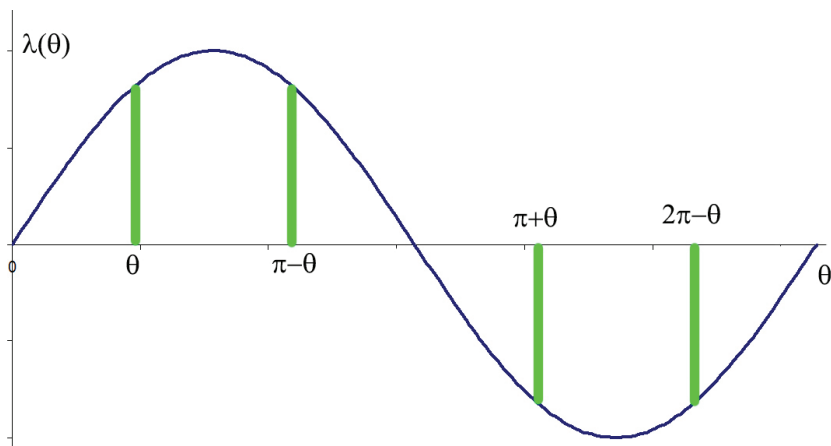
Megoldás:

(a) A töltéssűrűség a szög függvényében a 62. ábrán látható.

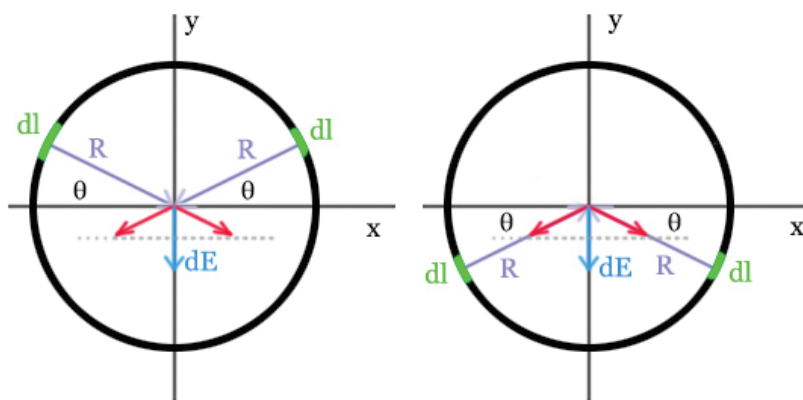
(b) Osszuk fel a kör kerületét infinitesimalisan kicsi dl szakaszokra. Egy tetszőleges θ szögnél elhelyezkedő szakasztól származó térerősség iránya vagy megegyezik a szakasztól a középpontig húzott vektor irányával ($0 \leq \theta \leq \pi$) vagy ellentétes vele ($0 \leq -\theta \leq \pi$). A teljes térerősség az egyes szakaszoktól származó térerősségek összege. A 63 ábrán látható, hogy az eredő térerősségben csak az egyes szakaszoktól származó térerősségek függőleges, $-y$ irányú összetevője marad meg. Tehát az eredő térerősség a negatív y tengely irányába mutat.

(c) Ennek nagysága egy adott θ szög esetén

$$dE_y(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(\theta) dl}{R^2} \sin \theta \quad (11.15.1)$$



62. ábra. Töltéssűrűség a szög függvényében. A zöld vonalak 4 olyan szöget jeleznek, ahol a töltéssűrűség abszolút értéke ugyanakkora



63. ábra. Különböző infinitezimális dl szakaszoktól származó térerősségek összegzése.

ahol $dl = R d\theta$. Szimmetria okok miatt $dE_y(\theta)$ ugyanakkora és ugyanolyan irányú a θ , $\pi - \theta$, $\pi + \theta$ és $2\pi - \theta$ szögek esetén, ezért elegendő a $0 \dots \frac{\pi}{2}$ tartományra integrálni és az eredményt négyszerezni:

$$\begin{aligned}
 E_y &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(\theta)R}{R^2} \sin\theta d\theta = \\
 &= 4 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{R} \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta = \\
 &= 4 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda_0}{R} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \\
 &= \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 R} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \\
 &= \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 R} \left[\frac{\pi}{2} - 0 - 0 + 0 \right] \tag{11.15.2}
 \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk a $\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ összefüggést³. A végeredmény

$$E_y = \frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R}. \tag{11.15.3}$$

11.16. Feladat: (HN 24C-39) Tekintsünk egy egyenletesen feltöltött R sugarú körgyűrűt, és annak tengelye mentén az elektromos teret. Mutassuk meg, hogy a térerősség maximuma $E_{x,max}$ a tengelyen, a gyűrű középpontjától $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ távolságban van. Vázzuk E változását x függvényében (negatív és pozitív x értékekre).

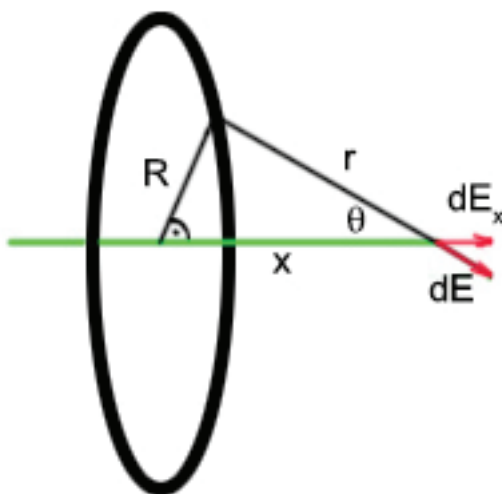
Megoldás: Bontsuk fel a körgyűrűt infinitezimálisan kis dl szakaszokra. A körgyűrű tengelyének minden pontja a körgyűrű összes pontjától - és így az összes szakasztól is - azonos távolságban van. A körgyűrű átteljes pontjaitól (szakaszaitól) származó térerősségek x tengelyre merőleges komponensei kiejtik egymást, ezért elegendő az E_x komponenseket összegezni. Egy dl szakasz térerőssége a 64 ábra szerint:

$$\begin{aligned}
 dE_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{R^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x \lambda dl}{(R^2 + x^2)^{3/2}}. \tag{11.16.1}
 \end{aligned}$$

A teljes térerősség

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2R\pi x \lambda}{(R^2 + x^2)^{3/2}}. \tag{11.16.2}$$

³Ezt levezethetjük a következő két egyenlőségből: $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ és $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$



64. ábra. Térerősség egy egyenletesen töltött körgyűrű tengelyén

Ennek akkor van maximuma, ha a deriváltja nulla. Ha a derivált nulla, akkor a konstansok nem számítanak, ezért azokat el is hagyhatjuk

$$\frac{dE_x}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = 0 \quad (11.16.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} &= \frac{(R^2 + x^2)^{3/2} - x \frac{3}{2} (R^2 + x^2)^{1/2} 2x}{(R^2 + x^2)^3} \\ &= \frac{(R^2 + x^2) - 3x^2}{(R^2 + x^2)^{5/2}} = 0 \end{aligned} \quad (11.16.4)$$

A nevező sosem lehet nulla, ezért átszorozhatunk vele

$$R^2 - 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{R}{\sqrt{2}}. \quad (11.16.5)$$

Eszerint E_x szélsőértéke lehet az $x = \frac{R}{\sqrt{2}}$ helyen. Ez akkor valóban maximum ha a második derivált ezen a helyen negatív.

Gauss-törvény

11.17. Feladat: Egy R és egy $3R$ sugarú koncentrikus gömböt feltöltünk, a belsőt $-Q$, a külsőt $2Q$ töltéssel. Adja meg a térerősséget a hely (r) függvényében, és sematikusán ábrázolja is az egyes tartományokban:

- (a) $0 < r < R$ esetén,
- (b) $R < r < 3R$ esetén,
- (c) $r > 3R$ esetén.

Megoldás:

(a) A $0 < r < R$ esetben a belső gömb belsejében nincs töltés, így a Gauss-törvény értelmében az elektromos térerősség nagysága

$$E(0 < r < R) = 0. \quad (11.17.1)$$

(b) A $R < r < 3R$ esetben a $-Q$ töltés hozza létre az elektromos térerősséget:

$$E4r^2\pi = \frac{-Q}{\epsilon_0}, \quad (11.17.2)$$

azaz

$$E(R < r < 3R) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (11.17.3)$$

(c) Az $r > 3R$ esetben az r sugarú gömb $Q = 2Q - Q$ eredő töltést vesz körül. Így az elektromos térerősség:

$$E(3R < r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (11.17.4)$$

11.18. Feladat: (HN 25A-5) Két végtelen, szigetelő sík mindegyikén egyenletes σ töltéssűrűség van. A síkok egymással párhuzamosak. A szuperpozíciós elv használatával határozzuk meg a két sík közötti, illetve az azokon kívül lévő elektromos térerősséget.

Megoldás: A két sík egyike (1) legyen az origón átmenő y - z síkban, míg a másik (2) ezzel párhuzamos menjen át az $x = +d$ ponton.

Az (1) síkon lévő töltések által keltett elektromos térerősség
 $-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ a $(-\infty, 0)$ tartományban, míg
 $+\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ a $(0, +\infty)$ tartományban.

Az (2) síkon lévő töltések által keltett elektromos térerősség

$-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ a $(-\infty, +d)$ tartományban, míg

$+\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ a $(+d, +\infty)$ tartományban.

A szuperpozíció elve miatt (a terek vektori módon adódnak össze) a kialakuló erőtér:

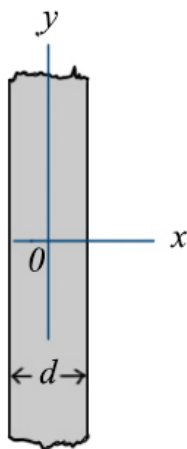
$-\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ a $(-\infty, 0)$ tartományban,

0 a $(0, d)$ tartományban, és

$+\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ a $(+d, +\infty)$ tartományban.

11.19. Feladat:

11.20. Feladat: (HN 25B-7) Egy d vastagságú lemezben egyenletes ρ térfogatmenti töltés van. A lemez a $\pm y$ és $\pm z$ irányokban gyakorlatilag végtelen (65. ábra); az x tengely zéruspontját úgy választottuk meg, hogy az a lemez d szélességének a felénél legyen. Számítsuk ki az elektromos térerősség nagyságát x pozitív értékeire az a) $0 < x < d/2$; b) $x > d/2$ esetekre.



65. ábra. A 25B-7 feladathoz

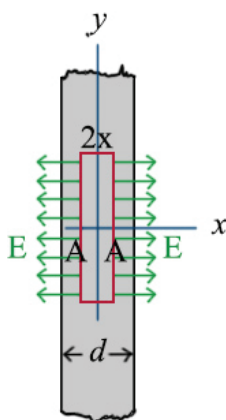
Megoldás: Az elektrosztatikus térerősség forrásai a töltések, ezért: 1) a szimmetria miatt a térerősségnek csak x komponense van, 2) pozitív töltéssűrűség esetén pozitív x -ekre pozitív, negatív x -ekre negatív irányú, emiatt 3) a lemez szélességének felező síkjában nulla.

A Gauss törvény szerint

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 E \text{ fluxusa egy zárt } A \text{ felületre} &= \text{Az összes töltés a felületen belüli térfogatban} \\ \int_A \varepsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{A} &= \int_{V(A)} \rho dV \end{aligned} \quad (11.20.1)$$

Vegyünk fel a lemez belsejében egy olyan, $2x$ magasságú hengerszerű testet, pl. egyenes hasábot, amelynek két egymással és a lemez felületével párhuzamos A nagyságú felülete van és amely magasságát a lemez középpárhuzamos síkja felezi (ld. 66 ábra.) Erre felírva a (11.20.1)

66. ábra. Térerősség egy egyenletesen töltött szigetelő lemezben



Gauss törvényt és felhasználva, hogy a lemez belsejében ρ állandó, illetve \mathbf{E} a hasáb mindkét A felületére merőleges és kifelé mutat, továbbá, hogy a hasáb oldallapjaival/palástjával \mathbf{E} párhuzamos, tehát azokra fluxusa 0:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 E 2A &= \rho \cdot A 2x \\ E &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} x \quad |x| \leq \frac{d}{2} \end{aligned} \quad (11.20.2)$$

A lemezen kívül ($|x| > d/2$) a térerősség állandó⁴ és értéke (11.20.2) maximuma, azaz

$$E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \quad (11.20.3)$$

Vegyük észre, hogy a lemezen kívül a tér pontosan ugyanolyan, mint egy végtelen σ töltéssűrűségű 2D lemez esetén, mivel $\sigma = \rho d$.

⁴Ez szimmetria okokból is következik.

11.21. Feladat: (HN 25A-10) Tekintsünk egy 10 cm sugarú üreges fémgömböt, amelyen $+10 \mu\text{C}$ töltés van. Legyen a gömb középpontja a koordinátarendszer origójában. A gömb belsejében az $x = 5 \text{ cm}$ pontban legyen egy $-3 \mu\text{C}$ nagyságú pontszerű töltés. Számítsuk ki az elektromos térerősséget a gömbön kívül, az x tengely mentén. Vázoljuk fel az erővonalakat a gömbön kívül és azon belül.

Megoldás: X

11.22. Feladat: (HN 25B-12) Egy nagyon hosszú, R sugarú fémrúdon σ egyenletes felületmenti töltéssűrűség van.

(a) Elhanyagolva a rúd végeinek hatását, számítsuk ki az \mathbf{E} térerősséget a henger felszínétől R távolságban.

(b) Számítsuk ki azt a v sebességet, amellyel egy elektron a rúd körül R távolságban stacionárius körpályán mozog.

Megoldás:

(a) Az, hogy a fémrúd nagyon hosszú azt jelenti, hogy (első közelítésben) végtelennek tekinthetjük. Szimmetria okokból a térerősség merőleges kell legyen az egyenletesen feltöltött henger felületére, ezért nagysága csak a távolságtól függ. A Gauss törvény használatához egy, a fémrúddal koaxiális henger alakú, r sugarú és l hosszúságú felületet vegyünk fel. Mivel a térerősség ennek a hengernek a palástjára mindenütt merőleges és állandó nagyságú a határoló körök síkjával pedig párhuzamos, erre a teljes zárt felületre vett fluxus megegyezik az r sugarú hengerpalástra vett fluxussal. Az ezen a felületen belüli összes töltés pedig a σ töltéssűrűség és a fémrúd l hosszúságú szakasza felületének szorzata. A Gauss törvény szerint tehát a térerősség a vezetőkön kívül

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 2r\pi l E &= 2R\pi l \sigma \\ E(r) &= \frac{R\sigma}{\varepsilon_0 r} \end{aligned} \quad (11.22.1)$$

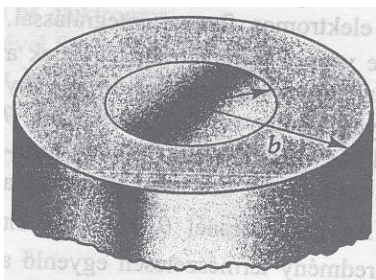
Innen a térerősség a fémrúdtól R távolságban ($r = 2R$)

$$E(R) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (11.22.2)$$

(b) Ha egy elektron kering ezen az $r = 2R$ sugarú körpályán, akkor

$$-eE = -\frac{m_e v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eER}{m_e}} = \sqrt{\frac{e\sigma R}{\varepsilon_0 m_e}}. \quad (11.22.3)$$

11.23. Feladat: (HN 25C-15) A 67 ábrán illusztrált a belső és b külső sugarú, végtelen hosszú cső fala pozitív töltésű. A ρ töltéssűrűség nem egyenletes: a és b között a tengelytől mért távolsággal fordított arányban változik, azaz ha $a \leq r \leq b$, $\rho = k/r$, ahol k egy SI egységekben megadott konstans.



67. ábra.

- (a) Mi a k mértékegysége?
 (b) Számítsuk ki az L hosszúságú csődarab Q töltését.
 (c) Gauss törvényét felhasználva, határozzuk meg az E elektromos térerősséget az r pontban ($a < r < b$).

Megoldás:

- (a) A k mértékegysége C/m^2 .
 (b) A L hosszúságú csődarab Q töltése

$$Q = \int_a^b \rho(r) 2r\pi L dr = \int_a^b 2k\pi L dr = 2k\pi L(b-a). \quad (11.23.1)$$

- (c) Az E elektromos térerősséget az r pontban a

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV \quad (11.23.2)$$

összefüggés alkalmazásával (Gauss-törvény) határozzuk meg. Ennek megfelelően

$$E 2r\pi L = \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^r \rho(r) 2r\pi L dr = \frac{1}{\epsilon_0} 2k\pi L(r-a). \quad (11.23.3)$$

Innen a térerősség ($a < r < b$) tartományban

$$E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} k \left(1 - \frac{a}{r}\right). \quad (11.23.4)$$

Megjegyzés: További gyakorló feladat a csőn kívüli térerősség kiszámolása.

11.24. Feladat: (HN 25C-18) Egy R sugarú gömbben az \mathbf{E} elektromos térerősség kifelé mutat, és értéke mindenütt konstans, E_o . Így, $E = E_o \hat{\mathbf{r}}$, ahol $\hat{\mathbf{r}}$ a kifelé mutató sugárirányú egységvektor.

(a) Felhasználva Gauss törvényét vezessük le hogy hogyan függ a $\rho(r)$ térfogatmenti töltéssűrűség az r sugártól. (Útmutatás: az integrálszámítás alaptétele szerint⁵ ha $g(x) = \int_o^x f(t)dt$, akkor $\frac{dg}{dx} = f(x)$)

(b) A gömb középpontjával kapcsolatban milyen nehézség adódik?

Megoldás: Legyen a gömbben a töltéssűrűség ρ . Mivel \mathbf{E} \mathbf{r} irányú a tér gömszimmetrikus, ezért ρ csak a távolságtól függ, az iránytól nem. $\rho = \rho(r)$. A (11.20.1) Gauss törvény alkalmazásához vegyünk fel egy r sugarú koncentrikus A gömbfelületet. Erre a felületre \mathbf{E} mindenhol merőleges, így a Gauss törvény szerint

$$\varepsilon_o E(r) 4\pi r^2 = \int_{V(r')} \rho(r) dV' \quad (11.24.1)$$

A jobboldal integrál kiszámításához vegyük figyelembe, hogy $\rho = \rho(r)$ csak r nagyságától függ, ezért a térfogatra való integrálást elvégezhetjük úgy is, hogy térfogatelemeknek r' sugarú és dr' vastagságú gömbhéjakat választunk⁶. Egy ilyen gömbhéj dV' térfogata $dV' = 4\pi r'^2 dr'$, töltése $dQ = \rho(r') dV' = 4\pi \rho r'^2 dr'$, azaz a Gauss törvény szerint:

$$\varepsilon_o E(r) 4\pi r^2 = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (11.24.2)$$

$$\varepsilon_o E_o r^2 = \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (11.24.3)$$

Az integrálszámítás alaptétele

$$\text{ha } g(r) = \int_0^r f(r') dr' \quad \text{akkor} \quad (11.24.4)$$

$$f(r) = \frac{dg(r)}{dr} \quad (11.24.5)$$

⁵Az integrálási változó neve bármi lehet, amit nem keverhetünk össze az integrálás határával. Itt a t -t választottuk.

⁶Vagyis az A felület által határolt térfogatot felosztjuk koncentrikus, dr' vastag $dV'_G = dA' \cdot dr' G(r')$ gömbhéjakra, amelyekben ρ jó közelítéssel állandó, tehát az integrál ezekre egyszerűen kiszámítható, majd az így kapott függvényt integráljuk 0 és R között:

$$\begin{aligned} \int_{V(r)} \rho(r') dV' &= \int_0^r \int_{G(r')} \rho(r') dV'_G = \int_0^r \left(\rho(r') \int_{G(r')} dA'_G \right) dr' \\ &= \int_0^r (\rho(r') 4\pi r'^2) dr' = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \end{aligned}$$

A mi esetünkben

$$f(r) \equiv \rho(r)r^2 \quad (11.24.6)$$

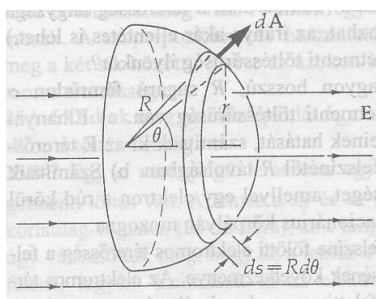
$$g(r) \equiv \varepsilon_o E_o r^2 \quad (11.24.7)$$

Tehát

$$\begin{aligned} \rho(r)r^2 &= 2\varepsilon_o E_o r \\ \rho(r) &= 2\varepsilon_o E_o \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (11.24.8)$$

b) Látható, hogy ha $r \rightarrow 0$, akkor $\rho(r) \rightarrow \infty$.

11.25. Feladat: (HN 25C-19) Ahogyan a 68 ábrán látható, az \mathbf{E} térerősségű homogén elektromos térbe úgy helyezünk egy R sugarú sík lappal zárt félgömböt, hogy az erővonalak e sík lapon merőlegesen haladjanak át. Számítsuk ki a görbült felületen a Φ elektromos fluxust integrálással. *Útmutatás:* Figyelembe véve a szimmetriát, legyenek a dA elemi felületek az ábrán illusztrált olyan vékony gyűrűk (sávok), amelyek mentén az \mathbf{E} és dA közötti θ szög állandó. A sávok dA területe a $2\pi(R\sin\theta)$ hosszuk és a $Rd\theta$ szélességük szorzata. Ennélfogva $dA = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$. Az összegzésnél θ , zérus és $\pi/2$ között változik. Az eredmény természetesen egyenlő a sík lapon átmenő fluxussal, de ellentétes előjelű azaz $-ER^2\pi$. A teljes zárt felületen a fluxus zérus.



68. ábra.

Megoldás: Az elektromos tér fluxusának kiszámolásához a félgömbre szükségünk van a dA felületelemre:

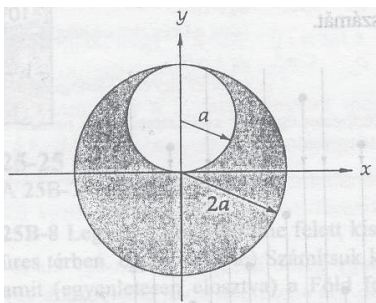
$$dA = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta. \quad (11.25.1)$$

Figyelembe kell venni, hogy a dA iránya θ szöget zár be az E elektromos térrel, így a skalárszorzás miatt megjelenik egy $\cos\theta$ -val való szorzás. Az elektromos tér fluxusa a félgömbre:

$$\Phi_E = E \int_0^{\pi/2} 2\pi R^2 \sin\theta \cos\theta d\theta = ER^2\pi, \quad (11.25.2)$$

ahogy annak lennie is kell.

11.26. Feladat: (HN 25C-20) Szigetelő anyagból készült $2a$ sugarú gömbben az egyenletes térfogati töltéssűrűség ρ . (Tételezzük fel, hogy a gömb anyagának nincs hatása a térerősség nagyságára.) A 69. ábrán látható helyen a gömbben a sugarú gömb alakú üreget képezünk. Mutassuk meg, hogy az üregben az elektromos térerősség homogén és nagysága, $E_x = 0$ és $E_y = \rho a / (3\epsilon_0)$.



69. ábra.

Megoldás: Tekintsünk az üregen (kis gömbön) belül egy P pontot, az egyszerűség kedvéért úgy, hogy helyvektorának x koordinátája pozitív legyen, valamint y koordinátája nagyobb legyen mint a , és a forgásszimmetria miatt $z=0$. Jelölje ekkor a nagyobb gömb középpontjából a P pontba húzott sugarat r , míg a kisebb gömb középpontjából r' . Ha r és r' a vízszintessel φ és α szöget zárnak be, akkor fenn állnak, hogy

$$r' \cos \alpha = r \cos \varphi, \quad (11.26.1)$$

illetve

$$r' \sin \alpha + a = r \sin \varphi. \quad (11.26.2)$$

E két összefüggésre szükségünk lesz. Az elektromos teret úgy számoljuk ki, hogy vesszük a $2a$ sugarú homogén gömb terét és ebből levonjuk az a sugarú üregét. A $2a$ sugarú – üreg nélküli – gömbben a térerősség a Gauss-törvény alapján

$$E 4r^2 \pi = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4r^3 \pi}{3}, \quad (11.26.3)$$

amelyből a térerősség nagysága

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r. \quad (11.26.4)$$

A térerősség vektor komponensei

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \cos \varphi, \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \sin \varphi \right). \quad (11.26.5)$$

Az üreg miatt levonandó E' térerősség hasonlóképpen számítandó ki, csak figyelembe kell venni, hogy $r' \alpha$ szöveget zár be a vízszintessel. Így az egyenletek:

$$E' 4r'^2 \pi = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4r'^3 \pi}{3}, \quad (11.26.6)$$

amelyből a térerősség nagysága

$$E' = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r'. \quad (11.26.7)$$

A térerősség vektor komponensei

$$\mathbf{E}' = \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0} r' \cos \alpha, \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r' \sin \alpha \right). \quad (11.26.8)$$

Figyelembe véve a (11.26.1) és (11.26.2) összefüggéseket az üregeken belüli térerősség vektor

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{E} - \mathbf{E}' = \left(0, \frac{\rho a}{3\varepsilon_0} \right), \quad (11.26.9)$$

amit bizonyítanunk kellett.

Az elektromos potenciál

11.27. Feladat: (HN 26A-I) Két egymással párhuzamos fémlapozat 12 voltos elem pólusaihoz csatlakoztatunk.

- Egy nyugalmi helyzetű elektront a negatív lemez mellett elengedünk. Mekkora sebessége lesz a pozitív lemezbe történő becsapódásakor?
- Számítsuk ki az elektron maximális kinetikus energiáját, és adjuk meg eV és joule egységekben is.
- Ha a lemezek távolsága 4 mm, mennyi ideig repült az elektron a lemezek között?
- Ha a lemezek távolsága ettől különböző lenne, változna-e az (a) és (b) kérdésekre adandó válasz?

Megoldás: X

11.28. Feladat: Tekintsünk három – A, B és C jelű – egymással párhuzamos végtelen, páronként d távolságban lévő síklemezt. Az A-n legyen 2σ , a B-n $-\sigma$ és a C-n 4σ felületi töltéssűrűség. Mekkora a lemezek közötti potenciálkülönbség?

Megoldás: A lemezek sorrendje A, B és C. A felületek normális mutasson az x tengely irányába. Az egyes lemezek által létrehozott elektromos térerősségek az irányokkal. Az A lemeztől: Mindkét lemez közötti tartományban

$$\frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (11.28.1)$$

A B lemeztől: Az A-B tartományban

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \quad (11.28.2)$$

a B-C tartományban

$$\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (11.28.3)$$

A C lemeztől mindkét lemez közötti tartományban:

$$\frac{-4\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{-2\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (11.28.4)$$

A térerősség eredője az A-B lemezek között

$$E_{A-B} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}, \quad (11.28.5)$$

míg a B-C lemez között

$$E_{B-C} = \frac{-3\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (11.28.6)$$

A lemezek között munka:

$$W_{A-B} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} d \quad (11.28.7)$$

és

$$W_{B-C} = \frac{-3\sigma}{2\varepsilon_0} d. \quad (11.28.8)$$

Az A lemez legyen $U_A = 0$ potenciálú, így hozzá képest a B

$$U_B = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} d \quad (11.28.9)$$

potenciálú, A-hoz képest C

$$U_C = \frac{4\sigma}{2\varepsilon_0} d = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0} d. \quad (11.28.10)$$

11.29. Feladat: Két proton egymástól d távolságban nyugalmi helyzetből indul. Mekkora lesz a protonok sebessége egymáshoz képest, ha már $3d$ távolságban repülnek? ($d = 100$ nm, a proton töltése $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, a proton tömeg $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg, $K = 9 \cdot 10^9$ Nm²/C²),.

Megoldás: A tömegközépponthez képest mindkét proton v sebességgel repül. Az elektromos tér által végzett munka segítségével

$$K \frac{e^2}{d} - K \frac{e^2}{3d} = 2 \frac{1}{2} m v^2. \quad (11.29.1)$$

Innen a protonok sebessége

$$v = \sqrt{\frac{2Ke^2}{3md}}. \quad (11.29.2)$$

Az egymáshoz viszonyított sebesség $v_{rel} = 2v$.

11.30. Feladat: (HN 26B-5) Egy a oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszög minden egyes csúcán $+q$ töltés van. Számítsuk ki a háromszög középpontja és az oldalak felezőpontja közötti ΔV feszültséget. A középpontban, vagy az oldalak közepén nagyobb a potenciál?

Megoldás: A csúcsok középponttól vett távolsága $a \frac{\sqrt{3}}{3}$, amellyel a középpontbeli U_c potenciál a végtelenhez képest:

$$U_c = 3\sqrt{3}K \frac{q}{a}. \quad (11.30.1)$$

Az oldalközép U_{ok} potenciálja – figyelembe véve, hogy a közelebbi két csúcstól $a/2$ távolságra van, a távolabbi harmadiktól $a \frac{\sqrt{3}}{2}$ -re :

$$U_{ok} = \left(4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) K \frac{q}{a}. \quad (11.30.2)$$

Mivel a $3\sqrt{3} > 4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$, így a háromszög középpontjában nagyobb a potenciál.

11.31. Feladat: Helyezzünk el egy, az origón átmenő (y - z) síkban egy egyenletes σ töltéssűrűségű szigetelő lemezt, valamint egy ugyancsak origón átmenő (x - z) síkú $-\sigma$ töltéssűrűségű ugyancsak szigetelő lemezt.

(a) Mekkora az elektromos térerősség a $0 < x$ és $0 < y$ koordinátájú pontokban?

(b) Legyen az elektromos potenciál értéke az origóban zérus. Mekkora az elektromos potenciál az (a) kérdésbeli (x,y) pontokban?

Megoldás: A σ töltéssűrűségű szigetelő lemezt vegyük közre két – az egyszerűség kedvéért –

azonos távolságú síkkal, majd metsszünk ki mindhárom síkon A felületeket úgy, hogy egymással fedésben legyenek. Ezt követően a Gauss-törvényt alkalmazzuk a térerősség nagyságának kiszámolására:

$$2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}, \quad (11.31.1)$$

azaz

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (11.31.2)$$

Így a σ töltéssűrűségtől származó térerősség vektor

$$\mathbf{E}_1 = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, 0, 0 \right). \quad (11.31.3)$$

Hasonló megfontolásokkal a $-\sigma$ töltéssűrűségtől származó térerősség vektor

$$\mathbf{E}_2 = \left(0, -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, 0 \right). \quad (11.31.4)$$

Az eredő térerősség

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y) = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, 0 \right). \quad (11.31.5)$$

Látható, hogy ez egy helytől független homogén erőter. Egyúttal megállapíthatjuk, hogy konzervatív is. Mivel tetszőleges úton integrálhatunk, így a potenciál

$$U(x, y) = - \int_0^x E_x dx - \int_0^y E_y dy = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}y = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-x + y). \quad (11.31.6)$$

11.32. Feladat: (HN 26B-9) A tér egy tartományában a *volt* egységekben kifejezett V potenciált a

$$V = \left(3 \left[\frac{V}{m^2} \right] \right) x^2 + \left(0, 2 \left[\frac{V}{m} \right] \right) y$$

függvény adja meg, ahol x és y méterekben megadott távolságok. Számítsuk ki az $x = 10$ cm, $y = 15$ cm koordinátájú helyen levő elektronra ható erő nagyságát és irányát.

Megoldás: A potenciál és a térerősség közötti kapcsolat

$$\mathbf{E} = -\text{grad}V(\mathbf{r}) \quad (11.32.1)$$

$$E_x = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z},$$

Esetünkben $V(x, y, x) = V(x, y) = Ax^2 + By$

$$\begin{aligned} E_x &= -2Ax, & E_y &= -B, & E_z &= 0 \\ F_x &= 2eAx, & F_y &= eB \\ F &= e \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = e \sqrt{4A^2 x^2 + B^2} \end{aligned} \quad (11.32.2)$$

Az erő iránya az x tengellyel α szöget zár be, ahol $\operatorname{tg} \alpha = \frac{B}{2Ax}$, $B = 0,2 \left[\frac{V}{m} \right]$, $A = 3 \left[\frac{V}{m/2} \right]$ és

$2Ax = 0,6 \left[\frac{V}{m} \right]$ Behelyettesítve a számértékeket

$$F_x = 6 \cdot 0,1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 9,6 \cdot 10^{-20} \text{ N} \quad F_y = 0,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 3,2 \cdot 10^{-20} \text{ N}$$

$$F = \sqrt{9,6^2 + 3,2^2} \cdot 10^{-20} = 1,0119 \cdot 10^{-19} \text{ N}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,2/0,6 = 0,33 \Rightarrow \alpha = 18,4^\circ. \quad (11.32.3)$$

11.33. Feladat: (HN 26B-12) Két egyforma kicsiny fémgömb töltése q_1 illetve q_2 . Egymást 1 m távolságból $9 \times 10^{-3} \text{ N}$ erővel vonzzák. A gömböket összeérintjük, majd újból egymástól 1 m távolságra helyezük el. Ekkor úgy találjuk, hogy $2 \times 10^{-3} \text{ N}$ erővel taszítják egymást. Számítsuk ki a q_1 és q_2 töltéseket.

Megoldás: Összeérintés előtt a gömböknek különböző előjelű töltése volt ezért vonzották egymást. Összeérintés után a töltéseik kiegyenlítődték és mindkettő töltése azonos előjelűvé és $q = \frac{q_1 + q_2}{2}$ nagyságúvá vált, ezért taszítják egymást⁷ Az egyenleteket felírva

$$\begin{aligned} |F_1| &= K \frac{|q_1 q_2|}{r^2} = 9 \cdot 10^9 q_1 q_2 = 9 \cdot 10^{-3} \text{ N} \\ |F_2| &= K \frac{q^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 q^2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \end{aligned} \quad (11.33.1)$$

innen, mivel vagy q_1 , vagy q_2 negatív kell legyen

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 &= -9 \cdot 10^{-3} / 9 \cdot 10^9 = -10^{-12} \text{ C}^2 \\ \left(\frac{q_1 + q_2}{2} \right)^2 &= 2 \cdot 10^{-3} / 9 \cdot 10^9 = 2,22 \cdot 10^{-13} \text{ C}^2; \\ \frac{q_1 + q_2}{2} &= \pm \sqrt{2,22 \cdot 10^{-13}} \text{ C} \\ q_1 + q_2 &= \pm 2 \cdot \sqrt{2,22 \cdot 10^{-13}} = \pm 9,4234 \cdot 10^{-7} \text{ C} \\ q_2 &= -10^{-12} \frac{1}{q_1} \\ q_1 - 10^{-12} \frac{1}{q_1} &= \pm 9,4234 \cdot 10^{-7} \text{ C} \\ q_1^2 \mp 9,4234 \cdot 10^{-7} \cdot q_1 - 10^{-12} &= 0. \end{aligned} \quad (11.33.2)$$

A két egyenletet felírva

$$q_1^2 - 9,4234 \cdot 10^{-7} \cdot q_1 - 10^{-12} = 0 \quad (11.33.4)$$

$$q_1^2 + 9,4234 \cdot 10^{-7} \cdot q_1 - 10^{-12} = 0. \quad (11.33.5)$$

⁷ Ez arra utal, hogy kezdetben nem volt azonos nagyságú a töltésük.

Jelöljük a négyzetgyök előjelét felső indexben

$$q_{1,\pm}^+ = \frac{9,4234 \cdot 10^{-7} \pm \sqrt{3,5555 \cdot 10^{-12} + 4 \cdot 10^{-12}}}{2} \quad (11.33.6)$$

$$= \frac{9,4234 \cdot 10^{-7} \pm 2,7487 \cdot 10^{-6}}{2} \quad (11.33.7)$$

$$q_{1,\pm}^- = \frac{-9,4234 \cdot 10^{-7} \pm \sqrt{3,5555 \cdot 10^{-12} + 4 \cdot 10^{-12}}}{2} \quad (11.33.8)$$

$$= \frac{-9,4234 \cdot 10^{-7} \pm 2,7487 \cdot 10^{-6}}{2} \quad (11.33.9)$$

$$q_1^+ = \begin{cases} 1,5767 \cdot 10^{-6} \text{ C} \\ -6,3425 \cdot 10^{-7} \text{ C} \end{cases} \quad (11.33.10)$$

$$q_2^+ = \begin{cases} -6,3425 \cdot 10^{-7} \text{ C} \\ 1,5767 \cdot 10^{-6} \text{ C} \end{cases} \quad (11.33.11)$$

$$q_1^- = \begin{cases} -1,5767 \cdot 10^{-6} \text{ C} \\ 6,3425 \cdot 10^{-7} \text{ C} \end{cases} \quad (11.33.12)$$

$$q_2^- = \begin{cases} 6,3425 \cdot 10^{-7} \text{ C} \\ -1,5767 \cdot 10^{-6} \text{ C} \end{cases} \quad (11.33.13)$$

Innen látható, hogy elég lett volna a négyzetgyökvonásnál a pozitív előjelet használni amivel megkaptuk volna a az első két megoldást, majd utána felcserélni az előjeleket a második két megoldáshoz. Visszahelyettesítve pl. ez első két megoldást és elhagyva a felső indexet

$$K \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1,5767 \cdot 10^{-6} \cdot 0,63425 \cdot 10^{-6}}{1} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ N}, \quad (11.33.14)$$

$$K \frac{\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1,5767 \cdot 10^{-6} + 0,63425 \cdot 10^{-6})^2}{4} = 2,00 \cdot 10^{-3} \text{ N}. \quad (11.33.15)$$

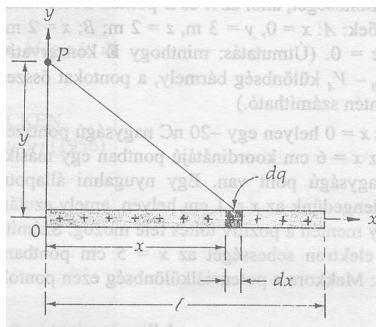
11.34. Feladat: (HN 26C-15) Egy l hosszúságú, vékony szigetelő rúdon egyenletesen elosztva Q töltés van. Számítsuk ki a Velektromos potenciált a rúd végétől y távolságban, a 70 ábrán vázolt helyen lévő P pontban.

Megoldás: Az ábrán látható dq töltés

$$dq = \frac{Q}{l} dx. \quad (11.34.1)$$

Az ettől származó potenciál

$$dU_p = \frac{KQ}{l} \frac{dx}{r}, \quad (11.34.2)$$



70. ábra.

ahol $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. A teljes hosszhoz tartozó potenciál

$$U_p = \int_0^l \frac{KQ}{l} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{KQ}{l} \ln \left[x + \sqrt{x^2 + y^2} \right]_0^l = \frac{KQ}{l} \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + y^2}}{y}. \quad (11.34.3)$$

11.35. Feladat: (HN 26C-17) Egy R sugarú gömb belsejében a töltéssűrűség a középponttól való r távolsággal arányos, azaz $\rho(r) = Ar$, ha $(0 < r < R)$, ahol A egy állandó.

- Mi A SI egysége?
- Mekkora a gömb teljes Q töltése A -val és R -rel kifejezve?
- Gauss törvényét felhasználva számítsuk ki a gömb belsejében és kívül, a középponttól r távolságra az E térerősséget.
- Számítsuk ki a V potenciált r függvényében a gömbön belül is, kívül is. (Legyen $V = 0$ a végtelenben.)

Megoldás:

(a) Az A paraméter mértékegysége C/m^4 .

(b) A gömb teljes töltése:

$$Q = \int_0^R \rho(r) 4r^2 \pi dr = \int_0^R A 4r^3 \pi dr = AR^4 \pi. \quad (11.35.1)$$

(c) A térerősség kiszámolásához

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (11.35.2)$$

a Gauss-törvényt használjuk. A gömbön belüli térrészre alkalmazva

$$E 4r^2 \pi = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho(r) 4r^2 \pi dr = \frac{1}{\epsilon_0} A r^4 \pi, \quad (11.35.3)$$

amelyből

$$E = \frac{A}{4\varepsilon_0} r^2 \quad (0 < r < R). \quad (11.35.4)$$

A gömbön kívüli térrészre az

$$E4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0} AR^4\pi \quad (11.35.5)$$

írható, amelyből

$$E = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (R < r). \quad (11.35.6)$$

(d) Az elektromos potenciál meghatározása a gömbön kívül ($R < r$) az

$$U(r) - U(\infty) = - \int_{\infty}^r \frac{AR^4}{4\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r \quad (11.35.7)$$

integrál kiszámolásával történik. Innen a végtelenbeli zérus potenciálhoz viszonyítva az r -beli potenciál:

$$U(r) = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0} \frac{1}{r} \quad (R < r). \quad (11.35.8)$$

A potenciál a gömb felszínén ugyancsak a végtelenbeli zérus potenciálhoz viszonyítva:

$$U(r) = \frac{AR^3}{4\varepsilon_0} \quad (r = R). \quad (11.35.9)$$

A felületről a gömb belseje felé haladva a potenciálkülönbség

$$U(r) - U(R) = - \int_{R}^r \frac{A}{4\varepsilon_0} r^2 dr = - \frac{A}{12\varepsilon_0} [r^3]_R^r = - \frac{A}{12\varepsilon_0} r^3 + \frac{A}{12\varepsilon_0} R^3. \quad (11.35.10)$$

Így a gömb belsejében lévő r pontban a potenciál a végtelenhez viszonyítva:

$$U(r) = \frac{AR^3}{4\varepsilon_0} - \frac{A}{12\varepsilon_0} r^3 + \frac{A}{12\varepsilon_0} R^3 = - \frac{A}{12\varepsilon_0} r^3 + \frac{A}{3\varepsilon_0} R^3 \quad (0 < r < R). \quad (11.35.11)$$

11.36. Feladat: (HN 26C-18) Számoljuk ki az előző feladatot $\rho = Ar^2$ töltéseloszlást feltételezve.

Megoldás:

(a) Az A paraméter mértékegysége C/m^5 .

(b) A gömb teljes töltése:

$$Q = \int_0^R \rho(r)4r^2\pi dr = \int_0^R A4r^4\pi dr = \frac{4}{5}AR^5\pi. \quad (11.36.1)$$

(c) A térerősség kiszámolásához

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (11.36.2)$$

a Gauss-törvényt használjuk. A gömbön belüli térrészre alkalmazva

$$E4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho(r)4r^2\pi dr = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4}{5} Ar^5\pi, \quad (11.36.3)$$

amelyből

$$E = \frac{A}{5\varepsilon_0} r^3 \quad (0 < r < R). \quad (11.36.4)$$

A gömbön kívüli térrészre az

$$E4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4}{5} AR^5\pi \quad (11.36.5)$$

írható, amelyből

$$E = \frac{AR^5}{5\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (R < r). \quad (11.36.6)$$

(d) Az elektromos potenciál meghatározása a gömbön kívül ($R < r$) az

$$U(r) - U(\infty) = - \int_{\infty}^r \frac{AR^5}{5\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{AR^5}{5\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{\infty}^r \quad (11.36.7)$$

integrál kiszámolásával történik. Innen a végtelenbeli zérus potenciálhoz viszonyítva az r -beli potenciál:

$$U(r) = \frac{AR^5}{5\varepsilon_0} \frac{1}{r} \quad (R < r). \quad (11.36.8)$$

A potenciál a gömb felszínén ugyancsak a végtelenbeli zérus potenciálhoz viszonyítva:

$$U(r) = \frac{AR^4}{5\varepsilon_0} \quad (r = R). \quad (11.36.9)$$

A felületről a gömb belseje felé haladva a potenciálkülönbség

$$U(r) - U(R) = - \int_{\infty}^R \frac{A}{5\varepsilon_0} r^3 dr = - \frac{A}{20\varepsilon_0} [r^4]_R^r = - \frac{A}{20\varepsilon_0} r^4 + \frac{A}{20\varepsilon_0} R^4. \quad (11.36.10)$$

Így a gömb belsejében lévő r pontban a potenciál a végtelenhez viszonyítva:

$$U(r) = \frac{AR^4}{5\varepsilon_0} - \frac{A}{20\varepsilon_0} r^4 + \frac{A}{20\varepsilon_0} R^4 = - \frac{A}{20\varepsilon_0} r^4 + \frac{A}{4\varepsilon_0} R^4 \quad (0 < r < R). \quad (11.36.11)$$

Kondenzátorok

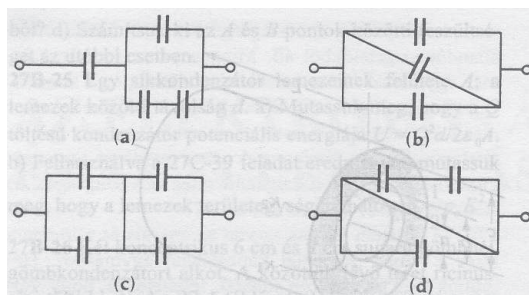
11.37. Feladat: (HN 27A-1) Két, egymástól 1 mm-re lévő, 1 cm² felületű, egymással párhuzamos lemez által alkotott kondenzátor kapacitása kb. 1 pF. Számítsuk ki a kapacitás pontos értékét.

Megoldás: Adatok: $d = 1$ mm; $A = 1$ cm². A kondenzátor kapacitása:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8,85 \cdot 10^{-13} \text{F}, \quad (11.37.1)$$

amely hozzávetőlegesen 1 pF.

11.38. Feladat: (HN 27A-3) Határozzuk meg a 71. ábra áramköreinek eredő kapacitását. Minden kondenzátor C kapacitású.



71. ábra.

Megoldás: Az eredő kapacitás különböző esetekben:

(a)

$$C_e = \frac{3}{5}C; \quad (11.38.1)$$

(b)

$$C_e = 3C; \quad (11.38.2)$$

(c)

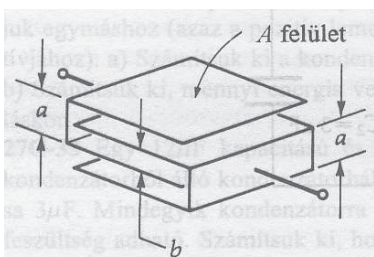
$$C_e = C; \quad (11.38.3)$$

(d)

$$C_e = 0, \quad (11.38.4)$$

mert a kondenzátorok rövidre vannak zárva.

11.39. Feladat: (HN 27B-7) Számítsuk ki a 72 ábrán látható kondenzátor kapacitását. Hanyagoljuk el a lemezek szélein az erőter inhomogenitásának a hatását. Indokoljuk meg a számítás egyes lépéseit.



72. ábra.

Megoldás: Jelölések: Jelöljük a lemezeket felülről 1, 2, 3 és 4 számokkal, az 1-2 közötti térrészt (1)-gyel, a 2-3 közötti térrészt (2)-vel és a 3-4 közötti térrészt (3)-mal. Az ábra szerint az (1) térrész $a-b$ szélességű, a (2) b szélességű, a (3) $a-b$ szélességű. Mindegyik lemez A felületű, a végek hatásától eltekintünk. Legyen az 1 és 3 lemez zérus, a 2 és 4 lemez U_0 potenciálon. Ekkor a térerősség vektor nagysága és iránya az

(1) térrészben

$$E_{(1)} = \frac{U_0}{a-b} \quad (11.39.1)$$

és a 2 lemeztől az 1 felé mutat;

(2) térrészben

$$E_{(2)} = \frac{U_0}{b} \quad (11.39.2)$$

és a 2 lemeztől az 3 felé mutat;

(3) térrészben

$$E_{(3)} = \frac{U_0}{a-b} \quad (11.39.3)$$

és a 4 lemeztől az 3 felé mutat.

Gauss törvényét alkalmazva az egyes lemezekben lévő töltések:

$$Q_1 = -\varepsilon_0 A \frac{U_0}{a-b}; \quad (11.39.4)$$

$$Q_2 = \varepsilon_0 A \frac{U_0}{a-b} + \varepsilon_0 A \frac{U_0}{b}; \quad (11.39.5)$$

$$Q_3 = -\varepsilon_0 A \frac{U_0}{a-b} - \varepsilon_0 A \frac{U_0}{b}; \quad (11.39.6)$$

$$Q_4 = \varepsilon_0 A \frac{U_0}{a-b}. \quad (11.39.7)$$

Természetes teljesül, hogy

$$|Q_1 + Q_3| = Q_2 + Q_4. \quad (11.39.8)$$

A kondenzátor töltése tehát

$$Q = Q_2 + Q_4 = \varepsilon_0 A \left(2 \frac{U_0}{a-b} + \frac{U_0}{b} \right), \quad (11.39.9)$$

amellyel az eredő kapacitás

$$C_e = \frac{Q}{U_0} = \varepsilon_0 A \left(\frac{2}{a-b} + \frac{1}{b} \right) = \varepsilon_0 A \frac{a+b}{(a-b)b}. \quad (11.39.10)$$

11.40. Feladat: (HN 27B-8) A $2 \mu\text{F}$ és $3 \mu\text{F}$ kapacitású kondenzátorra egyenként U_{max} maximális feszültség adható. Ha e két kondenzátort sorba kapcsoljuk, a két végpont közötti maximális feszültség 800 V . Mekkora V_{max} ?

Megoldás: Adatok: $C_1 = 2 \mu\text{F}$, $C_2 = 3 \mu\text{F}$, $U = 800 \text{ V}$.

A két kondenzátor eredő kapacitása

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 1,2 \mu\text{F}. \quad (11.40.1)$$

A kondenzátorokon lévő töltés egyaránt

$$Q = C_e U = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U = 9,6 \cdot 10^{-4} \text{ C}. \quad (11.40.2)$$

A kondenzátorokra eső feszültség

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U = 480 \text{ V} \quad (11.40.3)$$

és

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U = 320 \text{ V}. \quad (11.40.4)$$

Így értelemszerűen $U_{max} = 480 \text{ V}$.

11.41. Feladat: (HN 27B-9) A gömbkondenzátor kapacitása

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a},$$

ahol a és b a belső, illetve külső gömb sugara. Ha mind a , mind b nagyon nagyvá válik, (de különbségük továbbra is kicsiny) egy kis tartományban a felületek párhuzamos síkokkal közelíthetők. Mutassuk meg, hogy a fenti összefüggés a síkkondenzátor kapacitását megadó képlette egyszerűsödik.

Megoldás: A $b-a$ különbség a két fegyverzet közötti d távolság. Ha $a \sim b$, akkor a $4\pi ab = 4\pi a^2$ a fegyverzet A felülete. Ezek behelyettesítésével:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d}, \quad (11.41.1)$$

amely a síkkondenzátor kapacitása.

11.42. Feladat: (HN 27A-12) Becsüljük meg azt a legnagyobb potenciált, amelyre egy 10 cm átmérőjű fémgömböt fel lehet tölteni, anélkül, hogy a térerősség értéke meghaladná a környező száraz levegő dielektromos átütési szilárdságát.

Megoldás: A feltöltött R sugarú fémgömb felületén a térerősség és a potenciál pontosan akkora, mintha a teljes töltése a középpontjában lenne:

$$E(R) = K \frac{Q}{R^2} \quad (11.42.1)$$

$$|\Phi(R)| = K \frac{Q}{R} = E(R) \cdot R \quad (11.42.2)$$

A száraz levegő dielektromos átütési szilárdsága $E_0 = 3 \cdot 10^6 \frac{V}{m}$. Innen $|\Phi(R)| = E_0 \cdot R = 3 \cdot 10^6 \cdot 0,05 = 1,5 \cdot 10^5 V$.

11.43. Feladat: (HN 27B-20) Egy $0,1 \mu F$ kapacitású síkkondenzátor lemezei $0,75 m^2$ területűek, a szigetelő réteg dielektromos állandója $2,5$. A kondenzátort $600 V$ -os feszültségre töltjük fel.

(a) Számítsuk ki a lemezek töltését.

(b) Számítsuk ki a szigetelő réteg felületén indukált töltéssűrűséget.

(c) Számítsuk ki a szigetelő rétegben az elektromos térerősséget.

Megoldás: Adatok: $C = 0,1 \mu\text{F}$; $A = 0,75 \text{ m}^2$; $\epsilon_r = 2,5$; $U = 600 \text{ V}$.

(a) A kondenzátor töltése

$$Q = CU = 6 \cdot 10^{-5} \text{ C}. \quad (11.43.1)$$

(b) A σ szabad töltések sűrűsége:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = 8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}, \quad (11.43.2)$$

a σ töltéssűrűség által létrehozott elektromos térerősség

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (11.43.3)$$

Jelölje σ' az indukált töltéssűrűséget. Az ezáltal keletkezett – az őt létrehozó térrel ellentétes – elektromos tér

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}. \quad (11.43.4)$$

E kettő összege adja a dielektrikumbeli teret, amellyel a

$$E + E' = \frac{\sigma}{\epsilon_0} + \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} = E_r \quad (11.43.5)$$

egyenlet írható fel. Ebből az indukált töltéssűrűség

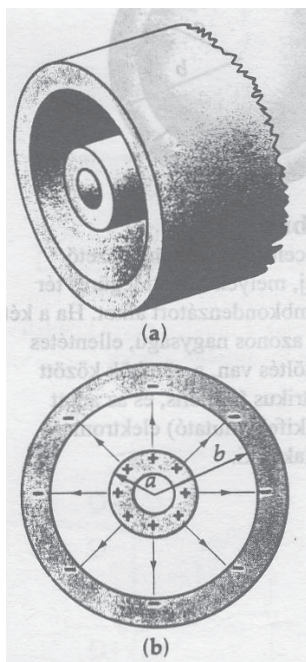
$$\sigma' = \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} \sigma = -4,8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}. \quad (11.43.6)$$

(c) A lemezek közötti térerősség

$$E_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} = 3,614 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}. \quad (11.43.7)$$

11.44. Feladat: (HN 27-3p) A hengerkondenzátor két koaxiális vezető hengerből áll (ld. 73 ábra). A belső hengeres vezető külső sugara a , a külső vezető belső sugara b . Tételezzük fel, hogy a vezetők L hossza nagyon nagy a sugarakhoz képest, így a végeken történő szórt tér hatása elhanyagolható. Legyen a belső hengeres vezetőn $+\sigma$ töltéssűrűség. A Gauss-törvény segítségével határozzuk meg a

(a) a kondenzátoron belüli elektromos térerősséget, ha vákuum tölti ki a teret, illetve ha ϵ_r dielektromos állandójú szigetelő,



73. ábra. A 27-3p feladathoz

- (b) a kondenzátor fegyverzetei közötti elektromos feszültséget,
 (c) a kondenzátor kapacitását.

Megoldás:

(a) Tekintsünk az a és b sugarak közötti r sugarú koncentrikus kört és ezen számoljuk ki a térerősséget. A Gauss-törvény alakja vákuum esetén

$$\int_A \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_A \sigma dA, \quad (11.44.1)$$

amely a mostani feladatban az

$$E(r) \cdot 2r\pi L = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \cdot 2a\pi L \quad (11.44.2)$$

alakban írható. A jobboldalon lévő

$$Q = \sigma \cdot 2a\pi L \quad (11.44.3)$$

a hengerkondenzátoron lévő elektromos töltés. Behelyettesítés után elektromos térerősség

$$E(r) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r}. \quad (11.44.4)$$

Az ϵ_r dielektromos állandójú szigetelő ϵ_r arányban csökkenti az eredő elektromos teret (elektromos feszültséget). Ebben az esetben a szigetelőbeli térerősség

$$E(r) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 \epsilon_r r}. \quad (11.44.5)$$

(b) Az a és b hengeres vezetőik közötti elektromos potenciálkülönbség rögtön a szigetelővel kitöltött tartományra

$$U = U_a - U_b = - \int_b^a E(r) dr = - \int_b^a \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{a}{r} dr = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} a \ln \frac{b}{a}. \quad (11.44.6)$$

(c) A hengerkondenzátor kapacitását a

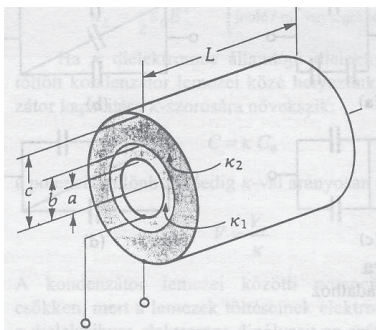
$$Q = CU \quad (11.44.7)$$

összefüggés segítségével számolhatjuk ki. Behelyettesítés után a

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln \frac{b}{a}} \quad (11.44.8)$$

kapacitás adódik.

11.45. Feladat: (HN 27B-21) Tekintsünk egy hengeres kondenzátort, melyben a belső és külső hengerek között két réteg szigetelő anyag van (lásd 74 ábra). Elhanyagolva a szélek hatását, határozzuk meg, hogy C kapacitása miként függ az ábrán megadott paramétereiktől.



74. ábra.

Megoldás: A megoldás során használjuk fel az előző feladatban kapott eredményeket. (Az 74 ábra adatait jelöljük át: $\kappa_1 = \epsilon_1$ ill. $\kappa_2 = \epsilon_2$.) Az elektromos tér eredője az egyes tartományokban

$$E_1(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_1} \frac{a}{r} \quad (a < r < b), \quad (11.45.1)$$

illetve

$$E_2(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_2} \frac{a}{r} \quad (b < r < c). \quad (11.45.2)$$

A potenciálkülönbség a fegyverzetek között

$$\begin{aligned}
 U &= U_a - U_c = (U_a - U_b) + (U_b - U_c) = - \int_b^a E_1(r) dr - \int_c^b E_2(r) dr \\
 &= - \int_b^a \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_1} \frac{a}{r} dr - \int_c^b \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_2} \frac{a}{r} dr = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_1} a \ln \frac{b}{a} + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_2} a \ln \frac{c}{b}.
 \end{aligned} \tag{11.45.3}$$

A hengerkondenzátoron lévő elektromos töltés

$$Q = \sigma \cdot 2a\pi L. \tag{11.45.4}$$

A kifejezéseket összevetve kondenzátor kapacitására

$$C = 2\pi\epsilon_0 L \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 \ln \frac{c}{b} + \epsilon_2 \ln \frac{b}{a}}. \tag{11.45.5}$$

11.46. Feladat: (HN 27B-27) A lemezei között polisztirol réteget tartalmazó síkkondenzátor kapacitása 10 nF. A kondenzátort egy 100 V-os feszültségű telephez kapcsoljuk, és a szigetelő réteget eltávolítjuk a lemezek közül. Számítsuk ki

- (a) valamelyik lemezen a töltésváltozást;
- (b) a tárolt energia változását,
- (c) a szigetelő réteg eltávolításához szükséges munkát.

Megoldás: Adatok: $C = 10$ nF; $U = 100$ V. Táblázatból kikeresve a polisztirol dielektromos állandója $\epsilon_r = 2,5$.

(a) A kondenzátor kezdeti töltése.

$$Q = CU = 10^{-6} \text{C} = 1000 \text{nC}. \tag{11.46.1}$$

A polisztirol réteg kihúzása után a kondenzátor kapacitása 1/2,5-öd részére csökken:

$$Q' = \frac{1}{\epsilon_r} Q = 400 \text{nC}, \tag{11.46.2}$$

így töltés lesz a kondenzátoron. A változás:

$$\Delta Q = Q' - Q = \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1 \right) CU = -600 \text{nC}. \tag{11.46.3}$$

(b) A tárolt energia változása:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \underbrace{\frac{1}{2} \frac{C}{\epsilon_r} U^2}_{E_2} - \underbrace{\frac{1}{2} CU^2}_{E_1} = -3 \cdot 10^{-5} \text{J}. \tag{11.46.4}$$

(c) A polisztirol lap kihúzása során egyrészt van egy W végzett munka és a töltésváltozással kapcsolatos munkája a telepnek. Ez utóbbi:

$$\Delta Q \cdot U = \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1 \right) CU = 2\Delta E. \quad (11.46.5)$$

A felírható egyenlet

$$E_1 + W + \Delta Q \cdot U = E_2 \quad (11.46.6)$$

alakú, amelyből a végzett munka

$$W = E_2 - E_1 - \Delta Q \cdot U = -\Delta E. \quad (11.46.7)$$

Így a végzett munka

$$W = 3 \cdot 10^{-5} \text{ J}. \quad (11.46.8)$$

11.47. Feladat: Egy síkkondenzátor lemezeinek területe 200 cm^2 , a lemezek távolsága $0,1 \text{ cm}$. A fegyverzetek között üveglemez van ($\varepsilon_r = 5$), amely teljesen betölti a kondenzátor lemezei közötti térrészt.

(a) Számítsa ki a kondenzátor kapacitását!

(b) Hogyan változik meg a kondenzátor energiája, ha az üveget eltávolítjuk? A kondenzátor az egész idő alatt egy 300 V elektromotoros erejű telephez van kapcsolva.

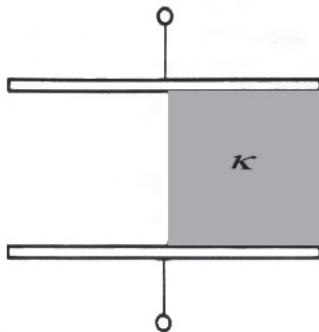
(c) Mekkora az elektromos erőter energia sűrűsége az üveg eltávolítása után?

Megoldás: X

11.48. Feladat: (HN 27C-33) Egy $12 \mu\text{F}$ kapacitású és két $2 \mu\text{F}$ kapacitású kondenzátorból álló kondenzátorhálózat eredő kapacitása $3 \mu\text{F}$. Mindegyik kondenzátorra maximálisan 200 V feszültség adható. Számítsuk ki, hogy az adott kondenzátorhálózatra mekkora maximális feszültség kapcsolható.

Megoldás: Elsőként azt kell kitalálni, hogy miként jöhet ki a $3 \mu\text{F}$ eredő kapacitás egy $12 \mu\text{F}$ kapacitású és két $2 \mu\text{F}$ kapacitású kondenzátorból. Némi próbálgatás után belátható, hogy a két $2 \mu\text{F}$ -os egymással párhuzamosan, míg a $12 \mu\text{F}$ -os ezekkel sorba van kötve. Felhasználjuk, hogy Q töltés van mind a $12 \mu\text{F}$ -os kondenzátoron, mind az egymással párhuzamosan kapcsolt két $2 \mu\text{F}$ -os kondenzátoron összesen. Ha a $2 \mu\text{F}$ -os kondenzátorokra a maximális 200 V feszültséget kapcsolunk, akkor a $12 \mu\text{F}$ -os kondenzátoron $66,7 \text{ V}$ feszültség esik. Így a kondenzátorrendszerre $266,7 \text{ V}$ kapcsolható.

11.49. Feladat: (HN 27C-36) Egy κ dielektromos állandójú szigetelő réteg egy sikkondenzátor lemezei közötti teret a 75 ábrán vázolt módon csak félig tölt ki. Adjuk meg, hogy a teljes energia hányadrésze tárolódik a szigetelő rétegben.



75. ábra. 27C-36 feladathoz

Megoldás: Két megoldást is adunk:

1) Ez az elrendezés két párhuzamosan kapcsolt kondenzátornak felel meg. Ezek kapacitásai:

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{A}{2d}, \quad C_2 = \kappa \varepsilon_0 \frac{A}{2d},$$

ahol A a kondenzátor lemezeinek felülete és d a lemezek távolsága. Így

$$C_2 = \kappa C_1$$

A kondenzátorok párhuzamosan vannak kapcsolva ezért a rajtuk levő feszültség ugyanakkora, a bennük tárolt energia pedig

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} C_1 U^2, \text{ ill. } \frac{1}{2} C_2 U^2$$

Az összenergia e két energia összege, ezért a szigetelőt tartalmazó kondenzátor energiájának (a szigetelőben tárolt energiának) γ aránya az összenergiához képest:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\frac{1}{2} C_2 U^2}{\frac{1}{2} C_1 U^2 + \frac{1}{2} C_2 U^2} \\ &= \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\kappa}{1 + \kappa} \end{aligned} \quad (11.49.1)$$

2) Az elektrosztatikus térben tárolt energia sűrűségét az

$$w = \frac{1}{2} \kappa \varepsilon_0 E^2$$

képlet adja meg. Az ábra szerinti elrendezésben az elektródák ekvipotenciális felületek, a töltéssűrűség konstans. A térerősség merőleges a kondenzátor lemezeire és párhuzamos a betöltő szigetelő hasáb oldalával, ezért az anyagban és a vákuumban ugyanakkora. Tehát az egyes tartományokban az energiasűrűség:

$$w_v = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

$$w_a = \frac{1}{2} \kappa \varepsilon_0 E^2 = \kappa w_v$$

Mivel a kondenzátor lemezek közötti tér fele van anyaggal kitöltve a tárolt energiák aránya megegyezik az energiasűrűségek arányával, tehát

$$\gamma = \frac{w_a}{w_a + w_v} = \frac{\kappa}{1 + \kappa}. \quad (11.49.2)$$

11.50. Feladat: (HN 27C-41) Töltsük fel a sorba kapcsolt a C_1 és C_2 kondenzátort. Ezután a két kondenzátort először a felöltő feszültségforrástól, majd egymástól elválasztva, ellentétes polaritással párhuzamosan kapcsoljuk. Mutassuk meg, hogy a párhuzamos kapcsolás következtében a kezdetben tárolt energia $(C_1 - C_2)^2 / (C_1 + C_2)^2$ hányada "veszett" el.

Megoldás: X

12. Feladatok az elektromos áram tanából

Az elektromos áram

12.1. Feladat: (HN 28B-3) Egy 2 mm-es átmérőjű ezüst huzalon 2 óra 15 perc alatt 420 C töltés halad át.

- Atomonként egy vezetési elektront feltételezve, számítsuk ki a szabad töltések számát az ezüstben (l/m^3 egységekben);
- Mekkora a huzalban folyó áram erőssége?
- Számítsuk ki az elektronok átlagos vándorlási sebességét.

Megoldás: Adatok: $d = 2$ mm; $r = 1$ mm; $t = 2$ óra 15 perc = 8100 s; $Q = 420$ C. Táblázatból: sűrűsége $\rho = 10500$ kg/m³. Az ezüst atomtömege 108, azaz $M = 108$ g/mol; az Avogadro szám $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ 1/mol.

- A térfogategységben található ezüst atomok száma

$$n = \frac{\rho}{M} N_A = 5,83 \cdot 10^{28} \text{ l/m}^3, \quad (12.1.1)$$

amely megegyezik az elektronok számával.

(b) Az áramerősség

$$I = \frac{Q}{t} = 0,052 \text{ A.} \quad (12.1.2)$$

(c) Az j áramsűrűség

$$j = \frac{I}{A} = nev, \quad (12.1.3)$$

ahol $A = r^2\pi$ a keresztmetszet, v a keresett vándorlási sebesség. Innen

$$v = \frac{I}{Ane} = 1,77 \cdot 10^{-6} \text{ m/s.} \quad (12.1.4)$$

12.2. Feladat: (HN 28B-4) Van de Graaf generátor mozgó szíja 30 cm széles és 20 m/s sebességgel halad. A szállított töltések a szíj egyik oldalán egyenletesen oszlanak el, a nagy potenciálú gömbre szállított töltések áramerőssége $0,15 \mu\text{A}$. Számítsuk ki a szíj felületi töltéssűrűségét.

Megoldás: Adatok: $L = 30 \text{ cm}$; $v = 20 \text{ m/s}$; $I = 0,15 \mu\text{A}$.

A szíj Δt idő alatt

$$\Delta Q = \sigma Lv \Delta t \quad (12.2.1)$$

töltést szállít. Az áram

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \sigma Lv, \quad (12.2.2)$$

amelyből a felületi töltéssűrűség

$$\sigma = \frac{I}{Lv} = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ C/m}^2. \quad (12.2.3)$$

12.3. Feladat: (HN 28A-15) Televíziók képcsövében az elektronágyúból származó elektronok 25 kV-os potenciálkülönbség hatására a képernyő felé gyorsulnak.

(a) Hány watt teljesítmény disszipálódik a képernyőn, ha az elektronnyaláb átlagos áramerőssége $0,21 \text{ mA}$?

(b) Hány elektron csapódik a képernyőbe másodpercenként?

Megoldás:

(a) A disszipált teljesítmény: $P = U \cdot I = 5,25 \text{ W}$.

(b) Az áram az időegység alatt átáramló töltéseket jelenti

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \quad (12.3.1)$$

Itt $\Delta Q = Ne$, ahol N a elektronok száma. Így

$$N = \frac{I\Delta t}{e} = 1,3 \cdot 10^{15}. \quad (12.3.2)$$

12.4. Feladat: (HN 28A-16) Egy 12 V-os autóakkumulátor kapacitása 120 Ah (itt a kapacitás azt jelenti, hogy az akkumulátor kezdeti töltése 120 amper·óra). Parkolás során két 80 W-os fényszóróizzó bekapcsolva marad. Számítsuk ki, hogy hány óra alatt csökken az akkumulátor töltése az eredetinek a felére azt feltételezve, hogy a kapocsfeszültség ezalatt nem változik.

Megoldás: Az izzók összteljesítménye $P = 160$ W. Az $U = 12$ V-os telepfeszültségen

$$I = \frac{P}{U} \quad (12.4.1)$$

áram folyik rajtuk keresztül. A $Q' = 60$ amper·óra töltést

$$t = \frac{Q'}{I} = \frac{Q'U}{P} = 4,5 \text{ óra} \quad (12.4.2)$$

alatt éri el.

12.5. Feladat: (HN 28A-29) Zivatarfelhők környezetében az elektromos térerősség 100 V/m, ugyanitt $6 \cdot 10^{-13}$ A/m² az áramsűrűség. Mekkora az légkör elektromos vezetőképessége ebben a tartományban?

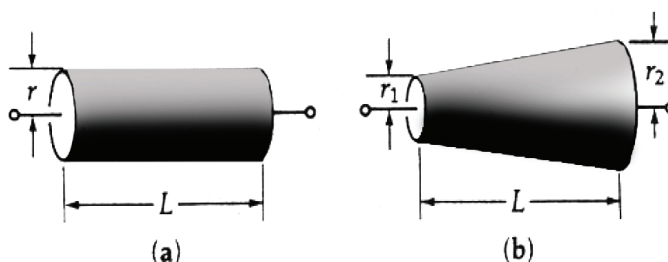
Megoldás: A differenciális Ohm-törvényből

$$\sigma = \frac{j}{E} = 6 \cdot 10^{-15} \text{ S/m}. \quad (12.5.1)$$

Megjegyzés: S: siemens. $1/\Omega = \text{S}$;

$$[\sigma] = \frac{1}{[\rho]} = \frac{1}{\Omega \cdot m} = \frac{\text{S}}{m}.$$

12.6. Feladat: (HN 28C-41) A 76 ábrán két, azonos anyagból gyártott ellenállás látható. A véglapokat vezető réteggel vonták be. Tételezzük fel, hogy az ellenállások belsejében az áramsűrűség bármely, a tengelyre merőleges síkmetszet mentén állandó nagyságú. Mutassuk meg, hogy a két ellenállás azonos nagyságú, ha a henger r sugara egyenlő a csonkakúp r_1 , és r_2 sugarának mértani közepével, azaz $r' = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$. Útmutatás: a R ellenállás nagyságának kiszámításakor számítsuk ki a tengelyszimmetrikus, dx vastagságú, $r(x) = r_1 + (r_2 - r_1) \cdot x/L$ sugarú vékony



76. ábra. 28C-41 feladathoz

körlemezek átellenes lapjai közötti dR ellenállást. A teljes ellenállást ezen elemi ellenállások segítségével, integrálással kaphatjuk meg.)

Megoldás: Osszuk fel a csonkakúp alakú ellenállást párhuzamos dx vastagságú rétegekre! Egy ilyen, az r_1 sugarú, a fedőlaptól x távolságra levő korong sugara, felülete, illetve ellenállása

$$\begin{aligned} r(x) &= r_1 + \frac{(r_2 - r_1) \cdot x}{L} \\ A(x) &= r^2(x) \cdot \pi \\ dR(x) &= \rho \cdot \frac{dx}{A(x)} = \rho \cdot \frac{dx}{r^2(x)\pi} \end{aligned} \quad (12.6.1)$$

A teljes ellenállás ezért

$$R = \rho \cdot \int_0^L \frac{dx}{r^2(x)} \quad (12.6.2)$$

A legegyszerűbben akkor járunk el, ha az x szerinti integrálásról áttérünk az $r(x)$ szerinti integrálásra. (12.6.1) alapján

$$dr = d\left(r_1 + \frac{(r_2 - r_1) \cdot x}{L}\right) = \frac{r_2 - r_1}{L} \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{L}{r_2 - r_1} dr$$

ezért

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho \cdot L}{\pi (r_2 - r_1)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \\ &= \frac{\rho \cdot L}{\pi (r_2 - r_1)} \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \\ &= \frac{\rho \cdot L}{\pi (r_2 - r_1)} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \\ &= \frac{\rho \cdot L}{\pi (r_2 - r_1)} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2}\right) = \\ &= \frac{\rho \cdot L}{\pi r_2 \cdot r_1} \end{aligned} \quad (12.6.3)$$

Ez viszont valóban megegyezik egy olyan egyenes henger alakú rúd ellenállásával, amelynek sugara $r' = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$.

12.7. Feladat: (HN 28C-45) Két vékony, koncentrikus gömbhéj vezető sugara a , ill. b ($a < b$). A köztük lévő teret σ fajlagos vezetőképességű anyag tölti ki. Számítsuk ki a két gömbhéj közötti ellenállást.

Megoldás: Tekintsünk egy r sugarú, dr falvastagságú gömbhéjat. Ennek ellenállása az

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{A} \quad (12.7.1)$$

összefüggés alapján

$$dR = \frac{1}{\sigma} \frac{dr}{4r^2\pi}. \quad (12.7.2)$$

A teljes ellenállás

$$R = \int_a^b \frac{1}{\sigma} \frac{dr}{4r^2\pi} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b = \frac{b-a}{4\pi\sigma ab}. \quad (12.7.3)$$

12.8. Feladat: (HN 28C-46) Az előző feladatban leírt két gömbhéj közé U feszültséget kapcsolunk úgy, hogy a belső gömbhéjpotenciálja legyen nagyobb. Határozzuk meg, hogyan függ a J áramsűrűség a középponttól r távolságban a megadott paramétereiktől.

Megoldás: Az áramerősség

$$I = \frac{U}{R} = \frac{4\pi\sigma abU}{b-a}. \quad (12.8.1)$$

Az áramsűrűség – figyelembe véve, hogy a gömbszimmetria miatt az áramsűrűség a r távolságban minden irányban ugyanannyi –

$$J = \frac{I}{A} = \frac{4\pi\sigma abU}{4r^2\pi(b-a)} = \frac{\sigma abU}{(b-a)r^2}. \quad (12.8.2)$$

RC-körök

12.9. Feladat: (HN 29A-34) Egy C kapacitású kondenzátort R ellenálláson keresztül sütünk ki. Mennyi idő alatt csökken a kondenzátor töltése a kezdeti érték $1/e^2$ -ed részére?

Megoldás: A Kirchhoff-törvény szerint

$$0 = \frac{Q}{C} + RI = \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt}, \quad (12.9.1)$$

amely egyenletet átrendezve

$$\int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{dQ}{Q} = \int_0^t -\frac{1}{RC} dt. \quad (12.9.2)$$

Ennek megoldása

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (12.9.3)$$

A kondenzátor töltése $1/e^2$ -ed részére csökken, így

$$e^{-\frac{t}{RC}} = e^{-2}, \quad (12.9.4)$$

amelyből

$$t = 2RC. \quad (12.9.5)$$

12.10. Feladat: (HN 29A-36) Kondenzátor adott feszültséggel való feltöltésekor a töltés maximumhoz tart. Számítsuk ki, hogy a $\tau = RC$ időállandó hányszorosa az az időtartam, ami ahhoz szükséges, hogy a töltés 2 %-nyira megközelítse a maximumot?

Megoldás: A Kirchhoff-törvény szerint

$$\varepsilon = \frac{Q}{C} + RI = \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt}, \quad (12.10.1)$$

amelyből a változók szeparálásával a

$$\frac{dQ}{Q - \varepsilon C} = -\frac{dt}{RC} \quad (12.10.2)$$

egyenlet adódik. Az integrálást kijelölve

$$\int_0^{Q(t)} \frac{dQ}{Q - \varepsilon C} = \int_0^t -\frac{dt}{RC} \quad (12.10.3)$$

írható. Az integrálást elvégezve megkapjuk, hogy a

$$Q(t) = \varepsilon C (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = Q_0 (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (12.10.4)$$

függvénnyel változik a kondenzátor töltése, ahol $Q_0 = \varepsilon C$ a teljesen feltöltött kondenzátor töltése. A feladat szerint

$$0,98 = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}), \quad (12.10.5)$$

amelyből a kérdéses idő

$$t = -RC \ln 0,02 = 3,912RC. \quad (12.10.6)$$

12.11. Feladat: (HN 29A-37) Egy $10 \mu\text{F}$ -os kondenzátort R ellenálláson keresztül 10 V -os teleppel töltünk. A kondenzátor lemezei közötti potenciálkülönbség a töltés megkezdése után 3 másodperccel éri el a 4 V értéket. Számítsuk ki R nagyságát.

Megoldás: Adatok: $C = 10 \mu\text{F}$; $\varepsilon = 10 \text{ V}$; $t = 3 \text{ s}$; $U_C = 4 \text{ V}$.

A Kirchhoff-törvény szerint

$$\varepsilon = \frac{Q}{C} + RI = \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt}, \quad (12.11.1)$$

amelyből a változók szeparálásával és az integrációs határok megadásával a

$$\int_0^{Q(t)} \frac{dQ}{Q - \varepsilon C} = \int_0^t -\frac{dt}{RC} \quad (12.11.2)$$

egyenlet adódik. Az integrálást elvégezve megkapjuk, hogy a

$$Q(t) = \varepsilon C (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (12.11.3)$$

függvénnyel változik a kondenzátor töltése. A kondenzátor feszültsége

$$U(t) = \varepsilon (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = U_C. \quad (12.11.4)$$

A megadott adatokkal az R ellenállás értéke

$$R = 587 \text{ k}\Omega. \quad (12.11.5)$$

12.12. Feladat: (HN 29B-42) Egy $3 \mu\text{F}$ -os kondenzátort 200 V feszültségre töltünk fel, majd elválasztjuk a töltőáramkörtől. A dielektrikum nem tökéletes szigetelő, ezért a két lemez közötti potenciálkülönbség 5 perc alatt 185 V -ra csökken. Számítsuk ki a dielektrikum ellenállását.

Megoldás: Adatok: $C = 3 \mu\text{F}$; $U_0 = 200 \text{ V}$; $t = 5 \text{ perc} = 300 \text{ s}$; $U = 185 \text{ V}$.

Kezdetben a kondenzátoron lévő töltés: $Q_0 = CU_0$. A Kirchhoff-törvény szerint

$$0 = \frac{Q}{C} + RI = \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt}, \quad (12.12.1)$$

amely egyenletet szeparálva és az integrációs határokat megadva kapjuk:

$$\int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{dQ}{Q} = \int_0^t -\frac{1}{RC} dt. \quad (12.12.2)$$

Ebből a kondenzátoron lévő töltés időfüggése

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (12.12.3)$$

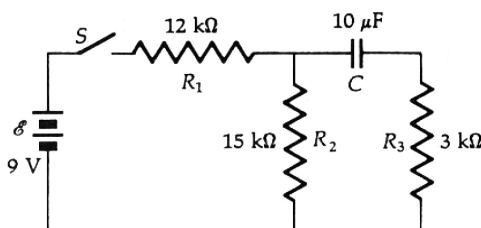
a rajta lévő feszültség

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = U. \quad (12.12.4)$$

Innen a dielektrikum ellenállása

$$R = -\frac{t}{C \ln \frac{U}{U_0}} = 1,28 \cdot 10^9 \Omega. \quad (12.12.5)$$

12.13. Feladat: (HN 29C-62) Tekintsük a 12 áramkört. Kezdetben a kondenzátoron nincs



töltés; a $t = 0$ időponthán az S kapcsolót zárjuk.

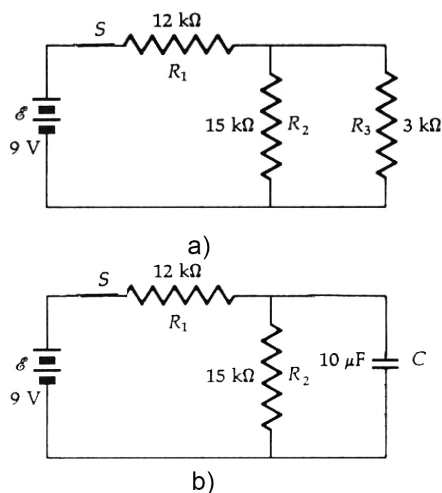
(a) Készítsünk táblázatot, amely az egyes áramköri elemeken folyó áramerősségek (i_{12} , i_{15} és i_c) és a rajtuk létrejövő feszültségesések (u_{12} , u_{15} , és u_c) kezdeti (közvetlenül $t = 0$ utáni) értékét foglalja össze.

(b) Készítsünk egy másik táblázatot is, a fenti mennyiségek stacionárius értékeivel.

Megoldás:

(a) Mielőtt a kapcsolót zárnánk a kondenzátoron nem volt feszültség. A kapcsoló zárásakor a kondenzátor feszültsége nem változhat meg ugrásszerűen, ezért továbbra is 0 marad, vagyis olyan a helyzet, mintha a kondenzátor helyett egy rövidzár lenne. Ezért a kapcsolás ebben a pillanatban ekvivalens a 77 a) ábráján láthatóval.

Ennek az áramkörnek az ellenállása $R(t = 0) = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 14,5 \text{ k}\Omega$ Az R_1 ellenálláson



77. ábra. Helyettesítő kapcsolások a 77 feladathoz

átfolyik a teljes áram, ezért

$$i_{12} \equiv i_{R_1} = \frac{U}{R(t=0)} = \frac{9\text{V}}{14.5\text{k}\Omega} = 6,207 \cdot 10^{-4} \text{ A} \quad (12.13.1)$$

$$u_{12} \equiv u_{R_1} = R_1 \cdot i_{R_1} = 7.448 \text{ V} \quad (12.13.2)$$

$$u_{15} \equiv u_{R_2} = u_{R_3} = U - u_{R_1} = 1.552 \text{ V} \quad (12.13.3)$$

$$i_{15} \equiv i_{R_2} = \frac{u_{R_2}}{R_2} = 1.035 \cdot 10^{-4} \text{ A} \quad (12.13.4)$$

$$u_c = 0 \text{ V} \quad (12.13.5)$$

$$i_c = i_{R_3} = \frac{u_{R_3}}{R_3} = \frac{u_{R_2}}{R_3} = 5.172 \cdot 10^{-4} \text{ A} \quad (12.13.6)$$

(b) Stacionárius állapotban a kondenzátort tartalmazó ágba nem folyik áram és a kondenzátor teljesen fel van töltve, ezért a kondenzátor feszültsége megegyezik az R_2 ellenálláson eső feszültséggel (tehát az R_3 ellenállás sarkai között nincs potenciálkülönbség.) Ld. 77 b) ábra. A körben folyó áram viszont lecsökken, mert az eredő ellenállás most $R_{stac} = R_1 + R_2 = 27\text{k}\Omega$ és csak ezen a két ellenálláson folyik át áram.

$$i_{12} \equiv i_{R_1} = \frac{U}{R(stac)} = \frac{U}{R_1 + R_2} = 3,333 \cdot 10^{-4} \text{ A} \quad (12.13.7)$$

$$u_{12} \equiv u_{R_1} = R_1 \cdot i_{R_1} = 4 \text{ V} \quad (12.13.8)$$

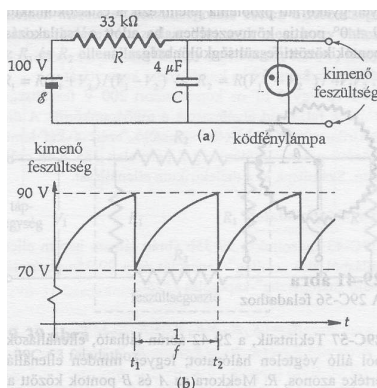
$$u_{15} \equiv u_{R_2} = U - u_{R_1} = 5 \text{ V} \quad (12.13.9)$$

$$i_{15} \equiv i_{R_2} = i_{R_1} = 3,333 \cdot 10^{-4} \text{ A} \quad (12.13.10)$$

$$u_c = u_{15} = 6 \text{ V} \quad (12.13.11)$$

$$i_c = 0 \text{ A} \quad (12.13.12)$$

12.14. Feladat: (HN 29C-63) A 78 ábrán egyszerű fűrészfog-jelgenerátor kapcsolási rajza látható. A neon izzólámpa ellenállása nagyon kicsi, ha a rákapcsolt feszültség eléri a 90 V-os küszöböt, de amikor a feszültség 70 V alá esik, akkor az izzó gyakorlatilag már nem vezeti az áramot. Számítsuk ki az oszcillátor f frekvenciáját.



78. ábra.

Megoldás: X

13. Feladatok a mágneses erőtér témaköréből

Elektromosan töltött részecskék mozgása mágneses erőtérben

13.1. Feladat: (HN 30B-3) Egy elektron mágneses térben $3 \cdot 10^6$ m/s sebességgel halad az x tengely mentén pozitív x irányban. Számítsuk ki az elektronra ható erőt, ha a mágneses fluxussűrűséget tesla egységekben a $\mathbf{B} = 0,4\mathbf{i} + 0,7\mathbf{j} + 0,32\mathbf{k}$ összefüggés adja meg.

Megoldás: Adatok: $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i}$, ahol $v_x = 3 \cdot 10^6$ m/s; $B_x = 0,4$ Vs/m²; $B_y = 0,7$ Vs/m²; $B_z = 0,3$ Vs/m²; $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

A elektronra ható Lorentz-erő:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = e \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -ev_x B_z \mathbf{j} + ev_x B_y \mathbf{k} = 1,44 \cdot 10^{-13} \mathbf{j} - 3,36 \cdot 10^{-13} \mathbf{k} \text{ N.} \quad (13.1.1)$$

13.2. Feladat: (HN 30A-5) Egy proton 0,5T fluxussűrűségű (mágneses erőterben 1,00 cm sugarú körpályán mozog. Mekkora a kinetikus energiája (eV egységekben kifejezve)?

Megoldás: Adatok: $B = 0,5 \text{ T}$; $r = 1,00 \text{ cm}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

A körpályán való mozgást az

$$m \frac{v^2}{r} = evB \quad (13.2.1)$$

mozgásegyenlettel írhatjuk le. A kinetikus energia kifejezését és az előző egyenletet használva

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{r^2 e^2 B^2}{m} = 1,92 \cdot 10^{-16} \text{ J} = 1200 \text{ eV}. \quad (13.2.2)$$

13.3. Feladat: (HN 30A-7) A magnetron a radar-oszcillátorok egy típusa. A radar által kisugárzott mikrohullám frekvenciáját a magnetron mágneses erőterében keringő elektronok ciklotron-frekvenciája szabja meg. Becsüljük meg, milyen mágneses fluxussűrűség szükséges 3 cm-es hullámhosszúságú mikrohullámok előállításához.

Megoldás: A homogén mágneses térben az elektron a tér irányára merőleges síkban körpályán mozog⁸ A körpályán tartást az elektronra ható Lorentz erő biztosítja, ezért

$$\begin{aligned} F_L &= F_{cp} \\ e \cdot |\mathbf{v} \times \mathbf{B}| &= \frac{m_e \cdot v^2}{r} \\ e \cdot v \cdot B &= \frac{m_e \cdot v^2}{r} \\ \frac{e \cdot B}{m_e} &= \frac{v}{r} \end{aligned}$$

De $\frac{v}{r} \equiv \omega$ a keringő elektron körfrekvenciája. Az elektron keringési frekvenciája tehát

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{e \cdot B}{2\pi m_e} \quad (13.3.1)$$

A mikrohullám fénysebességgel terjed, frekvenciája megegyezik az elektron "rezgési" frekvenciájával:

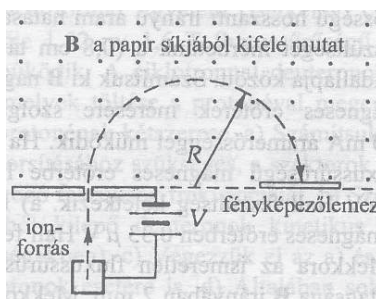
$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi m_e \cdot c}{e \cdot B} \quad (13.3.2)$$

⁸Későbbiekben látni fogjuk, hogy egy gyorsuló töltés energiát sugároz, ezért külső energia betáplálása nélkül az elektron egyre kisebb sugarú körpályára térne át.

ahonnan

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{2\pi m_e \cdot c}{e \cdot \lambda} = \frac{2 \cdot 3,141 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot 2,998 \cdot 10^8}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,03} \\
 &= 0,357 \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s} \cdot \text{C} \cdot \text{m}} = 0,357 \cdot \frac{\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{m}^2} = 0,357 \cdot \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{m}^2} \\
 &= 0,357 \cdot \frac{\text{J}}{\text{A} \cdot \text{m}^2} = 0,357 \cdot \frac{\text{W} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}^2} = 0,357 \cdot \frac{\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}^2} = 0,357 \cdot \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = 0,357 \text{ T}
 \end{aligned}$$

13.4. Feladat: (HN 30B-10) A 79 ábrán bemutatott tömegspektrométerben egyszeresen ionizált, 6 és 7 atomtömegű ($6 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg, illetve $7 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg) lítium ionokat 900V feszültség gyorsít, mielőtt belépnek a $B = 0,04$ T fluxussűrűségű homogén mágneses térbe. Itt egy félkört megtéve fényképezőlemezbe csapódnak, és egymástól x távolságra lévő két foltot idéznek elő. Mekkora ez az x távolság?



79. ábra.

Megoldás: Adatok: $M_6 = 9,96 \cdot 10^{-27}$ kg; $M_7 = 11,62 \cdot 10^{-27}$ kg; $U = 900$ V; $B = 0,04$ T; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

Az egyszeresen ionizált M tömegű ion kinetikus energiáját az U feszültségű gyorsításból nyeri

$$eU = \frac{1}{2}Mv^2. \quad (13.4.1)$$

Innen az elért sebesség

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{M}}. \quad (13.4.2)$$

A mágneses tér a Lorentz-erő révén az iont körpályára állítja

$$M \frac{v^2}{R} = evB. \quad (13.4.3)$$

Az R sugár a fenti két egyenletből kifejezhető, azaz

$$R = \frac{Mv}{eB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2MU}{e}}. \quad (13.4.4)$$

A 6-os tömegszámú ionhoz tartozó sugár legyen R_6 , a 7-eshez R_7 . Az adatok behelyettesítésével

$$R_6 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2M_6 U}{e}} = 0,265 \text{ m} \quad (13.4.5)$$

$$R_7 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2M_7 U}{e}} = 0,286 \text{ m} \quad (13.4.6)$$

A becsapódási pontok közötti távolság

$$x = 2R_7 - 2R_6 = 0,042 \text{ m} = 42 \text{ mm}. \quad (13.4.7)$$

13.5. Feladat: (HN 30A-13) Egy sebességszűrőben (az elektronokat sebességük szerint szétválasztó eszközben) $1,4 \cdot 10^4 \text{ V/m}$ elektromos és erre merőleges 18 mT fluxussűrűségű mágneses erőteret alkalmaznak. Számítsuk ki a szűrőn áthaladó elektronok sebességét.

Megoldás: Adatok: $E = 1,4 \cdot 10^4 \text{ V/m}$; $B = 18 \text{ mT}$. A elektronok mind az E mind a B térre merőlegesen haladnak. Akkor az adott térrészen tudnak átjutni, ha az

$$eE = evB \quad (13.5.1)$$

összefüggés fenn áll. Ebből a kérdéses sebesség

$$v = \frac{E}{B} = 7,78 \cdot 10^5 \text{ m/s}. \quad (13.5.2)$$

Áramvezetőre ható erő mágneses erőterben

13.6. Feladat: (HN 30B-17) Téglalap alakú, $0,200 \text{ N}$ súlyú áramvezető hurok úgy van felfüggesztve, hogy a 80. ábrán vázolt módon félmagasságig vízszintes irányú, B indukció-vektorú homogén mágneses erőterbe merül. Ha 2 A erősségű áram folyik a hurkon keresztül, a felfüggesztő zsinórra $0,370 \text{ N}$ erő hat.

(a) Milyen irányú a hurokban az áram?

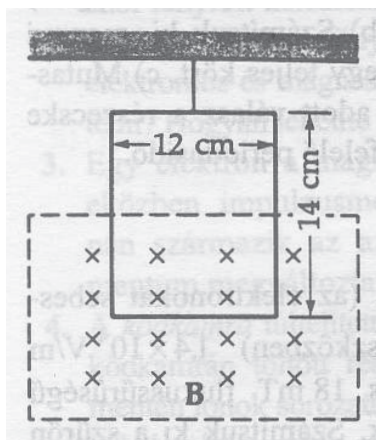
(b) Számítsuk ki B nagyságát!

Megoldás: Adatok: $G = 0,200 \text{ N}$; $F = 0,370 \text{ N}$; $I = 2 \text{ A}$; $l = 0,12 \text{ m}$.

(a) Az óra járásával egyező irányban folyik az áram.

(b) Az l hosszúságú vezetőre ható Lorentz-erő

$$F_L = IlB, \quad (13.6.1)$$

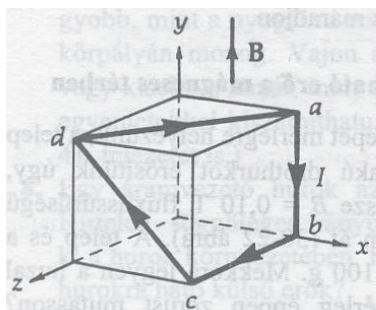


80. ábra.

és az ábrán lefelé mutat. Másrészt $F_L = F - G$. Így

$$B = \frac{F - G}{Il} = 0,708\text{T}. \quad (13.6.2)$$

13.7. Feladat: (HN 30B-18) A 81 ábrán bemutatott kocka 40 cm élhosszúságú. A négy egyenes



81. ábra.

szakaszból (ab, bc, cd és da) álló dróthurkon $I = 5$ A erősségű (áram folyik. Az y tengely pozitív irányában $B = 0,02$ T fluxussűrűségű homogén mágneses erőter hat. Készítsünk táblázatot, melyben a fenti sorrendben az egyes huzalszakaszokra ható) erők nagyságát és irányát foglaljuk össze.

Megoldás: Egy egyenes vezetőre \mathbf{B} fluxussűrűségű homogén mágneses térben ható erőt az

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B}), \quad F = IlB \sin \alpha(\mathbf{l}, \mathbf{B})$$

képlet adja meg, ahol \mathbf{l} az áram irányába mutató vektor melynek hossza megegyezik az egyenes vezető szakasz hosszával és $\alpha(\mathbf{l}, \mathbf{B})$ a szakasz és \mathbf{B} közötti szög. $|\mathbf{l}|$ helyére tehát a következőket

kell beírni: $|\mathbf{l}_{ab}| = |\mathbf{l}_{bc}| = A$, $|\mathbf{l}_{cd}| = |\mathbf{l}_{da}| = \sqrt{2} \cdot A$, ahol $A = 0,4\text{ m}$ a kocka élhossza. Az egyes irányított szakaszok \mathbf{B} vel bezárt szögei: $\alpha_{ab} = 180^\circ$, $\alpha_{bc} = 90^\circ$, $\alpha_{cd} = 45^\circ$ és $\alpha_{da} = 90^\circ$. Az egyes szakaszokra ható erők nagyságai és irányai:

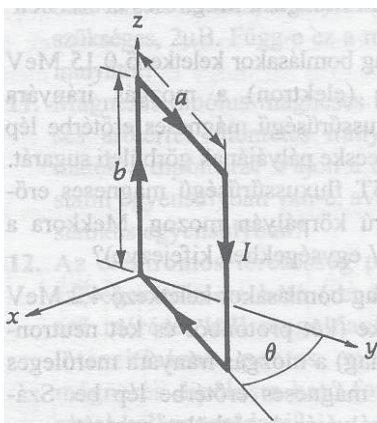
$$F_{ab} = 0,$$

$$F_{bc} = I \cdot A \cdot B = 5 \cdot 0,4 \cdot 0,02 = 0,04\text{ N} \quad -x \text{ irányú}$$

$$F_{cd} = \sqrt{2} \cdot I \cdot A \cdot B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = I \cdot A \cdot B = 0,04\text{ N} \quad -z \text{ irányú}$$

$$F_{da} = \sqrt{2} \cdot I \cdot A \cdot B = 0,052\text{ N} \quad +x \text{ és } +z \text{ tengellyel } 45^\circ \text{ szöget bezáró irányú}$$

13.8. Feladat: (HN 30B-21) Téglalap alakú áramvezető hurok mágneses erőterben a 82 ábrán vázolt módon helyezkedik el. A $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i}$ ($B_x = 0,15 \text{ Vs/m}^2$) fluxussűrűségű (tesla egységben megadott nagyságú) mágneses erőter a hurokra forgatónyomatékokat gyakorol. Mekkora a forgatónyomaték, ha $a = 8 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$, $\theta = 30^\circ$ és $I = 2 \text{ A}$?



82. ábra.

Megoldás: A mágneses dipólmomentum irányát a jobb kéz szabállyal lehet eldönteni, jelen esetben a keret síkjára merőlegesen a felület $\mathbf{n} = (-\cos\theta, \sin\theta, 0) = -\cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ normál vektorának irányába mutat. Így a dipólmomentum vektor

$$\boldsymbol{\mu} = Iab\mathbf{n} = Iab(-\cos\theta, \sin\theta, 0) = Iab(-\cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j} + 0\mathbf{k}). \quad (13.8.1)$$

A keretre ható forgatónyomaték

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = Iab \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ B_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -IabB_x \sin\theta \mathbf{k} = -1,44 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}. \quad (13.8.2)$$

13.9. Feladat: (HN 30B-23) Számítsuk ki a 82 ábrán vázolt áramvezető hurok mágneses dipólusmomentumát!

Megoldás: A dipólusmomentum nagysága Iab . Iránya a jobbkéz-szabály alkalmazásával az ábráról állapítható meg.

$$\mu = Iab(-\cos\theta, -\sin\theta) \quad (13.9.1)$$

13.10. Feladat: (HN 30C-34) A q/m töltés/tömeg hányadossal jellemezhető részecske $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ sebességgel halad át a derékszögű koordinátarendszer középpontján. A részecskét homogén mágneses erőter téríti el annyira, hogy áthaladjon az $\mathbf{r} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ ponton.

(a) Határozzuk meg a \mathbf{B} mágneses indukcióvektor irányát.

(b) Fejezzük ki b -t a , q , m , B és v függvényeként.

Megoldás: X

13.11. Feladat: (HN 30C-45) Egyenletes keresztmetszetű korongot, melynek tömege m , és melyen q töltés egyenletesen oszlik el, tengelye körül forgatunk. Mutassuk meg, hogy a forgó töltött korong μ mágneses momentuma és \mathbf{L} impulzusmomentuma között a $\mu = (q/(2m))\mathbf{L}$ összefüggés teremt kapcsolatot.

Megoldás: A forgó korong impulzusmomentuma

$$\mathbf{L} = \theta\omega = \frac{1}{2}mR^2\omega, \quad (13.11.1)$$

ahol θ a korong tehetetlenségi nyomatéka, ω a szögsebesség és R a korong sugara.

A korong felületi töltéssűrűségét σ -val jelölve az összes töltés

$$q = \sigma R^2\pi. \quad (13.11.2)$$

Az r sugarú, dr szélességű körgyűrűn

$$dq = \sigma 2r\pi dr \quad (13.11.3)$$

töltés van, amely $T = 2\pi/\omega$ idő alatt körbefut, s így

$$dI = \sigma r dr \omega \quad (13.11.4)$$

áramot jelent. Mivel a körgyűrű által határolt felület $r^2\pi$, így gyűrű

$$d\mu = \sigma r^3 \pi dr \omega \quad (13.11.5)$$

mágneses dipólmomentumot jelent. A teljes felületre összeadva:

$$\mu = \int_0^R \sigma r^3 \pi dr \omega = \frac{1}{4} \sigma R^4 \pi \omega = \frac{1}{4} q R^2 \omega \quad (13.11.6)$$

a mágneses dipólmomentum. Az impulzusmomentum és a dipólmomentum kifejezését összevetve az állítás

$$\mu = \frac{q}{2m} \mathbf{L} \quad (13.11.7)$$

adódik.

13.12. Feladat: (HN 30C-46) Köralakú áramvezető hurokra adott mágneses erőterben maximumisan M_0 forgatónyomaték hat. Alakítsuk át a hurkot úgy, hogy kisebb, de kétmenetű legyen. Mekkora a maximális forgatónyomaték ezen a kisebb hurkon?

Megoldás: Ha az eredeti kör sugara R , akkor a két egyforma kör sugara $R/2$ kell legyen, mert a kerületek hossza egyenlő. A forgatónyomaték a keret felületével — $R^2\pi$ — arányos. A második esetben a két kör együttes felülete számít, azaz $2 \cdot (R/2)^2\pi$, ami fele a nagy körének. Így a maximális forgatónyomaték is, azaz $M_0/2$.

13.13. Feladat: (HN 30C-51) Szigetelő anyagból készült R sugarú korong egyik oldalán a felületmenti homogén töltéssűrűség nagysága σ . A korongot tengelye körül ω szögsebességgel forgatjuk. Mutassuk meg hogy mágneses dipólusmomentuma $\omega \cdot \sigma \cdot \pi R^4 / 4$. (Útmutatás: Számítsuk ki az r sugarú, dr széles körgyűrűn levő töltések mozgásából származó mágneses erőteret. Használhatjuk a $\mathbf{p}_m = I \mathbf{A}$ egyenletet.)

Megoldás: A korongon levő töltések mindegyike a korong tengelye körüli körpályán mozog, tehát egy köráramnak felel meg. Minden köráramnak van mágneses momentuma, ezért a forgó korongnak is. Bontsuk fel a korong felületét koncentrikus dr szélességű körgyűrűkre. Egy r sugarú I erősségű köráram mágneses momentumának nagysága $p_m = I \cdot A = I \cdot r^2 \pi$. Esetünkben a középponttól r és $r+dr$ távolságban található $dQ = \sigma 2\pi r dr$ nagyságú töltések $dI(r)$ árama:

$$dI(r) = \frac{dQ}{T} = \frac{dQ}{2\pi/\omega} = \frac{\omega dQ}{2\pi} = \frac{2\pi\omega\sigma r dr}{2\pi} = \omega\sigma r dr$$

Egy ilyen köráram dp_m mágneses momentuma

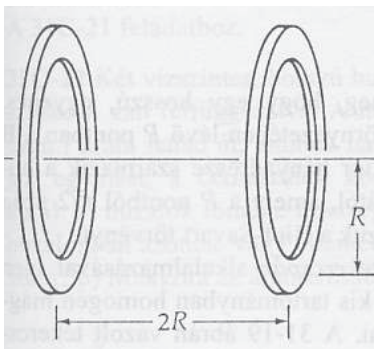
$$p_m = dI \cdot A(r) = dI \cdot r^2 \pi = \omega \sigma r^3 \pi dr$$

A teljes körlap mágneses momentuma tehát

$$p_m = \omega \sigma \pi \int_0^R r^3 dr = \omega \sigma \pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\omega \sigma \pi R^4}{4} \quad (13.13.1)$$

Biot-Savart törvény, Ampère-törvény

13.14. Feladat: (HN 31B-3) Két N menetű, R sugarú tekercs egymástól $2R$ távolságra helyezkedik el, ahogy a 83. ábra mutatja. Számítsuk ki a mágneses fluxussűrűséget a tekercsek tengelyén, tőlük egyenlő távolságban lévő pontban. Tételezzük fel, hogy a tekercsek sorba vannak kötve és az áramirány mindkét tekercsben azonos.



83. ábra.

Megoldás: X

13.15. Feladat: (HN 31A-4) Számítsuk ki két hosszú, párhuzamos, vékony, egymástól 5 cm távolságban lévő huzal egységnyi hosszúságú szakaszai között ható erőt. Az egyik huzalon 10 A erősségű áram folyik, a másikon is ugyanekkora, de ellentétes irányú. Taszító vagy vonzó erő hat a két huzal között?

Megoldás: Adatok: $r = 5$ cm; $I = 10$ A. Az egyik vezető által a másik helyén keltett mágneses teret az Ampère-törvény szerint számolhatjuk ki

$$\oint \mathbf{B} ds = \mu_0 \sum_i I_i, \quad (13.15.1)$$

$$B2r\pi = \mu_0 I, \quad (13.15.2)$$

azaz

$$B = \mu_0 \frac{I}{2r\pi}. \quad (13.15.3)$$

A vezetőben mozgó töltött részecskékre Lorentz-erő hat, amely L hossznyi vezetőt tekintve

$$F = ILB, \quad (13.15.4)$$

hosszegységenként

$$f = IB. \quad (13.15.5)$$

A B mágneses indukciót behelyettesítve

$$f = \mu_0 \frac{I^2}{2r\pi} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ N/m} \quad (13.15.6)$$

hosszegységenkénti taszító erő hat.

13.16. Feladat: (HN 31B-6) Egy R sugarú, köralakú vezetőhurokban I áram folyik. A hurok tengelyén, a huroktól milyen x távolságban van az a pont, ahol a mágneses fluxussűrűség, éppen fele a hurok középpontjában mérhetőnek? Felhasználhatjuk a (HN 31C-17) feladat eredményét is.

Megoldás: Menjen át a koordináta-rendszer x tengelye a hurok középpontján merőlegesen a korong síkjára. A (HN 31C-17) feladat eredménye szerint x távolságban a hurok középpontjától

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mu_0 \cdot I}{2} \right) \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \mathbf{x}$$

ahol \mathbf{x} a $+x$ irányú egységvektor. Az x távolságban a tengelyen mérhető térerősség aránya a hurok középpontjában ($x = 0$) mérhetőhöz:

$$\frac{|B(x)|}{|B(0)|} = \frac{\frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}}{\frac{R^2}{(R^2)^{3/2}}} = \frac{R^3}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Ez akkor $1/2$, ha

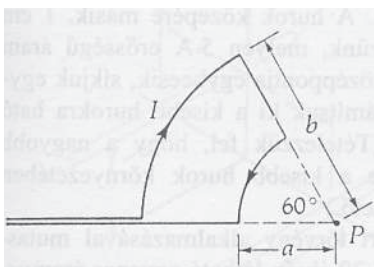
$$\frac{R^3}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}$$

$$2R^3 = (x^2 + R^2)^{3/2}$$

$$2^{2/3} R^2 - R^2 = x^2$$

$$x = \pm (2^{2/3} - 1) \cdot R = \pm 0,587 R$$

13.17. Feladat: (HN 31B-8) Számítsuk ki a mágneses indukcióvektort a 84 ábrán látható körívekből és sugárirányú egyenesszakaszokból álló hurok köríveinek P középpontjában.



84. ábra.

Megoldás: A radiális vezetőszakaszoknak nincs járuléka a P pontban, így csak a két ívet kell tekintsük. Az r központi sugarú ív ds elemi hosszától származó járulék

$$dB = \frac{\mu_0 I ds}{4\pi r^2}. \quad (13.17.1)$$

Ugyanakkor ds ívhossz kifejezhető a θ központi szöggel

$$ds = r d\theta. \quad (13.17.2)$$

A teljes B teret a szög szerinti integrálással kapjuk:

$$B = \int_0^{60^\circ = \pi/3} \frac{\mu_0 I r d\theta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{12 r}. \quad (13.17.3)$$

A b sugarú ívtől

$$B_b = \frac{\mu_0 I}{12 b} \quad (13.17.4)$$

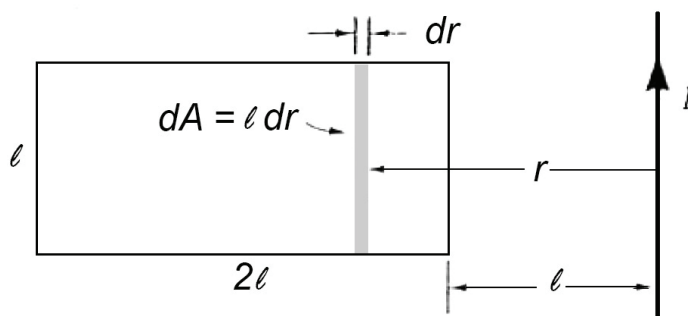
a lap síkjára merőlegesen befelé, míg az a sugarú ívtől

$$B_a = \frac{\mu_0 I}{12 a} \quad (13.17.5)$$

a lap síkjára merőlegesen kifelé mutató tér alakul ki. Az eredő

$$B = B_b - B_a = \frac{\mu_0 I}{12 b} - \frac{\mu_0 I}{12 a} = \frac{\mu_0 I}{12} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right). \quad (13.17.6)$$

Mivel $a < b$, így ennek eredménye negatív, azaz kifelé mutat.



85. ábra. A 31B-9 feladathoz

13.18. Feladat: (HN 31B-9) A 85 ábrán látható, téglalap alakú vezetőhurok és a ∞ hosszúságú, egyenes vezető azonos síkban fekszik. A vezetőhurok ellenállása 2Ω . Számítsuk ki a hurok teljes felületén áthaladó mágneses fluxust, ha az egyenes vezetőkön I áram halad át. (Útmutatás: Válasszunk ki egy $dA = \ell dr$ felületelemet, és számítsuk ki a $d\Phi_B$ fluxust ezen a felületelemen, majd integrálással számítsuk ki a teljes fluxust.)

Megoldás: Osszuk fel a felületet dr szélességű sávokra! Egy ilyen sáv mentén a mágneses fluxussűrűség konstansnak tekinthető. Az egyenes vezetőtől r távolságban a B mágneses fluxussűrűség nagysága

$$B = \mu_o \cdot \frac{I}{2\pi r}$$

így a dr széles és ℓ hosszú sávra vett elemi $d\Phi$ fluxus

$$d\Phi = B(r) \cdot dA = B(r) \cdot \ell \cdot dr = \mu_o \cdot \frac{I \ell dr}{2\pi r}$$

A teljes hurkon áthaladó fluxus az elemi fluxusok összege, ami integrálként írható fel.

$$\Phi = \mu_o \cdot \frac{I \ell}{2\pi} \int_{\ell}^{3\ell} \frac{1}{r} dr = \mu_o \cdot \frac{I \ell}{2\pi} [\ln r]_{\ell}^{3\ell} = \mu_o \cdot \frac{I \ell}{2\pi} \ln \frac{3\ell}{\ell} = \mu_o \cdot \frac{I \ell}{2\pi} \ln 3 \quad (13.18.1)$$

13.19. Feladat: (HN 31A-13) Egy 50 cm hosszú, 2 cm átmérőjű szolenoid belsejében $B = 0,07$ T mágneses indukcióvektort kívánunk előállítani.

- Mekkora a teljes mágneses fluxus a szolenoid belsejében, a tengelyre merőleges felületen?
- Számítsuk ki, hány meneté legyen a tekercs, ha 5 A erősségű áramot alkalmazunk?

Megoldás: Adatok: $L = 50$ cm; $d = 2$ mm; a sugár $r = 1$ mm; $B = 0,07$ T.

(a) A tekercsbeli mágneses fluxus

$$\Phi_B = BA = Br^2\pi = 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ Vs.} \quad (13.19.1)$$

(b) Az Ampère-törvény szerint

$$\oint \mathbf{B}ds = \mu_0 \sum_i I_i, \quad (13.19.2)$$

azaz

$$BL = \mu_0 NI \quad (13.19.3)$$

ahol N a menetszám. Így a tekercsbeli mágneses indukció

$$B = \mu_0 \frac{IN}{L}, \quad (13.19.4)$$

ahonnan az N menetszám

$$N = \frac{LB}{\mu_0 I} = 5570. \quad (13.19.5)$$

13.20. Feladat: (HN 31B-15) Hosszú, egyenes, a sugarú hengeres vezetõn I áram folyik. Az Ampère-törvényt alkalmazva vezessük le, hogy hogyan változik a B indukcióvektor a vezetõ belsejében. (Egyenáramok esetében az áramsűrűség a vezetõ keresztmetszete mentén egyenletes. Ábrázoljuk B -t a tengelytõl való r távolság függvényében a vezetõ belsejében és azon kívül is.

Megoldás: A vezetõ belsejében ($0 < r < a$) esetében az r sugarú keresztmetszeten átfolyó áramtól származik mágneses tér. A vezetõ keresztmetszetéhez – a keresztmetszete mentén egyenletes vezetés miatt – a

$$j = \frac{I}{a^2\pi} \quad (13.20.1)$$

áramsűrűséget adhatjuk meg. Itt az áram nagysága

$$I = \frac{I}{a^2\pi} r^2\pi. \quad (13.20.2)$$

Így az Ampère-törvény segítségével felírhatjuk, hogy

$$B2r\pi = \mu_0 \frac{I}{a^2\pi} r^2\pi. \quad (13.20.3)$$

Innen a $B(r)$ mágneses indukció

$$B(r) = \mu_0 \frac{I}{2a^2\pi} r. \quad (13.20.4)$$

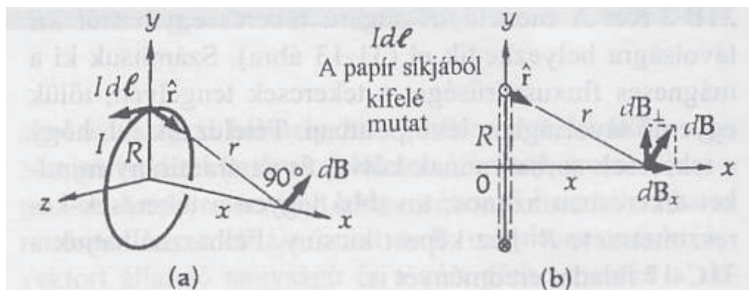
A vezetõn kívül ($a < r$)

$$B2r\pi = \mu_0 \frac{I}{a^2\pi} r^2\pi, \quad (13.20.5)$$

amellyel a mágneses indukció

$$B(r) = \mu_0 \frac{I}{2r\pi}. \quad (13.20.6)$$

13.21. Feladat: (HN 31C-17) A 86 ábrán vázolt R sugarú hurokban I áram folyik. Mutassuk



86. ábra.

meg, hogy a hurok tengelyén, a hurok síkjától x távolságban

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_0 \cdot I}{2} \right) \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \mathbf{x}$$

(Útmutatás: Mi történik az x tengelyre merőleges $d\mathbf{B}_\perp$ komponensekkel az Idl elemi áramtól származó $d\mathbf{B}$ elemi mágneses indukcióvektorok összegzése során?)

Megoldás: Osszuk fel a hurkot a 86 a) ábra szerint $d\mathbf{l}$ darabokra. Az egy ilyen darabkától származó mágneses tér a Biot-Savart törvény szerint

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

Minden elemi szakasz ugyanakkor nagyságú, de más irányú elemi $d\mathbf{B}$ -t hoz létre. A 31-18 b) ábrán látható, hogy $d\mathbf{B}$ felbontható egy az x tengellyel párhuzamos $d\mathbf{B}_\parallel$ és egy arra merőleges $d\mathbf{B}_\perp$ komponensre. A hurok mentén átellenesen elhelyezkedő elemi szakaszoktól származó mágneses fluxussűrűségek $d\mathbf{B}_\perp$ komponensi pont ellentétes irányúak, így kiejtik egymást, azonos nagyságú $d\mathbf{B}_\parallel$ komponenseik pedig összeadódnak. Ez azt jelenti, hogy az eredő \mathbf{B} térnek csak x irányú komponense lesz, a pozitív tengelyen pozitív, a negatív tengelyen negatív irányú, tehát a tér párhuzamos lesz az x irányú egységvektorral \mathbf{x} -szel. Az egy szakasztól származó $d\mathbf{B}_\parallel$ nagysága $dB_\parallel = B \sin \alpha$, ahol α az x és r közötti szög. Felhasználva, hogy \mathbf{r} és \mathbf{l} merőlegesek :

$$\begin{aligned} dB_\parallel &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I |d\mathbf{l} \times \mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|^3} \cdot \sin \alpha \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I dl \cdot r}{|\mathbf{r}|^3} \cdot \sin \alpha \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I dl}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

Mivel $r = \sqrt{x^2 + R^2}$

$$\sin \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

amivel

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot l \quad (13.21.1)$$

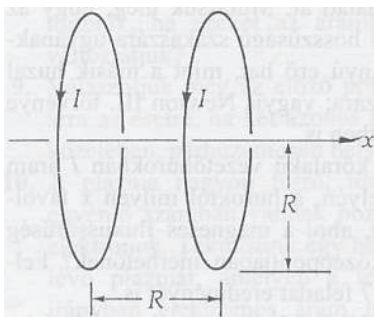
A teljes B tér az elemi szakaszok dB_{\parallel} járulékeinak összege. Nagysága:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \int_0^{2r\pi} dl \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot [l]_0^{2r\pi} \\ &= \frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2R\pi \\ &= \frac{\mu_o}{2} \cdot \frac{IR^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (13.21.2)$$

Az irányt is figyelembe véve

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_o \cdot I}{2} \right) \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \mathbf{x} \quad (13.21.3)$$

13.22. Feladat: (HN 31C-19) A Helmholtz tekercspár alkalmazásával igen egyszerű módon lehet kis tartományban homogén mágneses erőteret létesíteni. A 87 ábrán vázolt tekercspár két lapos, kör alakú tekercsből áll, melyek távolsága egyenlő a tekercsek sugarával; a két tekercsben az áramirány megegyezik. Mutassuk meg, hogy az x tengelyen a két tekercs között a távolság felében a mágneses erőteret olyan, hogy a dB/dx és a d^2B/dx^2 is zérus.



87. ábra.

[Megoldás: X](#)

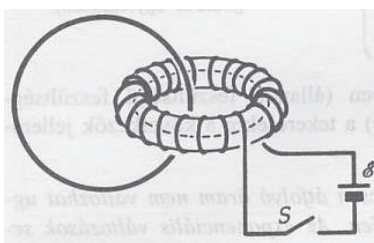
14. Feladatok a mágneses indukció témaköréből

Faraday-törvény

14.1. Feladat: (HN 32B-1) Egy toroid tekercsen gyűrű van átfűzve (88. ábra). Az S kapcsoló zárásakor a toroidon áram kezd folyni.

(a) Számítsuk ki a gyűrűben indukált feszültséget, ha a toroidon belül a mágneses fluxus $30 \text{ Tm}^2/\text{s}$ sebességgel változik.

(b) Az ideális toroid mágneses erőtere gyakorlatilag teljesen a tórusz belsejébe van lokalizálva, azaz a karikát a mágneses erőter nem éri. Honnan származik akkor az indukált áram?



88. ábra.

Megoldás: Jelölés: $\Delta\Phi/\Delta t = 30 \text{ Tm}^2/\text{s}$.

(a) A mágneses fluxus ($\Phi = \oint \mathbf{B}d\mathbf{A}$) idő szerinti változása hozza létre a gyűrűben az indukált feszültséget

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -30 \text{ V}. \quad (14.1.1)$$

(b) A \mathbf{B} mágneses indukció változásakor \mathbf{E} elektromos tér jön létre

$$-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta \oint \mathbf{B}d\mathbf{A}}{\Delta t} = \oint \mathbf{E}d\mathbf{s} = \varepsilon, \quad (14.1.2)$$

és ez a tér mozdítja el a töltéseket. Innen származik az indukált áram.

14.2. Feladat: HN 32B-3 Egy R ellenállású, r sugarú kör alakú huzalhurok a B homogén mágneses erőter irányára merőlegesen fekszik. A hurkot gyorsan, t idő alatt 180° -kal átfordítjuk. Számítsuk ki, hogy mekkora átlagos ε feszültség indukálódott ezalatt a hurokban és mekkora töltés haladt át ezalatt a vezető hurkon.

Megoldás: Ha egy vezető hurok által határolt felületen a mágneses térerősség Φ_B fluxusa változik ennek hatására a vezetőhurokban $\varepsilon(t)$ elektromotoros erő jelenik meg, azaz feszültség indukálódik (Faraday indukciós törvénye). Ha a fluxusváltozás Δt idő alatt $\Delta \Phi_B$ akkor az átlagos feszültség:

$$\langle \varepsilon \rangle = -\frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = -\frac{\Phi_B(t = \Delta t) - \Phi_B(t = 0)}{\Delta t}. \quad (14.2.1)$$

A negatív előjel megfelel Lenz törvényének. A feladatban ennek az elektromotoros erőnek csak a nagysága érdekes. Az eredeti és az átfordítás utáni fluxus

$$\Phi(t = 0) = \int_A \mathbf{B} d\mathbf{A} \Big|_{t=0} = BA = Br^2 \pi \quad (14.2.2)$$

$$\Phi(t = \Delta t) = \int_A \mathbf{B} d\mathbf{A} \Big|_{t=\Delta t} = -Br^2 \pi. \quad (14.2.3)$$

A teljes fluxusváltozás nagysága tehát eredeti fluxus kétszerese

$$\Delta \Phi_B = \Phi_B(t = \Delta t) - \Phi_B(t = 0) = -2Br^2 \pi,$$

így

$$\langle \varepsilon \rangle = +\frac{2Br^2 \pi}{\Delta t}. \quad (14.2.4)$$

Az R ellenállású hurkon áthaladó töltés nagysága pedig

$$\Delta Q = \langle I \rangle \Delta t = \frac{\langle \varepsilon \rangle}{R} \cdot \Delta t = \frac{2Br^2 \pi}{R}. \quad (14.2.5)$$

14.3. Feladat: (HN 32B-7) Egy 30 menetes lapos huzaltekercset hosszú, 4000 menet/m menetsűrűségű szolenoid végéhez illesztünk. A szolenoid és a huzaltekercs tengelye, és sugara azonos $R = 5$ cm. Számítsuk ki, mekkora a szolenoidban az áramerősség változása, ha a huzaltekercsben 2 mV-os feszültség indukálódik.

Megoldás: Adatok: $N_1 = 30$ menet; $N_2/l = 4000$ menet/m; $\varepsilon = 2$ mV.

A szolenoidban I áramerősség hatására

$$B = \mu_0 \frac{IN_2}{l} \quad (14.3.1)$$

mágneses indukció jön létre. Ez a huzaltekercs számára

$$\Phi = N_1 BR^2 \pi = \mu_0 \frac{IN_1 N_2 R^2 \pi}{l} \quad (14.3.2)$$

fluxust jelent. Az indukált feszültség nagysága

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 R^2 \pi}{l} \frac{dI}{dt}, \quad (14.3.3)$$

amelyből az áramerősség időbeli változása

$$\frac{dI}{dt} = \frac{l\varepsilon}{\mu_0 N_1 N_2 R^2 \pi} = 1,69 \text{ A/s}. \quad (14.3.4)$$

14.4. Feladat: (HN 32A-8) Egy 400 menetes tekercsben 12 A/s áramerősség változás hatására 28 mV-os ellenfeszültség indukálódik. Mekkora a tekercs induktivitása?

Megoldás: Adatok: $N = 100$; $\Delta I / \Delta t = 12 \text{ A/s}$; $\varepsilon = 28 \text{ mV}$.

Az indukált feszültség nagysága

$$\varepsilon = L \frac{\Delta I}{\Delta t}, \quad (14.4.1)$$

ahonnan az L induktivitás

$$L = \varepsilon \frac{\Delta t}{\Delta I} = 2,33 \cdot 10^{-3} \text{ H}. \quad (14.4.2)$$

14.5. Feladat: (HN 32A-15) Egy A keresztmetszetű és l kerületű toroid két külön tekercsből áll: mindkettőt a tórusz teljes kerülete mentén egyenletesen csévelték fel; menetszámuk N_1 és N_2 ,

(a) Mekkora az (önállóan használt) tekercsek L_1 és L_2 induktivitása?

(b) Mekkora a két tekercs M kölcsönös induktivitása?

(c) Mutassuk meg, hogy $M^2 = L_1 L_2$. (Ez az egyenlet csak akkor teljesül, ha bármelyik tekercs teljes fluxusa egyúttal benne van a másik tekercs belsejében is.)

Megoldás:

(a) Az L_1 és L_2 önindukciós együtthatók kiszámolása esetén hasonlóan járunk el. A mágneses indukciót az Ampère-törvény ($\oint \mathbf{B} ds = \mu_0 \sum_i I_i$) segítségével határozzuk meg

$$B = \mu_0 \frac{IN}{l}. \quad (14.5.1)$$

A fluxus

$$\Phi = NBA = \mu_0 \frac{IN^2 A}{l}, \quad (14.5.2)$$

amelynek időbeli változása adja az indukált feszültséget

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 \frac{N^2 A}{l} \frac{dI}{dt}. \quad (14.5.3)$$

Innen az L öndukciós együttható innen

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l}. \quad (14.5.4)$$

Ezért L_1 és L_2

$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2 A}{l}, \quad (14.5.5)$$

$$L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2 A}{l}. \quad (14.5.6)$$

(b) Az M kölcsönös indukciós együttható kiszámolása esetén az N_1 beli fluxusváltozás feszültséget indukál az N_2 tekercsben és *vice versa*. A mágneses indukció

$$B = \mu_0 \frac{IN_1}{l}. \quad (14.5.7)$$

A fluxus

$$\Phi = N_2 BA = \mu_0 \frac{IN_1 N_2 A}{l}, \quad (14.5.8)$$

amelynek időbeli változása adja az indukált feszültséget

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l} \frac{dI}{dt}. \quad (14.5.9)$$

Innen az L öndukciós együttható innen

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l}. \quad (14.5.10)$$

(c) Ezt követően könnyen belátható, hogy az $M^2 = L_1 L_2$ kapcsolat fenn áll.

14.6. Feladat: (HN 32B-17) Egy l hosszúságú, A keresztmetszetű, N_1 menetszámú hosszú szolenoid középre szorosan és elektromosan szigetelve egy másik, N_2 menetszámú tekercset csévélnek. Számítsuk ki a szolenoid és a tekercs kölcsönös induktivitását, elhanyagolva a tekercsvégek hatását.

Megoldás: Az N_1 menetszámú tekercsben I áramerősség hatására

$$B = \mu_0 \frac{IN_1}{l} \quad (14.6.1)$$

mágneses indukció jön létre. Ez az N_2 menetszámú huzaltekercs számára

$$\Phi = N_2 BA = \mu_0 \frac{IN_1 N_2 A}{l} \quad (14.6.2)$$

fluxust jelent. Az indukált feszültség nagysága

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l} \frac{dI}{dt}, \quad (14.6.3)$$

ahonnan a kölcsönös indukciós együttható

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l}. \quad (14.6.4)$$

14.7. Feladat: (HN 32B-18) Egy áramkör a sorba kötött, $\varepsilon = 10$ V-os feszültségforrásból, az S kapcsolóból, az $R = 50 \Omega$ ellenállásból és az $L = 5$ H induktivitású tekercsből áll. Számítsuk ki azt az időtartamot, ami ahhoz szükséges, hogy az áramerősség elérje a stacionárius állapotnak megfelelő értékének

- (a) felét, illetve
- (b) a 90 %-át.

Megoldás: A hurokra felírható, hogy

$$\varepsilon = L \frac{dI}{dt} + RI, \quad (14.7.1)$$

ahol $I(t)$ az áramkörben folyó áram. Az egyenletet szeparálva és az integrálási határokat kijelölve írhatjuk, hogy

$$\int_0^{I(t)} \frac{dI}{I - \frac{\varepsilon}{R}} = - \int_0^t \frac{R}{L} dt. \quad (14.7.2)$$

Az integrálást végrehajtva és az eredményt átrendezve az időfüggő áramerősség

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (14.7.3)$$

Az adatok felhasználásával a megválaszolendő időtartamok:

- (a) $t = 0,069$ s és
- (b) $t = 0,23$ s.

14.8. Feladat: (HN 32A-23) Számítsuk ki a 3800 menet/m menetsűrűségű, hosszú szolenoid közepén a mágneses tér energiasűrűségét, ha a szolenoidon áthaladó áram erőssége 4 A. Függetlenül az energiasűrűség a menetek sugarától?

Megoldás: Adatok: $N/l = 3800$ menet/m; $I = 4$ A.

A mágneses indukció nagysága

$$B = \mu_0 \frac{IN}{l}, \quad (14.8.1)$$

amellyel a mágneses energiasűrűség

$$\varepsilon_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I^2 N^2}{l^2} = 145,2 \text{ J/m}^3. \quad (14.8.2)$$

14.9. Feladat: (HN 32A-25) Egy 10 V-os telepet 5 Ω -os ellenállással és 10 H induktivitású tekercsel kötünk sorba, és megvárjuk, amíg az áramerősség állandósul. Számítsuk ki ekkor a) a telep által leadott teljesítményt; b) az ellenállás által disszipált teljesítményt; c) a tekercsben disszipált teljesítményt; d) a tekercs mágneses erőterében tárolt energiát.

Megoldás: A stacionárius állapot beállása után a tekercsen nincs indukált feszültség, ezért az áramerősség és a telep által leadott teljesítmény csak az ellenállástól függ, továbbá az ellenálláson disszipált teljesítmény megegyezik a telep által leadott teljesítménnyel:

$$I = \frac{U}{R} = 2 \text{ A}. \quad (14.9.1)$$

$$P_{telep} = P_R = I^2 \cdot R = 20 \text{ W}. \quad (14.9.2)$$

A tekercsben mágneses térben tárolt energia

$$W_L = \frac{1}{2} L I^2 = 20 \text{ J}. \quad (14.9.3)$$

14.10. Feladat: (HN 32C-33) Egy 30 cm átmérőjű 2 Ω ellenállású vezető karika asztal lapján fekszik, ahol a Föld mágneses terének fluxussűrűsége 48 μT és iránya 65°-os szöget zár be a vízszintessel. Számítsuk ki, mekkora töltés halad át a karika valamely pontján, ha azt hirtelen 180°-kal átfordítjuk.

Megoldás: A feladat analóg a **32B-3** feladattal. Az egyetlen különbség, hogy a mágneses tér és a vezető hurok síkja nem merőlegesek, ezért a fluxusban megjelenik a \mathbf{B} és a felület normális vektora közötti szög koszinusza. Mivel azonban a normális vektor függőleges de a mágneses tér iránya a vízszinteshez képest van megadva, ezért a számolásnál vagy az eredeti szög szinuszát, vagy a kiegészítő 25°-os szög koszinuszát kell használni. Behelyettesítve az $R = 2 \Omega$, $r = 0,15 \text{ m}$, és $B = 4,8 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ értékeket.

$$\langle \varepsilon \rangle = - \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} \quad (14.10.1)$$

$$\Phi(t=0) = \int_A \mathbf{B} d\mathbf{A} \Big|_{t=0} = B A \sin 65^\circ = B r^2 \pi \sin 65^\circ \quad (14.10.2)$$

$$\Phi(t = \Delta t) = \int_A \mathbf{B} d\mathbf{A} \Big|_{t=\Delta t} = -Br^2 \pi \sin 65^\circ \quad (14.10.3)$$

$$\langle \varepsilon \rangle = -\frac{2Br^2 \pi \sin 65^\circ}{\Delta t} \quad (14.10.4)$$

$$\Delta Q = \langle I \rangle \Delta t = \frac{\langle \varepsilon \rangle}{R} \cdot \Delta t = \frac{2Br^2 \pi \sin 65^\circ}{R} \quad (14.10.5)$$

$$quad = \frac{2 \cdot 4,8 \cdot 10^{-5} \cdot 0,15^2 \cdot \pi \cdot \sin 65^\circ}{2} = \underline{3,075 \cdot 10^{-6} \text{ C}}. \quad (14.10.6)$$

14.11. Feladat: (HN 32C-35) A 89 ábrán vázolt áramkör homogén, időben egyenletesen csökkenő fluxussűrűségű mágneses erőterben helyezkedik el. $dB/dt = -k$, ahol k pozitív állandó. Az áramkör egy a sugarú hurok, melyben egy R ellenállás és egy C kapacitású kondenzátor van (az utóbbi lemezei az ábra szerinti módon helyezkednek el). a) Mekkora a kondenzátor maximális Q töltése? b) A kondenzátor melyik lemezének nagyobb a potenciálja? c) Elemezzük, hogy milyen erők okozzák a töltések szétválását.

89. ábra. A 32C-35 feladathoz



Megoldás: A körben indukált feszültség nagyságát a fluxusváltozás sebességéből kapjuk meg

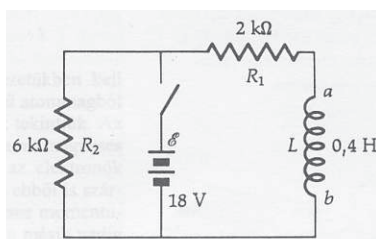
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dB a^2 \pi}{dt} = k a^2 \pi \quad (14.11.1)$$

Ez állandó. Az állandó feszültségre kapcsolt kondenzátor töltése exponenciálisan közelíti a maximális töltést, aminek elérése után a kondenzátor feszültsége és az indukált feszültség azonos nagyságú és ellentétes irányú, vagyis a maximális töltés a $C \cdot \varepsilon = Q_{max}$ egyenletből számítható ki. Innen

$$Q_{max} = C k a^2 \pi \quad (14.11.2)$$

Az indukált elektromos tér önmagukban záródó erővonalai a mágneses tér megváltozására mérőleges síkú körök. Irányukat a balkéz-szabály alapján lehet meghatározni: mivel az indukcióvektor $d\mathbf{B}$ megváltozása a lap síkjából kifelé mutat az \mathbf{E} erővonalak az óramutató járásával megegyező irányba mutatnak, ezért a pozitív töltések a kondenzátor felső lapján gyűlnek össze. A töltések szétválását a mágneses indukciófluxus változása okozza.

- 14.12. Feladat:** (HN 32C-40) A 90. ábra áramkörében lévő kapcsolót zárjuk és megvárjuk, amíg az áramerősségek állandósulnak. Ezután a kapcsolót nyitjuk; ennek pillanata legyen $t = 0$.
- (a) Számítsuk ki az L tekercsben indukálódó ε_0 feszültséget közvetlenül a kapcsoló nyitása után. A tekercs melyik vége pozitívabb potenciálú, a vagy b ?
- (b) Vázoljuk fel az R_1 és R_2 ellenállásokon átfolyó áram időtől való függését a $t < 0$ és $t > 0$ időtartományban (a stacionárius áramerősségeket válasszuk pozitív előjelűeknek).
- (c) A kapcsoló nyílása után mennyi idő elteltével csökken az R_2 ellenálláson átfolyó áram erőssége 2 mA-re?



90. ábra.

Megoldás: X

- 14.13. Feladat:** (HN 32C-45) Egy R sugarú hengeres vezetõn I_0 erõsségû áram halad át; az áramsûrûség a vezetõ keresztmetszetén egyenletes. Határozzuk meg a vezetõ belsejében egységyeni hosszúságú szakaszra jutó mágneses energia nagyságát. (Útmutatás: mekkora a mágneses energia egy l hosszúságú, r ($r < R$) sugarú dr vastagságú hengerpalástban (csõben)?

Megoldás: Jelölje j_0 a keresztmetszeten egyenletes áramsûrûséget. Ekkor az $R^2\pi$ teljes felületen folyó I áramerõsség

$$I_0 = j_0 R^2 \pi, \quad (14.13.1)$$

míg az $r < R$ sugárhoz tartozó $r^2\pi$ felületen

$$I(r) = j_0 r^2 \pi. \quad (14.13.2)$$

Ezekből

$$I(r) = I_0 \frac{r^2}{R^2}. \quad (14.13.3)$$

Az Ampère-törvény szerint

$$B(r)2r\pi = \mu_0 I(r), \quad (14.13.4)$$

azaz

$$B(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2r\pi} = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi R^2}. \quad (14.13.5)$$

A mágneses energiasűrűség

$$\varepsilon_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\mu_0 I_0^2 r^2}{8\pi^2 R^4}. \quad (14.13.6)$$

14.14. Feladat: (HN 32C-46) Oldjuk meg az előző feladatot azzal a változtatással, hogy a J áramsűrűség a henger sugara mentén lineárisan változik, azaz $J(r) = J_0 r$.

(a) Fejezzük ki a teljes I_0 áramot J_0 és R függvényeként.

(b) Adjuk meg a vezető belsejében hosszegységenként tárolt mágneses energia nagyságát.

Megoldás:

(a) A henger keresztmetszetén a felületelem $dA = 2r\pi dr$, amellyel r sugárhoz tartozó áram

$$I(r) = \int_0^r J(r) dA = \int_0^r J_0 r 2r\pi dr = 2\pi J_0 \int_0^r r^2 dr = \frac{2\pi J_0}{3} r^3. \quad (14.14.1)$$

A teljes keresztmetszeten folyó áram

$$I_0 = I(R) = \frac{2\pi J_0}{3} R^3. \quad (14.14.2)$$

(b) Az Ampère-törvény szerint

$$B(r)2r\pi = \mu_0 I(r), \quad (14.14.3)$$

azaz

$$B(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2r\pi} = \frac{\mu_0 J_0}{3} r^2. \quad (14.14.4)$$

A mágneses energiasűrűség

$$\varepsilon_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\mu_0 J_0^2}{18} r^4. \quad (14.14.5)$$

A hosszegységenkénti energia a következő felületi integrál kiszámolását jelenti:

$$E_h = \int \varepsilon_B dA = \int_0^R \varepsilon_B 2r\pi dr = \int_0^R \frac{\mu_0 J_0^2}{18} r^4 2r\pi dr = \int_0^R \frac{\mu_0 J_0^2 \pi}{9} r^5 = \frac{1}{54} \mu_0 J_0^2 \pi R^6. \quad (14.14.6)$$

14.15. Feladat: (HN 33B-4) Egy 25 cm hosszú, sűrűn tekercselt, 600 menetű szolenoidon 30 mA erősségű áram folyik it. Számítsuk ki H és B nagyságát a szolenoid középpontjában (a) ha a szolenoid légmagos és (b) ha a szolenoid magja 45 Permalloyból készült, melynek szuszceptibilitása a maximális telítési értéknek háromnegyede.

Megoldás: A szolenoid középpontjában

$$H = \frac{I \cdot N}{\ell} \quad (14.15.1)$$

$$B = \mu \frac{I \cdot N}{\ell} \quad (\mu = \mu_r \cdot \mu_0) \quad (14.15.2)$$

ahol $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$. Mivel H képletében nem szerepel a permeabilitás az ugyanakkora lesz légmagos és vasmagos tekercsre. Légmagos tekercsre $\mu_r^{(1)} = 1$. A HN könyv 33-1 táblázatából a 45 Permalloy mágneses szuszceptibilitása $\chi = 25000$, ennek 3/4-ével ($\chi = 18750$) kell számolni a feladatban, vagyis $\mu_r^{(2)} = 1 + \chi = 18751$. Ezekkel az adatokkal

$$H^{(1)} = H^{(2)} = \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 600}{0,25} = 72 \frac{A}{m} \quad (14.15.3)$$

$$B^{(1)} = \mu_0 \cdot H = 9.048 \cdot 10^{-5} \frac{Vs}{m^2} \quad (14.15.4)$$

$$B^{(2)} = \mu_0 \mu_r \cdot H = 1.697 \frac{Vs}{m^2}. \quad (14.15.5)$$

14.16. Feladat: (HN 33B-8) Egy 50 cm kerületű toroid tekercs 1000 menetű és rajta 200 mA erősségű áram halad it. A vasmag olyan anyagból készült, amelynek telítési szuszceptibilitása 3000. (a) Számítsuk ki a B mágneses indukcióvektort a magban, ha anyaga 85%-ig telítődött. (b) Számítsuk ki a H mágneses térerősséget a tekercs belsejében. (c) Számítsuk ki B azon részét, amely csak tekercsben folyó áramtól ered.

Megoldás: Sűrűn tekercselt toroidra hasonló képletek adhatóak meg, mint szolenoidra, csak a tekercs hossza helyett a szolenoid középvonalának hosszát kell használni, ami az esetünkben - mivel a toroid átmérőjét nem adták meg, tehát elhanyagolhatónak tekinthetjük - $K = 0,5$ m. Behelyettesítve az egyes kérdésekre adott válaszok (célszerű először a (b) és utána az (a) kérdésre kiszámolni az eredményt):

$$b) \quad H = \frac{I \cdot N}{K} = \frac{0,2 \cdot 1000}{0,5} = 400 \frac{A}{m} \quad (14.16.1)$$

$$a) \quad B = \mu_r \mu_0 \cdot H = 1.257 \cdot 10^{-6} \cdot (3000 \cdot 0,85 + 1) \cdot 400 = 1,282 T \quad (14.16.2)$$

$$c) \quad B_{lev} = \mu_0 \cdot H = 1.257 \cdot 10^{-6} \cdot 400 = 5.027 \cdot 10^{-4} T. \quad (14.16.3)$$

14.17. Feladat: (HN 33C-9) Hosszú, vasmagos szolenoid sugara 1,25 cm; menetsűrűsége 1200 menet/m. Erre a tekercsre szorosan egy másik, 40 menetű tekercset is csévélünk, amelynek teljes ellenállása 5Ω . Az utóbbi tekercs két kivezetését rövidre zárjuk. A szolenoidon 50 mA erősségű áramot indítunk, aminek következtében a vas mágneselesen teljesen telítődik. A második tekercsben a mágneses indukció változása következtében áram indukálódik. Számítsuk ki e tekercs valamely pontján áthaladó töltés mennyiségét.

Megoldás: Adatok: $r = 1,25 \text{ cm}$; $N_1/l = 1200 \text{ menet/m}$; $N_2 = 40 \text{ menet}$; $R = 5 \Omega$; $I = 50 \text{ mA}$. A vas relatív mágneses permeabilitása $\mu_r = 5000$.

A lemágnesezéshez használt tér

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{IN_1}{l}, \quad (14.17.1)$$

amely a másik tekercsben

$$\Delta\Phi = N_2 \mu_0 \mu_r \frac{IN_1}{l} r^2 \pi \quad (14.17.2)$$

fluxusváltozást jelent. Az indukált feszültség nagysága

$$\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \quad (14.17.3)$$

Ez az R ellenálláson

$$I' = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\Delta\Phi}{R\Delta t} \quad (14.17.4)$$

áramot jelent, amely a Δt idő alatt

$$Q = I' \Delta t = \frac{\varepsilon}{R} \Delta t = \frac{\Delta\Phi}{R} = N_2 \mu_0 \mu_r \frac{IN_1}{lR} r^2 \pi = 1,48 \cdot 10^{-3} \text{ C}. \quad (14.17.5)$$

töltés átáramlását jelenti.

Váltakozó áramú áramkörök

14.18. Feladat: (HN 34A-6) Sorbakapcsolt RC körre ($R = 30 \Omega$, $C = 10 \mu\text{F}$) $U(t) = U_0 \cdot \sin \omega t$ feszültséget kapcsolunk. (Adatok: $U_0 = 100 \text{ V}$; $\omega = 2500 \text{ 1/s}$.)

- Mekkora az áramkör impedanciája?
- Adjuk meg az áramerősség időfüggését!
- Készítsük el az áramkör impedancia és feszültség-vektor diagramját!
- Számítsuk ki a kondenzátor elektromos erőterében tárolt maximális energiát!

Megoldás:

(a) Az áramkör impedanciája

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = 50 \Omega. \quad (14.18.1)$$

(b) A körben folyó áram amplitúdója

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = 2 \text{ A}, \quad (14.18.2)$$

a fázisszög

$$\phi = \text{arctg}\left(-\frac{1/\omega C}{R}\right) = -53,1^\circ = -0,927 \text{ rad}. \quad (14.18.3)$$

Így az áramkörben folyó áram $I(t) = 2 \cdot \sin(2500t + 0,927)$ A.(c) Az ohmikus és kapacitív ellenállás $R = 30 \Omega$ illetve $X_C = 1/\omega C = 40 \Omega$. Az egyes áramköri elemeken eső feszültség maximuma $U_{R0} = 60 \text{ V}$ és $U_{C0} = 80 \text{ V}$.

(d) A kondenzátor maximális energiája

$$E_C = \frac{1}{2} C U_{C0}^2 = 0,032 \text{ J}. \quad (14.18.4)$$

14.19. Feladat: (HN 34A-7) Sorbakapcsolt RL körre ($R = 30 \Omega$, $L = 15 \text{ mH}$) $U(t) = U_0 \cdot \sin \omega t$ feszültséget kapcsolunk. (Adatok: $U_0 = 100 \text{ V}$; $\omega = 2500 \text{ 1/s}$.)

(a) Mekkora az áramkör impedanciája?

(b) Adjuk meg az áramerősség időfüggését!

(c) Készítsük el az áramkör impedancia és feszültség-vektor diagramját!

(d) Számítsuk ki a tekercs mágneses erőterében tárolt maximális energiát!

Megoldás:

(a) Az áramkör impedanciája

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} = 48,02 \Omega. \quad (14.19.1)$$

(b) A körben folyó áram amplitúdója

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = 2,08 \text{ A}, \quad (14.19.2)$$

a fázisszög

$$\phi = \text{arctg}\left(\frac{L\omega}{R}\right) = 51,3^\circ = 0,896 \text{ rad}. \quad (14.19.3)$$

Így az áramkörben folyó áram $I(t) = 2,08 \cdot \sin(2500t - 0,896)$ A.

(c) Az ohmikus és az induktív reaktancia $R = 30\Omega$ illetve $X_L = L\omega = 37,5\Omega$. Az egyes áramköri elemeken eső feszültség maximuma $U_{R0} = 62,4$ V és $U_{L0} = 78$ V.

(d) A kondenzátor maximális energiája

$$E_L = \frac{1}{2}LI_0^2 = 0,032\text{J}. \quad (14.19.4)$$

14.20. Feladat: (HN 34A-8) Sorbakapcsolt RLC körre ($R = 30\Omega$, $L = 15$ mH, $C = 10\mu\text{F}$) $U(t) = U_0 \cdot \sin\omega t$ feszültséget kapcsolunk. (Adatok: $U_0 = 100$ V; $\omega = 2500$ 1/s.)

(a) Mekkora az áramkör impedanciája?

(b) Adjuk meg az áramerősség időfüggését!

(c) Készítsük el az áramkör impedancia és feszültség-vektor diagramját!

Megoldás:

(a) Az áramkör impedanciája

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = 30,1\Omega. \quad (14.20.1)$$

(b) A körben folyó áram amplitúdója

$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = 3,32\text{A}, \quad (14.20.2)$$

a fázisszög

$$\phi = \arctg\left(\frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = 4,76^\circ = 0,083\text{rad}. \quad (14.20.3)$$

Így az áramkörben folyó áram $I(t) = 2,08 \cdot \sin(2500t - 0,083)$ A.

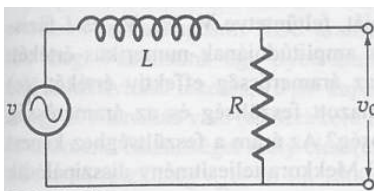
(c) Az ohmikus ellenállás, az induktív reaktancia illetve a kapacitív ellenállás $R = 30\Omega$, $X_L = L\omega = 37,5\Omega$ illetve $X_C = 1/\omega C = 40\Omega$. Az egyes áramköri elemeken eső feszültség maximuma $U_{R0} = 99,6$ V, $U_{L0} = 124,5$ V illetve $U_{C0} = 132,8$ V.

14.21. Feladat: (HN 34B-11) Tekintsünk egy fázistoló áramkört (91. ábra). A bemenetre adott feszültség $V(t) = V_{be}\sin\omega t$ ($V_{be} = 10$ V; $\omega = 200$ 1/s). Ha $L = 500$ mH,

(a) számítsuk ki R értékét, hogy a kimeneten megjelenő V_0 feszültség 30° -nyit késsen V-hoz képest és

(b) számítsuk ki a V_0 amplitúdóját.

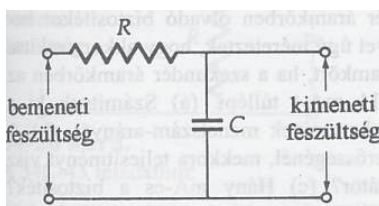
Megoldás: X



91. ábra.

14.22. Feladat: (HN 34B-12) A 92. ábrán látható áramkört aluláteresztő szűrőnek nevezik. A kondenzátor impedanciája nagyobb frekvenciákon kisebb, így a kimenő feszültség is kisebb. A szűrő karakterisztikus vagy ún. levágási frekvenciájánál a kimenő feszültség a bemenő feszültség $1/\sqrt{2}$ -szerese.

- (a) Fejezzük ki a levágási frekvenciát R és C függvényeként.
 (b) Mekkora ezen a frekvencián a kimenő és bemenő feszültség közötti fáziskülönbség?



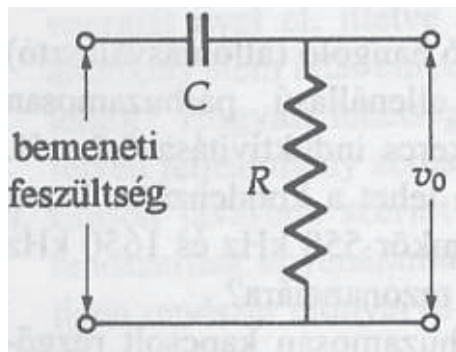
92. ábra.

Megoldás: X

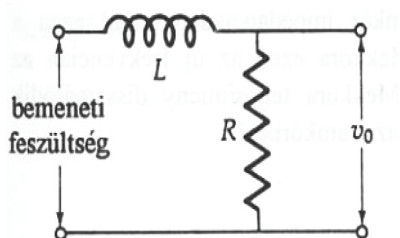
14.23. Feladat: (HN 34B-29) A 93. ábrán látható áramkört feluláteresztő szűrőként lehet használni. Elegedően nagy frekvenciákon, ha a bemenetre V_{eff} effektív értékű feszültséget kapcsolunk, az ellenálláson V_{eff}^2/R teljesítmény disszipálódik. Milyen frekvencián disszipálódik e teljesítmény fele?

Megoldás: X

14.24. Feladat: (HN 34C-43) Tekintsük a 94. ábrán látható áramkört. A bemenő feszültség időben (nem szükségszerűen szinuszosan) változik. Mutassuk meg, hogy a v_{ki} kimenő feszültség közelítőleg arányos a bemenő feszültség idő szerinti integráljával, ha az R ellenállás az induktív



93. ábra.



94. ábra. A 34C-43 feladathoz

reaktanciánál sokkal kisebb (mindazon frekvenciák esetében, amelyek a bemenő jelben jelen vannak).

Megoldás: A v_{ki} kimenő feszültség az R ellenálláson eső $I \cdot R$ feszültség. Kirchoff huroktörvénye szerint

$$U_{be} - L \frac{dI}{dt} - I \cdot R = 0 \quad (14.24.1)$$

$$\frac{dI}{dt} + I \cdot \frac{R}{L} - \frac{U_{be}}{L} = 0. \quad (14.24.2)$$

Az induktív reaktancia $X_L = \omega L$. Ha $R \ll \omega L$ minden ω -ra, akkor a második tag az I áramban jelen levő összes frekvenciára elhanyagolható⁹ (közelítőleg 0), tehát az egyenlet leegyszerűsödik

$$\frac{dI}{dt} \approx \frac{U_{be}}{L} \quad (14.24.3)$$

Ennek megoldása

$$I(t) = \frac{1}{L} \int U_{be} dt. \quad (14.24.4)$$

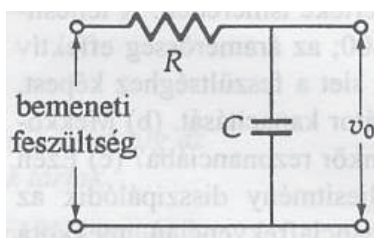
Tehát a kimenő feszültség közelítőleg valóban arányos a bemenő feszültség idő szerinti integrál-

⁹Pl. $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$ -re is, amikor $\frac{R}{\omega L} = \frac{R}{L}$

jával.

$$v_{ki} = I(t) \cdot R = R \cdot \frac{1}{L} \cdot \int U_{be} dt. \quad (14.24.5)$$

14.25. Feladat: (HN 34C-49) Tekintsük a 95. ábrán látható áramkört. A bemenő feszültség időben (nem szükségszerűen szinuszosan) változik. Mutassuk meg, hogy a V_0 kimenő feszültség közelítőleg arányos a V bemenő feszültség idő szerinti integráljával, ha a kapacitív reaktancia az R ellenállásnál sokkal kisebb (mindazon frekvenciák esetében, amelyek a bemenő jelben jelen vannak).



95. ábra.

Megoldás: X

15. Feladatok az elektromágneses hullámok témaköréből

Az eltolódási áram

15.1. Feladat: (HN 35B-2) Síkkondenzátor lemezei 10 cm átmérőjűek és 1 mm-es távolságban vannak egymástól. Mekkora a mágneses indukcióvektor nagysága a kondenzátor szélénél, ha a kondenzátor lemezei közötti potenciálkülönbség 1000 V/s sebességgel nő? (Az elektromos erőter inhomogenitását a lemezek szélénél el lehet hanyagolni.)

Megoldás: Jelölések: $D = 2r = 10$ cm, r a lemezek sugara; $d = 1$ mm; $\Delta U / \Delta t = 1000$ V/s.

Az elektromos térerősség változása

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{d} \frac{\Delta U}{\Delta t}. \quad (15.1.1)$$

Az egyik Maxwell-egyenlet értelmében a változó elektromos tér mágneses teret kelt, azaz

$$\oint B ds = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\Delta E}{\Delta t} r^2 \pi. \quad (15.1.2)$$

Ebből következik, hogy

$$B2r\pi = \mu_0\varepsilon_0 \frac{1}{d} \frac{\Delta U}{\Delta t} r^2\pi, \quad (15.1.3)$$

amelyből a mágneses indukció

$$B = \frac{\mu_0\varepsilon_0 r}{2d} \frac{\Delta U}{\Delta t} = 2,78 \cdot 10^{-13} \text{ Vs/m}^2. \quad (15.1.4)$$

15.2. Feladat: (HN 35B-4) Egy $0,5 \mu\text{F}$ -os síkkondenzátort 100Ω -os ellenálláson keresztül 9 V -os telepről töltünk. Számítsuk ki a kondenzátoron folyó eltolódási áramot a töltés megkezdése után $50 \mu\text{s}$ eltelte után.

Megoldás: Jelölések: $C = 0,5 \mu\text{F}$; $R = 100 \Omega$; $\varepsilon = 9 \text{ V}$; $t = 50 \mu\text{s}$.

Az eltolódási áram

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (15.2.1)$$

ahonnan a kért időpontban

$$I = 0,0332 \text{ A}. \quad (15.2.2)$$

Elektromágneses hullámok

15.3. Feladat: (HN 35A-8) Az elektromágneses hullám mágneses indukcióvektorának az amplitúdója vákuumban $3 \cdot 10^{-8} \text{ T}$.

- Számítsuk ki a megfelelő elektromos térerősség amplitúdóját.
- Ha az elektromos térerősség $-y$ irányú és a hullám $-x$ irányban terjed, milyen irányú a mágneses indukcióvektor?

Megoldás:

(a) Ha a mágneses indukcióvektor amplitúdója $B_0 = 3 \cdot 10^{-8} \text{ T}$, akkor az elektromos térerősség amplitúdója

$$E_0 = B_0 c = 9 \text{ V/m}. \quad (15.3.1)$$

(b) A mágneses indukcióvektor $+z$ irányú.

15.4. Feladat: (HN 35A-13) Az URH rádió által vett elektromágneses hullám elektromos térerősség-komponensének amplitúdója $5 \cdot 10^{-5}$ V/m.

- (a) Mekkora az ehhez tartozó mágneses indukcióvektor amplitúdója?
 (b) Számítsuk ki a hullám intenzitását.

Megoldás: Jelölés: $E_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ V/m

- (a) A mágneses indukció amplitúdója

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 1,67 \cdot 10^{-13} \text{ Vs/m}^2. \quad (15.4.1)$$

- (b) A hullám intenzitása

$$I = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = 3,32 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2. \quad (15.4.2)$$

15.5. Feladat: (HN 35B-15) Egy +x irányban terjedő elektromágneses síkhullám elektromos térerősség-komponensét SI egységekben az $\mathbf{E} = 6 \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \sin(kx - 10^{16} \left[\frac{1}{\text{s}} \right] t) \mathbf{j}$ függvény írja le.

- (a) Írjuk fel a mágneses indukcióvektor jellemző képletét is.
 (b) Számítsuk ki a sugárzás hullámhosszát.
 (c) Számítsuk ki a sugárzás átlagos energiasűrűségét.

Megoldás: Jelölés: $E_0 = 6$ V/m, $\omega = 10^{16}$ 1/s.

- (a) A mágneses indukcióvektor

$$\mathbf{B} = 2 \cdot 10^{-8} \left[\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \right] \sin(kx - 10^{16} \left[\frac{1}{\text{s}} \right] t) \mathbf{k}. \quad (15.5.1)$$

- (b) A terjedési sebesség $c = \omega/k$, ahonnan a k (cirkuláris) hullámszám

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad (15.5.2)$$

amellyel a hullámhossz

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = 1,88 \cdot 10^{-7} \text{ m}. \quad (15.5.3)$$

- (c) A sugárzás energiasűrűsége

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 = 1,59 \cdot 10^{-12} \text{ J/m}^3. \quad (15.5.4)$$

15.6. Feladat: (HN 35B-17) Impulzuslézer 4 ns hosszúságú, 2 J energiájú fényimpulzusokat ad le. A fénynyaláb átmérője 3 mm.

- Számítsuk ki a kibocsátott fénynyaláb hosszát.
- Számítsuk ki a fénynyaláb energiasűrűségét (J/m^3 egységben).
- Mekkora a hullám E_o , elektromos térerősség komponensének az amplitúdója?

Megoldás: Jelölések: $t = 4 \cdot 10^{-9}s$, $\varepsilon = 2J$, $d = 3 \cdot 10^{-3}m$ és $A = \frac{d^2 \pi}{4}$

(a) A fénynyaláb hossza $l = c \cdot t = 1,199m$.

(b) Energiasűrűsége $w = \frac{\varepsilon}{Al} = \frac{4\varepsilon}{ld^2\pi} = 2.360 \cdot 10^5 \frac{J}{m^3}$

(c) E amplitúdója:

A $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ Poynting vektor megadja a terjedési irányra merőleges egységnyi felületen, időegység alatt átáramló energia mennyiségét. Vákumban $\mu \equiv \mu_o$. Az EM hullámokban \mathbf{E} és \mathbf{B} egymásra merőlegesek, továbbá $E = cB$ ezért $B = \frac{E}{c}$, vagyis

$$S = |\mathbf{S}| = \frac{1}{\mu_o} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{E^2}{c \mu_o} \quad (15.6.1)$$

A lézer fényét elektromágneses síkhullámnak tekinthetjük, amiben a nyaláb keresztmetszetén t idő alatt ε energia áramlik át. Ez kifejezhető a Poynting vektor periodusidőre vett integráljával, vagy, ekvivalens módon, a Poynting vektor átlagának, a nyaláb keresztmetszetének és az időnek a szorzatával, azaz

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \langle S \rangle \frac{d^2 \pi}{4} t \\ &= \frac{1}{c \mu_o} \langle E^2 \rangle \frac{d^2 \pi}{4} t \end{aligned} \quad (15.6.2)$$

$$\langle E^2 \rangle = \frac{4 \varepsilon c \mu_o}{d^2 \pi t} \quad (15.6.3)$$

Ha E harmonikus (színusz, vagy koszinusz) függvény, akkor négyzetének átlaga helytől függetlenül az amplitúdójának éppen a fele¹⁰:

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_o^2 \sin^2(\omega t - kx) dt = \frac{1}{2} E_o^2 \quad (15.6.4)$$

¹⁰

$$\begin{aligned} \langle E^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T E_o^2 \sin^2(\omega t - kx) dt = \frac{1}{T} \int_0^T E_o^2 \frac{1 - \cos 2(\omega t - kx)}{2} dt \\ &= E_o^2 \frac{1}{T} \left[\frac{t}{2} \right]_0^T - E_o^2 \frac{1}{2T} \int_0^T \cos 2(\omega t - kx) dt = \frac{E_o^2}{2} - \frac{E_o^2}{4\omega T} [\sin 2(\omega t - kx)]_0^T \\ &= \frac{E_o^2}{2} - \frac{E_o^2}{4\omega T} (\sin 2(2\pi - kx) - \sin(-2kx)) = \frac{E_o^2}{2} \end{aligned}$$

Tehát (15.6.3)-ből

$$E_o = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot \varepsilon c \mu_o}{d^2 \pi t}} \quad (15.6.5)$$

$$= \sqrt{\frac{8 \cdot 2J \cdot 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \cdot 2.998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{(3 \cdot 10^{-3})^2 m^2 3.1415}} = 2.309 \cdot 10^8 \frac{V}{m}. \quad (15.6.6)$$

15.7. Feladat: (HN 35A-22) Egy 100 mW-os lézernyaláb egy tükörről merőlegesen visszaverődik. Mekkora erő hat a tükörré?

Megoldás: Jelölés: $P_{telj} = 100$ mW.

A sugárzás U energiája és p impulzusa között összefüggés:

$$U = pc. \quad (15.7.1)$$

Az t időegységgel osztva a P_{telj} teljesítmény és az F erő között a

$$P_{telj} = Fc \quad (15.7.2)$$

kapcsolat áll fenn. Mivel tökéletes visszaverődésről van szó, így az impulzus változás és – ennek megfelelően – az erőhatás kétszeres lesz, azaz

$$F = \frac{2P_{telj}}{c} = 6,66 \cdot 10^{-10} \text{ N}. \quad (15.7.3)$$

15.8. Feladat: (HN 35A-23) Tiszta időben a Föld felszínén a napfény intenzitása 840 W/m^2 . Ha egy, a napsugarakra merőleges felület tökéletesen reflektál, mekkora rajta a sugárnyomás?

Megoldás: Tökéletes reflexió esetén a sugárnyomás

$$p_{ny} = \frac{2I}{c} = 5,6 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2, \quad (15.8.1)$$

ahol I a napfény intenzitása.

15.9. Feladat: (HN 35B-25) Egy 15 mW teljesítményű hélium-neon lézer kör keresztmetszetű fénynyalábot bocsát ki. A nyaláb átmérője 2 mm, a fény hullámhossza 632,8 nm.

(a) Mekkora a nyalábban az elektromos térerősség maximális értéke?

- (b) Mekkora energia van a nyaláb 1 méteres szakaszában?
 (c) Mekkora impulzusa van a nyaláb 1 méteres szakaszának?

Megoldás:

(a) Jelöljük P, d, λ, E_o -val rendre a teljesítményt, átmérőt, hullámhosszat és a térerősség amplitudóját!

Első megoldás: Poynting vektorral

Ez a feladat csak annyiban különbözik az előzőtől, hogy most a teljesítmény van megadva és nem a leadott teljes energia és az energialeadás ideje. Vagyis a 15.6.5 képletbe ε/t helyére kell P -t helyettesíteni:

$$\begin{aligned}
 E_o &= \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot P c \mu_o}{d^2 \pi}} = \\
 &= \sqrt{\frac{8 \cdot 15 \cdot 10^{-3} \text{ W} \cdot 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 2.998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(2 \cdot 10^{-3})^2 \text{ m}^2 3.1415}} \\
 &= \underline{1.897 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}} \quad (15.9.1)
 \end{aligned}$$

Második megoldás: Energiasűrűséggel

A $T = \frac{\lambda}{c}$ periódusidő alatt kisugárzott energia $w = P \cdot T$ és ez az energia egy $V = d^2 \pi \lambda / 4$ térfogatban oszlik el. Az átlagos energiasűrűség

$$\begin{aligned}
 \langle w \rangle &= \frac{\Delta w}{V} = \frac{4P \cdot T}{d^2 \pi \lambda} = \frac{4P}{d^2 \pi c} \\
 \langle w \rangle &= \frac{4P}{d^2 \pi c} \quad (15.9.2)
 \end{aligned}$$

Ugyanakkor vákumban

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_o \langle E^2 \rangle + \frac{1}{\mu_o} \langle B^2 \rangle \right) \quad (15.9.3)$$

A lézer által kisugárzott fény egy EM síkhullám, tehát az elektromos és mágneses energiasűrűség

átlagai benne egyenlők¹¹

$$\varepsilon_o \langle E^2 \rangle = \frac{1}{\mu_o} \langle B^2 \rangle \quad (15.9.9)$$

$$\begin{aligned} \langle w \rangle &= \varepsilon_o \langle E^2 \rangle \\ &= \varepsilon_o E_o^2 \cdot \langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_o E_o^2 \end{aligned} \quad (15.9.10)$$

ahonnan, mivel $\langle w \rangle = P \cdot T$

$$\begin{aligned} E_o &= \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot P}{d^2 \pi \varepsilon_o c}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 15 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{(2 \cdot 10^{-3})^2 m^2 \cdot 3.14158,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}} \\ &= \underline{1,897 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{m}}} \end{aligned} \quad (15.9.11)$$

(b) A nyaláb $l = 1 \text{ m}$ hosszúságú darabjában levő energia:

$$\varepsilon = P \cdot t_l = P \cdot \frac{l}{c} = 15 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{2.998 \cdot 10^8} = 5.004 \cdot 10^{-11} \text{ J} \quad (15.9.12)$$

(c) A fény impulzusa és energiája közötti kapcsolat:

$$p = \frac{\varepsilon}{c} = 1.669 \cdot 10^{-19} \text{ kg m/s}. \quad (15.9.13)$$

15.10. Feladat: (HN 35C-33) Elektromágneses sugárzást kibocsátó forrás hosszú egyenes mentén sugároz (vonalforrás); teljesítménye méterenként 20 W. Mekkora az elektromos térerősség amplitúdója a vonalforrástól 5 m-re?

¹¹Levezetés: $cB = E$, $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}$, azaz $B = \sqrt{\varepsilon_o \mu_o} E$

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_o \langle E^2 \rangle + \frac{1}{\mu_o} \langle B^2 \rangle \right) \quad (15.9.4)$$

$$= c \frac{1}{2} (\varepsilon_o \langle E^2 \rangle + \varepsilon_o \langle E^2 \rangle) \quad (15.9.5)$$

$$= \varepsilon_o \langle E^2 \rangle = \varepsilon_o \langle E_o^2 \cdot \sin^2(kx - \omega t) \rangle \quad (15.9.6)$$

$$= \varepsilon_o E_o^2 \cdot \langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle \quad (15.9.7)$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_o E_o^2 \quad (15.9.8)$$

Megoldás: Jelölések: $P = 20 \text{ W}$ /nem feledve, hogy méterenként/; $r = 5 \text{ m}$. Mivel vonalforrásról van szó, így egy r sugarú és $l = 1 \text{ m}$ hengerpaláستtal számolunk. /Itt vesszük figyelembe az méterenkénti hosszt./

A kisugárzott S energiaáram sűrűség egyrészt az

$$S = \frac{P}{2r\pi l}, \quad (15.10.1)$$

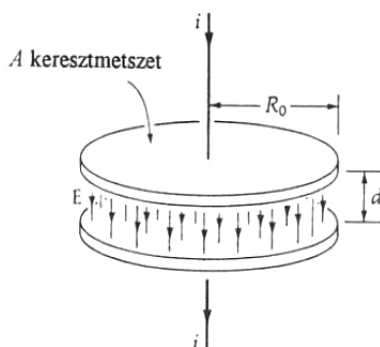
másrészt az

$$S = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2 \quad (15.10.2)$$

alakban írható fel. A (15.10.1) és (15.10.2) egyenletek egyenlőségéből a térerősség amplitúdója

$$E_0 = \sqrt{\frac{P\mu_0 c}{r\pi l}} = 21,9 \text{ V/m}. \quad (15.10.3)$$

15.11. Feladat: (HN 35C-37) Síkkondenzátort i áramerősséggel töltünk (96. ábra).



96. ábra. A 35C-37 feladathoz

(a) Mutassuk meg, hogy mialatt az elektromos térerősség növekszik, az \mathbf{S} Poynting-vektor a lemezek közötti térben mindenütt a kondenzátor tengelye felé mutat. (A lemezek szélénél a térerősség inhomogenitásait figyelmen kívül hagyhatjuk.)

(b) Ha a Poynting vektort a kondenzátort körbevevő hengerpalást mentén integráljuk, akkor a felület által bezárt térrészbe áramló energia nagyságát kapjuk meg. Mutassuk meg, hogy ez az energiaáram egyenlő a kondenzátor elektromos erőterében tárolt energia növekményével. (Ebben az értelemben, a kondenzátor energiája nem az áramvezető huzalokon keresztül, hanem a környező térből „érkezik”.)

Megoldás:

(a)

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (15.11.1)$$

Ha \mathbf{E} változik, akkor ennek hatására önmagukba záródó mágneses erővonalakkal jellemezhető \mathbf{B} tér indukálódik a

$$\frac{1}{\mu_0} \oint \mathbf{B} d\mathbf{s} = \int \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} d\mathbf{A} \quad (15.11.2)$$

egyenlet szerint. Az indukált mágneses tér merőleges az elektromos tér változására és egy adott r távolságban a kondenzátor tengelyétől mindenhol ugyanakkora nagyságú. Amennyiben $d\mathbf{s}$ -et \mathbf{H} -val párhuzamosnak választjuk a baloldali integrál:

$$\frac{1}{\mu_0} \oint \mathbf{B} d\mathbf{s} = 2\pi r \frac{1}{\mu_0} B. \quad (15.11.3)$$

A jobboldali integrált a baloldali integrálás zárt görbéjére illeszkedő tetszőleges felületre kell venni. Legyen ez a felület a kondenzátorlemezekkel párhuzamos körlap. Mivel a lemezek között mind \mathbf{E} , mind $\frac{d\mathbf{E}}{dt}$ homogén és lefelé mutat, vagyis párhuzamos a felület normálvektorával, ez az integrál is egyszerűen kiszámítható:

$$\int \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} d\mathbf{A} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} \cdot r^2 \pi \quad (15.11.4)$$

Behelyettesítve 15.11.2 egyenletbe

$$2 \frac{1}{\mu_0} B = \varepsilon_0 r \frac{dE}{dt} \quad (15.11.5)$$

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \varepsilon_0 r \frac{dE}{dt} \quad (15.11.6)$$

Az \mathbf{E} vonalak az ábrán lefelé mutatnak. Az \mathbf{E} nő, ezért $\Delta \mathbf{E}$ változása azonos irányú vele, vagyis a mágneses erővonalak a lemezek síkjával párhuzamos, a pozitív lemez irányából nézve az óramutató járásával megegyező irányú, körök. \mathbf{S} iránya minden pontban mind \mathbf{E} -re, mind \mathbf{B} -re merőleges, így a kondenzátor tengelye felé (befelé) mutat. \mathbf{S} integrálja a kondenzátort körülvevő hengerpalástra ¹² megadja az energiaáramlás fluxusát:

$$\begin{aligned} \Phi(\varepsilon) &= \oint \mathbf{S} d\mathbf{A} = 2\pi r d \cdot |\mathbf{S}| = 2\pi r d \cdot E \cdot \frac{1}{\mu_0} B \\ &= 2\pi r d \cdot E \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_0 r \frac{dE}{dt} \\ &= \varepsilon_0 r^2 \pi d E \frac{dE}{dt} \end{aligned} \quad (15.11.7)$$

¹²A dA felületelem irányát a tengely felé mutató irányba vesszük fel.

Mivel ez a kondenzátor belseje felé mutat a kondenzátor energiája időegységenként ennyivel növekszik.

$$\Delta\varepsilon_C(\Delta t) = \Phi(\varepsilon)\Delta t = \varepsilon_0 r^2 \pi E \frac{dE}{dt} \Delta t d \quad (15.11.8)$$

A kondenzátor energiájának kis Δt idő alatti növekedését az árammal is kiszámolhatjuk:

$$\Delta\varepsilon_C(\Delta t) = \Delta q \cdot U_C = i \cdot \Delta t \cdot U_C \quad (15.11.9)$$

$$= i \cdot \Delta t \cdot E \cdot d = i \cdot E \cdot \Delta t \cdot d \quad (15.11.10)$$

Az i áram azonban a lemezek között nulla. Nagysága azonban megegyezik a $j_{elt} = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$ *eltolási áramsűrűség*

$$i_{elt} = j_{elt} A = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} \cdot A \quad (15.11.11)$$

fluxusával, az i_{elt} *eltolási árammal*, ahol $A = r^2 \pi$. Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_C(\Delta t) &= \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} \cdot r^2 \pi E \cdot \Delta t \cdot d \\ &= \varepsilon_0 r^2 \pi E \frac{dE}{dt} \Delta t d \end{aligned} \quad (15.11.12)$$

Láthatjuk, hogy 15.11.8 és 15.11.12 valóban megegyeznek. A feladat állítását ezzel igazoltuk.

16. Feladatok a geometriai optika témaköréből

Fénytörés

16.1. Feladat: (HN 37B-2) Ha keskeny lézernyaláb vastag üveglemezről verődik vissza, akkor két párhuzamos nyaláb keletkezik. Az egyik a lemez előlapjáról, a másik a lemez hátlapjáról verődik vissza. Tegyük fel, hogy a beesési szög θ , a lemez vastagsága D , a lemez üvegének törésmutatója n . Adjuk meg a két visszavert sugár merőleges d távolságát θ , D és n függvényében.

[Megoldás: X](#)

16.2. Feladat: (HN 37B-11) Nyugodt vizű tó fenekén lévő hal a vízfelszín felett a tájnak, a haltól induló, függőleges tengelyű körkúpba eső részét láthatja. Számoljuk ki azt a térszöget (szteradiánokban), amelyet a hal szeme befog.

[Megoldás: X](#)

16.3. Feladat: (HN 37C-37) Vezessük le a Snellius fénytörési törvényt a Fermat-elvből kiindulva.

Megoldás: Legyen a két közeg határa az x tengely. Az x tengely feletti anyag törésmutatója n_1 , a tengely alatti anyag törésmutatója n_2 . A fénysugár induljon az n_1 közeg (x_1, y_1) pontjából és érkezzon meg az n_2 közeg $(x_2, -y_2)$ pontjába. Az áthaladási pont koordinátája $(x, 0)$. Az x koordináták között álljon fenn: $x_1 < x < x_2$. A Fermat-elv értelmében az optikai út (eikonál) minimális:

$$S(x) = \int_{(1)}^{(2)} n ds = n_1 \sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2} + n_2 \sqrt{(x_2-x)^2 + y_2^2} = \min., \quad (16.3.1)$$

azaz

$$\frac{dS(x)}{dx} = 0 = n_1 \underbrace{\frac{x-x_1}{(x-x_1)^2 + y_1^2}}_{\sin\alpha} + n_2 \underbrace{\frac{x_2-x}{(x_2-x)^2 + y_2^2}}_{\sin\beta}. \quad (16.3.2)$$

Itt α a beesési, β a törési szög. Az összefüggést más alakban írva:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (16.3.3)$$

amit bizonyítani akartunk.

17. Feladatok a hullámoptika témaköréből

Interferencia

17.1. Feladat: (HN 38A-3) Kétréses kísérletben a nátriumlámpa fénye ($\lambda_1 = 589$ nm) egymástól $d_1 = 1,8$ mm-re lévő csíkokat hoz létre az ernyőn. Mekkora lesz a csíkok közti távolság, ha higanygőzslámpával ($\lambda_2 = 436$ nm) világítjuk meg a réseket?

Megoldás: A nátriumlámpa fényére az erősítések helyei

$$d \sin\theta = m\lambda_1, \quad (17.1.1)$$

ahol d a két rés közötti távolság. Ha kis szögeket tekintünk, akkor ehelyett írhatjuk, hogy

$$d\theta = m\lambda_1. \quad (17.1.2)$$

Az ernyőn a csíkok helyzetét az

$$x_1 = L \operatorname{tg} \theta \sim L \theta = m \frac{L}{d} \lambda_1, \quad (17.1.3)$$

ahol L az ernyő résektől való távolsága. Két csík közötti távolság

$$d_1 = \frac{L}{d} \lambda_1. \quad (17.1.4)$$

Hasonló összefüggés áll fenn a higanygőz lámpa fényre:

$$d_2 = \frac{L}{d} \lambda_2. \quad (17.1.5)$$

E két egyenletből a higanygőz lámpa csíkjainak távolsága

$$d_2 = d_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1,33 \text{ mm}. \quad (17.1.6)$$

17.2. Feladat: (HN 38B-8) A hélium-neon lézer ($\lambda = 633 \text{ nm}$) sugárnyalábját egy ernyőre irányítjuk. Hány hullámhossznyival nő meg az optikai úthossz, ha a nyaláb útjába merőlegesen $d = 0,11 \text{ mm}$ vastag, $n = 1,55$ törésmutatójú üveglapot helyezünk?

Megoldás: A d úthosszon

$$N_1 = \frac{d}{\lambda} = 173,78 \quad (17.2.1)$$

hullám fér el. Az n törésmutatójú üvegben a hullámhossz

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}, \quad (17.2.2)$$

így a d távolságban

$$N_2 = \frac{d}{\lambda/n} = \frac{nd}{\lambda} = 269,35 \quad (17.2.3)$$

hullám fér el. A kettő közötti különbség 95,57 hullámhossznyi.

17.3. Feladat: (HN 38B-12) Kettős rést 600 nm hullámhosszúságú fényvel világítunk meg és ezzel egy ernyőn interferenciát hozunk létre. Ezután igen vékony flintüvegből ($n = 1,65$) készült lemezt helyezünk csak az egyikésre. Ennek következtében az interferenciakép főmaximuma pontosan oda tolódik el, ahol az eredeti elrendezésben a tizedrendű maximum volt. Számítsuk ki ebből, hogy milyen vastag volt az üveglemez!

Megoldás: Legyen a rések távolsága d , az üveglemez vastagsága w ! Az üveglemez behelyezése

előtt az intenzitásmaximum a rések középvonalában volt, ami a zérus fáziskülönbséghez tartozik. Az üveglemez behelyezése után a zérus fáziskülönbségű hely pozíciója eltolódik, mégpedig úgy, hogy az üveglemez fázistolását az üveglemezzel nem fedett résen áthaladó fény hosszabb útja kompenzálja. Ha az ernyő távolsága elég nagy, a két résen áthaladó fénysugarak párhuzamosaknak tekinthetők. A tizedik maximumhoz tartozó α_{10} szög a flintüveg nélküli esetben így a

$$\Delta s^{\text{levegő}} = 10 \lambda$$

$$d \cdot \sin \alpha_{10} = 10 \lambda \quad (17.3.1)$$

egyenletből kapható meg. A w vastagságú flintüveg behelyezése $\Delta \Phi$ -vel megváltoztatja az illető résen áthaladó fényhullám fázisát. Hogy mennyivel azt úgy kaphatjuk meg, hogy kiszámoljuk mindkét résre a w úthosszhoz tartozó fázisokat és ezeket kivonjuk egymásból. Az üveglemezzel nem fedett rés esetén ezt a távolságot a fény a levegőben teszi meg, a másik résnél üvegben, ahol nagyobb az optikai úthossz¹³. :

$$\Delta \Phi_{\text{levegő}} = 2 \pi \frac{w}{\lambda}$$

$$\Delta \Phi_{\text{üveg}} = 2 \pi \frac{w}{\lambda_{\text{üveg}}} = 2 \pi \frac{w \cdot n}{\lambda}$$

$$\Delta \Phi = \Delta \Phi_{\text{üveg}} - \Delta \Phi_{\text{levegő}} = 2 \pi \frac{w \cdot (n-1)}{\lambda} \quad (17.3.2)$$

ami az optikai úthosszkülönbségekkel is kiszámítható:

$$s_0 = w \quad \text{optikai úthossz levegőben}$$

$$s_{\text{üveg}} = n \cdot w \quad \text{optikai úthossz az üvegben}$$

$$\Delta s = s_{\text{üveg}} - s_0 = w \cdot (n-1) \quad (17.3.3)$$

$$\Delta \Phi = 2 \pi \frac{\Delta s}{\lambda} = 2 \pi \frac{w \cdot (n-1)}{\lambda} \quad (17.3.4)$$

Vegyük észre, hogy az optikai úthossz 17.3.3 képletében a hullámhossz nem szerepel.

A flintüveggel a zéró fáziskülönbséghez tartozó szög meg kell egyezzen α_{10} -el:

$$\Delta s = d \cdot \sin \alpha_{10} (= 10 \lambda)$$

$$w \cdot (n-1) = 10 \lambda$$

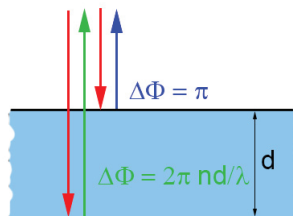
$$w = \frac{10 \lambda}{n-1} = \frac{10 \cdot 6 \cdot 10^{-7}}{0,65} = 9,23 \cdot 10^{-6} m \quad (17.3.5)$$

A flintüveg lemez vastagsága tehát 0,00923 mm.

¹³A két közegben a fény sebessége és hullámhossza más a frekvenciája ($\nu = c(n)/\lambda = c/(n \cdot \lambda)$) viszont nem.

17.4. Feladat: (HN 38A-16) Adjuk meg annak a legvékonyabb szappanhártyának ($n = 1,33$) a vastagságát, amely a legnagyobb intenzitással a 400 nm hullámhosszúságú kék fényt veri vissza.

Megoldás: Legyen a szappanhártya levegőben. A beeső fény a 38-16a ábra szerint a szappanhártya mindkét felületén visszaverődik¹⁴. A két visszavert hullám interferenciája adja meg a teljes



97. ábra. A 38A-16 feladathoz

visszavert hullámot. Maximális akkor lesz a visszavert intenzitás, ha a két visszavert hullám optikai útjának különbsége a hullámhossz egész számú többszöröse ($\Delta s = m \cdot \lambda$), vagyis a fáziskülönbség $\Delta \Phi = 2\pi \cdot m$, ahol $m = 0, 1, 2, \dots$. Figyelembe kell azonban azt is venni, hogy amikor a fénycsugár optikailag sűrűbb közegről verődik vissza akkor egy $\lambda/2$ útkülönbségnek megfelelő π nagyságú fázisugrás történik míg az optikailag ritkább közeg határfelületéről visszaverődésnél nincs fázisugrás. Az ábra alapján

$$\Delta s_u = 2dn \text{ optikai útkülönbség a szappanhártyában} \quad (17.4.1)$$

$$\Delta s_f = \frac{1}{2}\lambda \text{ fázisugrás} \quad (17.4.2)$$

$$\Delta s = 2dn - \frac{1}{2}\lambda \text{ teljes optikai útkülönbség} \quad (17.4.3)$$

$$\Delta \Phi = 2\pi \frac{\Delta s - \frac{1}{2}\lambda}{\lambda} \text{ teljes fáziskülönbség} \quad (17.4.4)$$

Maximális amplitudó eléréséhez a teljes optikai útkülönbségnek $m\lambda$ -val kell megegyeznie, vagyis (17.4.3)-t felhasználva

$$2dn - \frac{1}{2}\lambda = m \cdot \lambda \quad (17.4.5)$$

$$d = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda}{2n} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (17.4.6)$$

¹⁴Az ábrán a beeső és visszavert hullámokat párhuzamos vonalak adják meg, a valóságban az ezekre a vonalakra merőleges hullámfelületek interferálnak.

Behelyettesítve a hullámhosszat az első három lehetőség a maximális reflexió eléréséhez

$$d_0 = \frac{\frac{1}{2} 400 \cdot 10^{-9}}{21,33} = 7,519 \cdot 10^{-8} \text{ m} \quad (17.4.7)$$

$$d_1 = \frac{\frac{3}{2} 400 \cdot 10^{-9}}{21,33} = 2,256 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad (17.4.8)$$

$$d_2 = \frac{\frac{5}{2} 400 \cdot 10^{-9}}{21,33} = 3,759 \cdot 10^{-7} \text{ m} \quad (17.4.9)$$

Tehát a legvékonyabb szappahártya, amelyik a legnagyobb intenzitással a 400 nm hullámhosszúságú kék fényt veri vissza $7,519 \cdot 10^{-8}$ m vastag.

17.5. Feladat: (HN 38B-19) Víz felszínén úszó olajréteg ($n = 1,45$) merőlegesen beeső fehér fényel van megvilágítva. A folt $d = 280$ nm vastag. Adjuk meg, hogy melyik szín dominál

- (a) a visszavert fényben és
- (b) az átmenő fényben!

Megoldás: Mindkét esetben az a fény dominál, amelyikre erősítés van.

(a) A visszavert fényben két nyaláb interferenciáját tekintjük. Az egyik a felületről verődik vissza. A nagyobb törésmutatójú közeg miatt a visszavert nyaláb π fázisugrás szenved, amely $\lambda/2$ úthosszkülönbségnek felel meg. A másik nyaláb az olajban halad, majd a víz felszínén reflektálódik. Az optikai úthossz $2nd$. Mivel a feladat nem tartalmazza a víz törésmutatóját, így ha kisebb mint az olajé, akkor nincs fázisugrás, ha nagyobb, akkor π .

A kisebb törésmutató esetén erősítés feltétele

$$2nd - \frac{1}{2}\lambda = m\lambda. \quad (17.5.1)$$

A látható tartományba eső hullámhossz $\lambda = 541$ nm.

A nagyobb törésmutató esetén az erősítés feltétele

$$2nd = m\lambda, \quad (17.5.2)$$

ahonnan $\lambda = 406$ nm.

- (b) A feladatrész az előzőhöz hasonló megfontolásokkal oldható meg.

17.6. Feladat: (HN 39A-1) Résen elhajló 550 nm hullámhosszúságú fény diffrakciós képét a réstől 3 m távolságra lévő ernyőn fogjuk fel. A centrális maximum két oldalán lévő harmadrendű

minimumok távolsága 25 mm. Mekkora a rés szélessége?

Megoldás: Adatok: $\lambda = 550 \text{ nm}$; $L = 3 \text{ m}$; $D = 25 \text{ mm}$.

Rés esetén a minimumok az

$$m\lambda = \sin\theta \quad (m = 1, 2, \dots, n) \quad (17.6.1)$$

összefüggésből határozhatjuk meg, ahol m a kioltási helyek sorszáma, θ az elhajlás szöge. (Ne feledjük, hogy középen erősítés van!) Mivel két harmadrendű ($m=3$ és $m=-3$ szimmetrikusan) vonal távolsága adott, így elég a félszögre vonatkozó adatokkal számolni. Így pl. az $m=3$ -hoz tartozó elhajlási szög

$$\text{tg}\theta = \frac{D/2}{L}. \quad (17.6.2)$$

Felhasználva, hogy kis szögekre a $\sin\theta = \text{tg}\theta$ közelítés alkalmazható, a rész szélességére az

$$a = \frac{m\lambda}{\sin\theta} = \frac{2m\lambda L}{D} \quad (17.6.3)$$

adódik. Az adatok behelyettesítésével: $a = 0,4 \text{ mm}$.

17.7. Feladat: (HN 39-A2) Egy rést az 550 nm hullámhosszúságú fény világít meg és a réstől 3 m-re lévő ernyőn elhajlási kép alakul ki. Határozzuk meg a centrális maximum teljes szélességét, ha a rés (a) 0,2 mm és (b) 0,4 mm szélességű.

Megoldás: Egy részre

$$d \cdot \sin\alpha = m \cdot \lambda \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad \text{minimumok} \quad (17.7.1)$$

Jelöljük a hullámhosszat λ -val, az ernyő távolságát L -lel és a rés szélességét d -vel! A centrális maximum teljes W szélessége megegyezik az $m = 1$ -hez tartozó minimumok távolságával, ami az első minimumokhoz tartozó $\alpha_{min,1}$ szöggel számolható ki:

$$\text{ahol } \sin\alpha_{min,1} = \frac{\lambda}{d} \text{ és} \\ W = 2 \cdot L \cdot \text{tg}\alpha \quad (17.7.2)$$

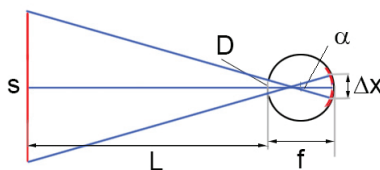
$$\sin\alpha_{min,1} = \begin{cases} 2.75 \cdot 10^{-3} & (d = 0,2 \text{ mm}) \\ 1.38 \cdot 10^{-3} & (d = 0,4 \text{ mm}) \end{cases} \quad (17.7.3)$$

Mivel $\alpha_{min,1}$ kicsi $\sin \alpha_{min,1} \approx \text{tg } \alpha_{min,1} \approx \alpha_{min,1}$, így

$$W \approx 2 \cdot L \cdot \sin \alpha_{min,1} = \begin{cases} 8.25 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ 1.65 \cdot 10^{-2} \text{ m} \end{cases} \quad (17.7.4)$$

17.8. Feladat: (HN 39A-11) Egy bizonyos távolságra eltávolodott autó két hátsó lámpája éjszaka alig különböztethető meg egymástól, mint két különálló fényforrás. Becsüljük meg az autótól való távolságunkat, feltéve, hogy a lámpák közötti távolság 1,5 m és átlagosan 640 nm hullámhosszú fénysugarat bocsátanak ki, a megfigyelő szemének a pupillája pedig 6 mm átmérőjű. (Megjegyzés: különböző sűrűségű levegőrétegekben a fénytörés hatására a kép homályosabbá válik, így a távolság valójában kisebb a számítottnál.)

Megoldás: Az autólámpák elég messze vannak ahhoz, hogy pontszerűnek tekinthessük azokat és a belőlük kiinduló fény a megfigyelő szeméhez jó közelítéssel két, nem azonos szögben terjedő síkhullámként érkezzon. Ha a szemet egy D átmérőjű kör alakú diafragmával ellátott f fókusztávolságú lencsével modellezzük, az a síkhullámot egy $\Delta x = \alpha \cdot f$ méretű foltra képezi le, ahol $\alpha \approx \sin \alpha = 1.22 \frac{\lambda}{D}$. A két hátsó lámpa akkor különböztethető meg, ha a nekik megfelelő foltok a látókérgen éppen Δx távolságba esnek. A 17. ábrán piros vonal jelöli a lámpák távolságát és a szemben belül a pupilla véges mérete miatti Δx méretű foltokat. A foltok mérete és középpontjaik távolsága megegyezik. A 17. ábra alapján



98. ábra. A 39A-11 feladathoz

$$\begin{aligned} \Delta x &= f \cdot \alpha = f \cdot 1.22 \frac{\lambda}{D} \\ S &= (L+f) \cdot \alpha \approx L \cdot \alpha \\ L \approx \frac{S}{\alpha} &= \frac{SD}{1,22 \lambda} = \frac{1,5 \cdot 0,006}{1,22 \cdot 6,4 \cdot 10^{-7}} = 1,15 \cdot 10^4 \text{ m.} \end{aligned} \quad (17.8.1)$$

Vagyis az autó távolsága 11.5 km.

17.9. Feladat: (HN 39A-27) A $\lambda = 0,30$ nm hullámhosszúságú röntgensugarak NaCl kristályon elsőrendű visszaverődést hoznak létre $\varphi = 30^\circ$ -os szögben érkezve. Számítsuk ki, mekkora az a rácsállandó, ami ennek a visszaverődésnek felel meg.

Megoldás: A Bragg-féle szórás feltétel szerint a diffrakció maximuma a

$$m\lambda = 2d \sin \varphi, \text{ ahol } m = 1, 2, 3, \dots \quad (17.9.1)$$

Innen a rácsállandó

$$d(m = 1) = \frac{m\lambda}{2d \sin \varphi} = 0,3 \text{ nm}. \quad (17.9.2)$$

17.10. Feladat: (HN 40A-2) Két ideális polárszűrő lemez úgy van egymásra helyezve, hogy a transzmissziós tengelyeik közötti szög θ . Adjuk meg a lemezek közötti szöget úgy, hogy a beeső polarizálatlan fény intenzitásának $\eta = 45\%$ -a átjusson.

Megoldás: A második lemez utáni intenzitás a Malus-törvény értelmében

$$I(\theta) = \frac{I_0}{2} \cos^2 \theta, \quad (17.10.1)$$

amelyből az áteresztés aránya

$$\eta = \frac{1}{2} \cos^2 \theta. \quad (17.10.2)$$

Az adatok behelyettesítésével $\theta = 18,43^\circ$.

17.11. Feladat: (HN 40A-7) Üveglemez Brewster-szöge 57° , ha a lemez a levegőben van. Számítsuk ki a lemez Brewster-szöget, ha vízbe helyezzük ($n = 1,33$)

Megoldás: A Brewster-szög azt jelenti, hogy a visszavert és megtört nyaláb által bezárt szög 90° , így a törés szöge 33° . Ezzel az üveg törésmutatója

$$n_{\text{ü}} = \frac{\sin 57^\circ}{\sin 33^\circ} = 1,54. \quad (17.11.1)$$

A vízbe helyezés esetén jelentse α a beesési, β a törési szöget. Ekkor egyrészt

$$\frac{n_{\text{ü}}}{n} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad (17.11.2)$$

másrészt a Brewster-szög miatt teljesül, hogy

$$90^\circ = \alpha + \beta. \quad (17.11.3)$$

Az egyenletrendszer megoldva a beesési szög $\alpha = 49,2^\circ$.

18. A kvantummechanika előzményei

A kvantummechanika előzményei

18.1. Feladat: (HN 42A-7) Az emberi szem kb. 555 nm hullámhossznál a legnagyobb érzékenységgű. Adjuk meg annak a fekete testnek a hőmérsékletét, amely sugárzásának a spektrális teljesítménye ezen a hullámhosszon a maximális!

Megoldás: Wien törvénye:

$$\lambda_{max} \cdot T = 2,8977721 \cdot 10^{-3} \text{ K m}, \quad (18.1.1)$$

ahonnan

$$T = \frac{2,8977721 \cdot 10^{-3}}{555 \cdot 10^{-9}} = 5221 \text{ K}. \quad (18.1.2)$$

18.2. Feladat: (HN 42A-15) A nátrium kilépési munkája 2,75 eV. Adjuk meg a fotoelektromos hatás küszöbhullámhosszát Na esetére!

Megoldás: Az Einstein-képlet szerint

$$h \cdot \nu = W + E_{kin} = W + \frac{1}{2} m v^2. \quad (18.2.1)$$

A küszöbhullámhossz esetén a kilépő elektronok kinetikus energiája nulla

$$h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} = W \quad (18.2.2)$$

$$\lambda = \frac{hc}{W} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \cdot 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{2,75 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}} \quad (18.2.3)$$

$$\lambda = \underline{4,509 \cdot 10^{-7} \text{ m}}. \quad (18.2.4)$$

18.3. Feladat: (HN 42B-22) Egy gamma-foton, melynek energiája az elektron nyugalmi energiájával (511 keV) egyenlő, összeütközik egy elektronnal, ami kezdetben nyugalomban volt. Számítsuk ki, mekkora mozgási energiát nyer az elektron az ütközésben, ha a foton az eredeti pályaegyeneséhez képest 30° -os szögben szóródik!

Megoldás: A feladatban leírt folyamat a Compton effektus, amelynek képlete

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_{Compton} (1 - \cos \theta), \quad (18.3.1)$$

ahol

$$\lambda_{Compton} = \frac{h}{m_e c} = 2,43 \cdot 10^{-12} m \quad (18.3.2)$$

z elektron Compton hullámhossza. Behelyettesítve

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= 2,43 \cdot 10^{-12} m (1 - \cos 30^\circ) = \\ &= 2,43 \cdot 10^{-12} m \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ &= 3,251 \cdot 10^{-13} m \\ \lambda' &= \lambda + 3,251 \cdot 10^{-13} m. \end{aligned} \quad (18.3.3)$$

Tudjuk, hogy a foton kezdeti energiája

$$\varepsilon_{foton} = h\nu = h \frac{c}{\lambda} = 511 \cdot 10^3 eV = 511 \cdot 10^3 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} = 8,187 \cdot 10^{-14} J,$$

ahonnan $\lambda = 2,426 \cdot 10^{-12} m$. Mivel a kimenő foton hullámhossza nagyobb, energiája kisebb lesz és ez az energiacsökkenés lesz egyenlő az elektron kinetikus energiájának növekedésével. Mivel kezdetben az elektron nyugalomban volt ez egyúttal a teljes mozgási energiája is lesz

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{foton} &= \frac{hc}{\lambda'} = \frac{1,987 \cdot 10^{-25}}{2,751 \cdot 10^{-12}} = 7,220 \cdot 10^{-14} J = 450,6 keV \\ \varepsilon_{kin} &= -(\varepsilon'_{foton} - \varepsilon_{foton}) = 9,674 \cdot 10^{-15} J = 60,38 keV. \end{aligned} \quad (18.3.4)$$

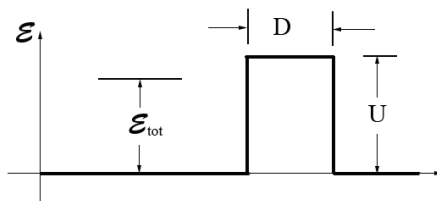
18.4. Feladat: (HN 43A-12) Egy mozgó neutron de Broglie-hullámhossza 0,2 nm. Adjuk meg a neutron sebességét és a mozgási energiáját eV egységekben!

Megoldás: A de Broglie képlet szerint

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \\ v &= \frac{h}{m_n \lambda} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{1,673 \cdot 10^{-27} \cdot 2 \cdot 10^{-10}} = 1981 \frac{m}{s} \\ \varepsilon_{kin} &= \frac{1}{2} m_n v^2 = 3,281 \cdot 10^{-21} J = 2,048 \cdot 10^{-2} eV. \end{aligned} \quad (18.4.1)$$

18.5. Feladat: (HN 43B-23) A T átérésztési tényező azt adja meg, mekkora a valószínűsége annak, hogy egy m tömegű részecske a 99. ábrán bemutatott derékszögű potenciálfalhoz közeledve „átalagútagozik” a potenciálfalon

$$T = e^{-2kD}, \quad \text{ahol } k = \sqrt{\frac{8\pi^2 m_e (U - \varepsilon)}{h^2}}. \quad (18.5.1)$$



99. ábra. A 43B-23 feladathoz

Vizsgáljunk olyan potenciálfalat, melyre $U = 5 \text{ eV}$ és $D = 950 \text{ pm}$ (pikométer). Tegyük fel, hogy egy $E = 4,5 \text{ eV}$ energiája elektron közeledik a potenciálfalhoz. Klasszikusan az elektron nem képes áthaladni a potenciálfalon, mert $E < U$. A kvantummechanika szerint azonban véges valószínűsége van az átalagútozásnak. Számítsuk ki ezt a valószínűséget!

Megoldás:

$$k = \sqrt{\frac{8\pi^2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} (5 - 4,5) \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{(6,626 \cdot 10^{-34})^2}}$$

$$= 3,623 \cdot 10^9 \frac{1}{m} \quad (18.5.2)$$

$$T = e^{-23,623 \cdot 10^9 \cdot 950 \cdot 10^{-12}} = \underline{1,025 \cdot 10^{-3}} \quad (18.5.3)$$

18.6. Feladat: (HN 43B-28) Egy atomot az $1,8 \text{ eV}$ energiával az alapállapot fölötti szintre gerjesztve, az atom ott átlagosan $2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ időt tölt el, mielőtt alapállapotba kerülne vissza.

- Adjuk meg a kibocsátott foton frekvenciáját!
- Adjuk meg a foton hullámhosszát!
- Adjuk meg a foton energiájának bizonytalanságát!

Megoldás:

- Az alapállapotba visszatérés során kibocsátott foton frekvenciája

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{1,8 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} = 4,352 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \quad (18.6.1)$$

- és hullámhossza

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 6,888 \cdot 10^{-7} \text{ m}. \quad (18.6.2)$$

- Egy adott állapot ΔE energiabizonytalansága és az adott állapotban tartozkodás Δt időtar-

tama között is fennáll egy határozatlansági összefüggés:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar \quad (18.6.3)$$

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{\Delta t} = 5,27286 \cdot 10^{-29} J = 3,29106 \cdot 10^{-10} eV. \quad (18.6.4)$$

18.7. Feladat: (HN 44B-9) A csillagközi térben az atomos hidrogén éles spektrumvonala, az ún. 21 cm-es sugárzás keletkezik; a csillagászok ezt tartják legalkalmasabbnak a csillagok közötti hidrogenfelhők detektálására. A csillagközi por elmosódottá teszi a látható tartományba eső hullámhosszakot, ezért az előbb említett sugárzás, amely a rádióhullámok tartományába esik, nagyon hasznos. Az elektronállapotok közötti energiaátmenetet, melytől ez a sugárzás ered, nem lehet egy meghatározott n -nel jellemezni. Az a helyzet, hogy az $n = 1$ alapállapotban az elektron és a proton spinje paralel vagy antiparalel lehet; a két állapot energiája kissé különböző.

- (a) Mi a feltétele a magasabb energiájú állapotnak?
 (b) A pontos hullámhosszérték 21,11 cm. Mi a két állapot energiakülönbsége?
 (c) A gerjesztett állapot átlagos élettartama 10^7 év. Számítsuk ki a gerjesztett állapot energiájának bizonytalanságát.

Megoldás:

(a) Az elemi részecskék (példánkban a proton és az elektron) spinjéhez mágneses momentum is kapcsolódik a

$$\mu = Q g \frac{1}{2m} S \quad (18.7.1)$$

képlet szerint, ahol S a spin, μ a mágneses momentum nagysága, Q a részecske töltése és g az ún. g -faktor. Mivel a proton töltése pozitív az elektron töltése negatív a proton mágneses momentuma spinjével egyirányú, az elektroné azzal ellentétes. A proton mágneses momentumához tartozó mágneses térben az elektron akkor lesz magasabb energiájú, ha a mágneses momentumok egyirányúak, vagyis a spin momentumok ellentétes irányúak.

(b) A két állapot energiakülönbsége felel meg a kibocsátott foton energiájának. Mivel $\lambda = 0,2111 m$, az energiakülönbség

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon &= h\nu = h \frac{c}{\lambda} = \frac{6,62607 \cdot 10^{-34} Js \cdot 2,99793 \cdot 10^8 m/s}{0,2111 m} = 9,40998 \cdot 10^{-25} J \\ &= 5,87325 \cdot 10^{-6} eV \end{aligned} \quad (18.7.2)$$

(c) Az energiabizonytalanság

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon \cdot \Delta T &\geq \hbar \\ \Delta\varepsilon &\geq \frac{\hbar}{\Delta T} = \frac{1.05457 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{10^7 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} = 3,344 \cdot 10^{-49} \text{ J} = 2,087 \cdot 10^{-30} \text{ eV.} \quad (18.7.3)\end{aligned}$$

18.8. Feladat: (HN 43C-33) Amikor egy atom fotont bocsát ki, az energia valamilyen hányada az atom visszalökődésére fordítódik. Mutassuk meg, hogy ez a hányad közelítőleg $\frac{\varepsilon}{2mc^2}$, ahol ε az átmenet energiája és m az atom tömege.

Megoldás: A feladat szerint a keletkező fotonok ε_{foton} energiája kisebb lesz, mint az átmenet energiája. Jelöljük a kettő különbségét $\delta\varepsilon$! Igazolnunk kell, hogy

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} \equiv \frac{\varepsilon - \varepsilon_{foton}}{\varepsilon} \approx \frac{\varepsilon}{2mc^2}$$

ahol, mivel $\varepsilon \ll mc^2$, a feladat állítása szerint ε és ε_{foton} csak kicsit különbözhet egymástól

$$\delta\varepsilon \ll \varepsilon \quad \text{azaz} \quad \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} \ll 1.$$

Használjuk az energia és impulzusmegmaradás feltételeit! A ε energiájú átmenet során az energia és az impulzus megmarad, vagyis

$$p_{atom} + p_{foton} = p'_{atom} + p'_{foton} \quad (18.8.1)$$

$$\varepsilon_{atom} + \varepsilon_{foton} = \varepsilon'_{atom} + \varepsilon'_{foton} \quad (18.8.2)$$

$$(18.8.3)$$

Maradjunk az emisszió előtt nyugalomban levő atom vonatkoztatási rendszerében. Ekkor az impulzusokra

$$p_{atom} = p_{foton} = 0 \quad (18.8.4)$$

$$p'_{atom} = p'_{foton}, \text{ és mivel} \quad (18.8.5)$$

$$p'_{foton} = \frac{\varepsilon_{foton}}{c} \quad (18.8.6)$$

$$p'_{atom} = 0 - p'_{foton} = -\frac{\varepsilon_{foton}}{c} \quad (18.8.7)$$

Innentől mind klasszikus, mind relativisztikus módon megoldhatjuk a feladatot. Figyelembe véve, hogy a visszalökődő atom sebessége sokkal kisebb, mint a fénysebesség ezen a szinten elegendő a klasszikus fizikai megoldás. A teljesség kedvéért azonban felírjuk a relativitáselmélet szerinti megoldást is.

(a) Klasszikus fizikai (nem relativisztikus) megoldás

Válasszuk az atom alapállapotbeli energiáját nullának! A kibocsátott foton ε_{foton} energiája a visszalökődés miatti energiaveszteség következtében nem azonos az energiaszintek ε távolságával. (18.8.1) és (18.8.2) -be a foton $p_{foton} = \frac{\varepsilon}{c}$ és az atom impulzusának klasszikus fizikai $p = mv$ formuláit behelyettesítve

$$0 = mv + \frac{\varepsilon_{foton}}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon_{foton}}{c} = -mv \quad (18.8.8)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2}mv^2 + \varepsilon_{foton}, \text{ és mivel} \\ \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2m} \cdot (mv)^2 = \frac{1}{2m} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{foton}}{c}\right)^2 \\ \varepsilon &= \frac{\varepsilon_{foton}^2}{2mc^2} + \varepsilon_{foton} \end{aligned} \quad (18.8.9)$$

Az egyenlet jobboldalán az $\varepsilon_{foton} = (\varepsilon - \delta\varepsilon)$ ismeretlen fotonenergia szerepel. Vagyis

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon &= \varepsilon - \varepsilon_{foton} = \frac{\varepsilon_{foton}^2}{2mc^2} = \frac{(\varepsilon - \delta\varepsilon)^2}{2mc^2} \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2mc^2} - \frac{2\delta\varepsilon \cdot \varepsilon}{2mc^2} + \frac{\delta\varepsilon^2}{2mc^2} \approx \frac{\varepsilon^2}{2mc^2} \end{aligned} \quad (18.8.10)$$

Ez az az energia rész, ami az atom visszalökődésére fordítódik, vagyis a foton energiája ennyivel kisebb lesz. Ezért

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_{foton}}{\varepsilon} \approx \frac{\varepsilon}{2mc^2}. \quad (18.8.11)$$

Ezzel az állítást igazoltuk¹⁵.

(b) Relativisztikus megoldás

Válasszuk az atom alapállapotbeli energiáját nullának. A kibocsátott foton energiája a visszalökődés miatti energiaveszteség következtében nem azonos az energiaszintek ε távolságával. Jelöljük ezt E_{foton} -nal! Felhasználva a speciális relativitáselmélet energia, impulzus és nyugalmi

¹⁵Szilárd testekben a képletbe helyettesítendő tömeg az atomok kölcsönhatása miatt nem feltétlen azonos a szabad atom tömegével, lehet annál nagyobb, kisebb, sőt akár végtelen is. Ezt a tömeget az atom *effektív tömegének* nevezzük. Ezt a Mössbauer-effektust használjuk ki pl. a meteorok és holdkőzetek analizésére a Mössbauer-spektroszkópiában.

tömeg között fennálló $E^2 - p^2 c^2 = (m c^2)^2$ képletét¹⁶

$$\begin{aligned}\varepsilon_{atom} &= m c^2 + \varepsilon \\ \varepsilon_{foton} &= 0 \\ \varepsilon'_{foton} &= \varepsilon \\ \varepsilon'_{atom} &= \sqrt{p_{atom}^2 c^2 + (m' c^2)^2},\end{aligned}\tag{18.8.12}$$

ahol $m' c^2$ azt jelöli, hogy a mozgó atom energiájának számolásánál nem a nyugvó atom m tömegével kell számolni¹⁷. Ebben a folyamatban a kibocsátott foton energiája sokkal kisebb az atom nyugalmi energiájánál: $\varepsilon_{foton} \ll m c^2$, ezért $m' \approx m$, vagy másképpen $\delta m \equiv m' - m \ll m$. A (18.8.12) egyenletbe behelyettesítve (18.8.1)-et:

$$\varepsilon'_{atom} = \sqrt{p_{atom}^2 c^2 + (m' c^2)^2}\tag{18.8.13}$$

$$= \sqrt{p_{foton}^2 c^2 + (m' c^2)^2}\tag{18.8.14}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{foton}}{c}\right)^2 c^2 + (m' c^2)^2}\tag{18.8.15}$$

$$= \sqrt{\varepsilon_{foton}^2 + ((m + \delta m) c^2)^2}.\tag{18.8.16}$$

Emeljünk ki $m c^2$ -et, és használjuk ki, hogy $(1+x)^2 \approx (1+2x)$, $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$, ha $x \ll 1$, valamint, hogy $\varepsilon_{foton} \ll m c^2$ és $\delta m \ll m$

$$\varepsilon'_{atom} = \sqrt{(m c^2)^2 \cdot \left(\left(\frac{\varepsilon_{foton}}{m c^2} \right)^2 + \left(1 + \frac{\delta m}{m} \right)^2 \right)}\tag{18.8.17}$$

$$= m c^2 \cdot \sqrt{\left(\left(\frac{\varepsilon_{foton}}{m c^2} \right)^2 + \left(1 + \frac{\delta m}{m} \right)^2 \right)}\tag{18.8.18}$$

$$= m c^2 \cdot \sqrt{\left(\left(\frac{\varepsilon_{foton}}{m c^2} \right)^2 + 1 + 2 \frac{\delta m}{m} \right)}\tag{18.8.19}$$

$$= m c^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\varepsilon_{foton}}{m c^2} \right)^2 + 2 \frac{\delta m}{m} \right) \right]\tag{18.8.20}$$

azaz

$$\varepsilon'_{atom} = m c^2 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{foton}^2}{m c^2} + \delta m c^2\tag{18.8.21}$$

¹⁶Szilárd testekben a képletben szereplő tömeg az atom *effektív tömege*, ami nem azonos a szabad atom tömegével, ezt használjuk ki pl. a Mössbauer-effektusnál, ahol az atom visszalökődését a többi atom akadályozza.

¹⁷Ezt szokás hagyományosan tömegnövekedésnek nevezni.

18.8.2 alapján

$$\varepsilon_{atom} = \varepsilon'_{atom} + \varepsilon'_{foton} \quad (18.8.22)$$

$$m c^2 + \varepsilon = \varepsilon'_{atom} + \varepsilon'_{foton} \quad (18.8.23)$$

$$m c^2 + \varepsilon = \varepsilon'_{foton} + m c^2 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{foton}^2}{m c^2} + \delta m c^2 \quad (18.8.24)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{foton} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{foton}^2}{m c^2} + \delta m c^2 \quad (18.8.25)$$

Tehát a visszalökődés miatt a foton energiája

$$\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{foton}^2}{m c^2} + \delta m c^2 \quad -el \quad (18.8.26)$$

kisebb, lesz, mint az átmenet energiája. Ez a képlet a klasszikus fizikaitól a $\delta m c^2$ -el különbözik, ami az első tagnál is sokkal kisebb.

18.9. Feladat: (HN 44B-9) A csillagközi térben az atomos hidrogén éles spektrumvonala, az ún. 21 cm-es sugárzás keletkezik; a csillagászok ezt tartják legalkalmasabbnak a csillagok közötti hidrogenfelhők detektálására. A csillagközi por elmosódottá teszi a látható tartományba eső hullámhosszakot, ezért az előbb említett sugárzás, amely a rádióhullámok tartományába esik, nagyon hasznos. Az elektronállapotok közötti energiaátmenetet, melytől ez a sugárzás ered, nem lehet egy meghatározott n -nel jellemezni. Az a helyzet, hogy az $n = 1$ alapállapotban az elektron és a proton spinje paralel vagy antiparalel lehet; a két állapot energiája kissé különböző.

- Mi a feltétele a magasabb energiájú állapotnak?
- A pontos hullámhosszérték 21,11 cm. Mi a két állapot energiakülönbsége?
- A gerjesztett állapot átlagos élettartama 10^7 év. Számítsuk ki a gerjesztett állapot energiájának bizonytalanságát.

Megoldás:

(a)

Az elemi részecskék (példánkban a proton és az elektron) spinjéhez mágneses momentum is kapcsolódik a

$$\mu = Q g \frac{1}{2m} S \quad (18.9.1)$$

képlet szerint, ahol S a spin, μ a mágneses momentum nagysága, Q a részecske töltése és g az ún. g -faktor. Mivel a proton töltése pozitív az elektron töltése negatív a proton mágneses momentuma spinjével egyirányú, az elektroné azzal ellentétes. A proton mágneses momentumához

tartozó mágneses térben az elektron akkor lesz magasabb energiájú, ha a mágneses momentumok egyirányúak, vagyis a spin momentumok ellentétes irányúak.

(b)

A két állapot energiakülönbsége felel meg a kibocsátott foton energiájának. Mivel

$\lambda = 0,2111\text{ m}$, az energiakülönbség

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon &= h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \frac{6.62607 \cdot 10^{-34}\text{ Js} \cdot 2.99793 \cdot 10^8\text{ m/s}}{0.2111\text{ m}} = 9.40998 \cdot 10^{-25}\text{ J} \\ &= 5.87325 \cdot 10^{-6}\text{ eV}\end{aligned}\quad (18.9.2)$$

(c) Az energiabizonytalanság

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon \cdot \Delta T &\geq \hbar \\ \Delta\varepsilon &\geq \frac{\hbar}{\Delta T} = \frac{1.05457 \cdot 10^{-34}\text{ Js}}{10^7 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\text{ s}} = 3.34403 \cdot 10^{-49}\text{ J} \\ &= 2.08718 \cdot 10^{-30}\text{ eV}\end{aligned}\quad (18.9.3)$$

18.10. Feladat: (HN 44C-36) Mi a valószínűsége annak, hogy az 1s-állapotú hidrogén elektronját a magtól $2,50 a_0$ -nál nagyobb távolságra találjuk meg?

Megoldás: Az 1s állapotbeli gömbszimmetrikus hullámfüggvény szorzat alakban írható (szeparálható): $\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot y(\vartheta, \varphi)$, ennek radiális és szögfüggő része

$$R(r) = 2 \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} \cdot e^{-r/a_0} \quad (18.10.1)$$

$$Y(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}} \quad (18.10.2)$$

A teljes hullámfüggvény az 1s állapotban csak a távolságtól függ:

$$\psi(r) = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} \quad (18.10.3)$$

Annak a valószínűsége, hogy az elektront a magtól r' -nél nagyobb távolságra találjuk

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(r', \infty) &= \int_{r'}^{\infty} |\psi(r)|^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \\ &= \frac{4}{a_0^3} \int_{r'}^{\infty} r^2 \cdot e^{-2r/a_0} dr.\end{aligned}\quad (18.10.4)$$

Integráltáblázatból kinézve az integrál értékét¹⁸

$$\mathcal{P}(r') \equiv \mathcal{P}(r', \infty) = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{2r'}{a_o} \right)^2 + \frac{2r'}{a_o} + 1 \right) e^{-\frac{2r'}{a_o}} \quad (18.10.9)$$

Behelyettesítve az $r' = 2,50 a_o$ értéket¹⁹: $\frac{2r'}{a_o} = 5.00$

$$\mathcal{P}(r') = \left(\frac{1}{2} 5.00^2 + 5.00 + 1 \right) e^{-5.00} = 0.125 \quad (18.10.10)$$

19. Feladatok a speciális relativitáselmélet tárgyköréből

Relativisztikus kinematika

19.1. Feladat: Egy űrhajósnak a saját ideje szerint egy feladat elvégzéséhez 2 percre van szüksége. Mennyi idő telik el ezalatt a Föld vonatkoztatási rendszerében, ha az űrhajó $0,5c$ sebességgel

¹⁸Ez az integrál integráltáblázat nélkül két egymás utáni parciális integrálás alkalmazásával könnyen kiszámolható:

Ehhez egy kis segítség: Vezessünk be egy új változót (18.10.4)-be! Legyen $x = \frac{2r}{a_o}$, ekkor $r = \frac{a_o x}{2}$ és $dr = \frac{a_o}{2} dx$, az integrálás határai pedig $\frac{2r'}{a_o}$ és ∞ :

$$\frac{4}{a_o^3} \int_{r'}^{\infty} r^2 \cdot e^{-2r/a_o} dr = \frac{4}{a_o^3} \int_{2r'/a_o}^{\infty} \frac{a_o^2}{4} x^2 \cdot e^{-x} \frac{a_o}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{2r'/a_o}^{\infty} x^2 e^{-x} dx \quad (18.10.5)$$

A parciális integrálás képlete szerint

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx. \quad (18.10.6)$$

Először legyen $u' \equiv e^{-x}$, és $v \equiv \frac{1}{2} x^2$, ekkor $u = -e^{-x}$ és $v' = x$

$$\frac{1}{2} \int_{2r'/a_o}^{\infty} x^2 \cdot e^{-x} dx = \left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-x} \right]_{2r'/a_o}^{\infty} - \int_{2r'/a_o}^{\infty} x(-e^{-x}) dx \quad (18.10.7)$$

A jobboldali integrál ugyancsak parciálisan integrálható. Most $u' \equiv -e^{-x}$, és $v \equiv x$, ahonnan $u = e^{-x}$ és $v' = 1$.

$$\int_{2r'/a_o}^{\infty} x(-e^{-x}) dx = [x e^{-x}]_{2r'/a_o}^{\infty} - \int_{2r'/a_o}^{\infty} e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_{2r'/a_o}^{\infty} - [-e^{-x}]_{2r'/a_o}^{\infty} \quad (18.10.8)$$

A végeredmény:

$$\frac{1}{2} \int_{2r'/a_o}^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{2r'}{a_o} \right)^2 + \frac{2r'}{a_o} + 1 \right) e^{-\frac{2r'}{a_o}}$$

¹⁹ $a_o = 0,0529 \text{ nm}$

halad a Földhöz képest?

Megoldás: Jelölések: $\tau = 2$ perc = 120 s és $v = 0,5c$.

A Föld vonatkoztatási rendszerében

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 138,56 \text{ s} \quad (19.1.1)$$

idő telik el.

19.2. Feladat: Két távoli galaxis a Földtől ellenkező irányban távolodik, mindegyik $0,8c$ sebességgel. Mekkora volna a másik galaxis távolodási sebessége az egyikén lévő megfigyelő számára?

Megoldás: Gondolatban helyezkedjünk el az egyik galaxison. Most ez a K rendszer. A Föld ehhez képest mozog $v_0 = 0,8c$ sebességgel. A Föld a K' rendszer. Ebben a rendszerben mozog a másik galaxis $u'_x = 0,8c$ sebességgel. E galaxis K rendszerbeli u_x sebességének kiszámolására alkalmazzuk a sebesség-összeadás

$$u_x = \frac{v_0 + u'_x}{1 + \frac{v_0 u'_x}{c^2}} \quad (19.2.1)$$

összefüggését. Behelyettesítés után kapjuk, hogy K rendszerbeli (egyik galaxisbeli) megfigyelő számára a másik

$$u_x = 0,9756c \quad (19.2.2)$$

sebességgel távolodik.

Relativisztikus dinamika

19.3. Feladat: Egy m_0 tömegű test sebessége $v_1 = 0,6c$ -ről $v_2 = 0,8c$ -re változik. a.) Mekkora munkavégzés volt ehhez szükséges? Számítsa ki klasszikus és relativisztikus módon is! b.) Mekkora a test impulzusváltozása? Számítsa ki klasszikus és relativisztikus módon is!

Megoldás: a, A munkavégzés a klasszikus mechanika szerint:

$$W_{kl} = \frac{1}{2}m_0v_2^2 - \frac{1}{2}m_0v_1^2 = 0,14m_0c^2, \quad (19.3.1)$$

míg relativisztikusan:

$$W_{rel} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{5}{12} m_0 c^2 = 0,4167 m_0 c^2. \quad (19.3.2)$$

b, Az impulzusváltozás a klasszikus mechanika szerint:

$$\Delta P_{kl} = m_0 v_2 - m_0 v_1 = 0,2 m_0 c, \quad (19.3.3)$$

míg relativisztikusan:

$$\Delta P_{rel} = \frac{m_0 v_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{m_0 v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{7}{12} m_0 c = 0,5833 m_0 c. \quad (19.3.4)$$

19.4. Feladat: Részecskegyorsítóban különböző töltött részecskéket tudunk gyorsítani.

- (a) Mekkora egy proton sebessége, ha tömege kétszerese nyugalmi tömegének? ($m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg)
- (b) Mekkora energiával gyorsítható fel a proton erre a sebességre?
- (c) Mekkora lenne a nyugalomból induló elektron sebessége ekkora gyorsítási energia befektetése után?

Megoldás:

(a) A feladat matematikai megfogalmazása:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2m_0, \quad (19.4.1)$$

amiből a proton sebessége

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 0,866c = 2,598 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \quad (19.4.2)$$

(b) E sebesség felhasználásával a gyorsításhoz befektetett energia

$$\Delta E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 = 1,503 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 9,394 \cdot 10^8 \text{ eV}. \quad (19.4.3)$$

(c) A fenti összefüggés átrendezésével és az elektron tömegének alkalmazásával

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_e c^2}{\Delta E + m_e c^2} \right)^2} = 2,9999992 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \quad (19.4.4)$$

Megjegyzés: Látható, hogy a ΔE befektetett energia növelésével a fénysebesség egyre jobban megközelíthető.

19.5. Feladat: Két azonos, kezdetben nyugvó m_0 tömegű részecske egyikével $\Delta E_1 = \frac{2}{3}m_0c^2$, a másikkal $\Delta E_2 = \frac{1}{4}m_0c^2$ energiát közlünk.

- (a) Mekkora lesz a testek sebessége a nyugvó laborrendszerben?
 (b) Feltételezve, hogy egy irányban mozognak, mekkora sebességűnek érzékeli a lassabban mozgó részecske a gyorsabban mozgót a saját rendszeréből nézve?

Megoldás:

- (a) A nyugvó részecske v sebességre történő felgyorsításához szükséges energia befektetés

$$\Delta E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2. \quad (19.5.1)$$

Ennek felhasználásával a $\Delta E_1 = \frac{2}{3}m_0c^2$ esetén

$$v_1 = 0,8c \quad (19.5.2)$$

az elért sebesség, míg a $\Delta E_2 = \frac{1}{4}m_0c^2$ energia esetén

$$v_2 = 0,6c \quad (19.5.3)$$

a sebesség.

- (b) Ez a két sebesség a két részecske K nyugvó (laborrendszerbeli sebessége). A kérdés, hogy a nyugvó rendszerhez képest $v_0 = v_2 = 0,6c$ sebességgel mozgó /a lassabb részecskéhez rögzített/ K' rendszerben milyen a másik részecske u'_x sebessége. A gyorsabb részecske sebességét a K rendszerben jelölje $u_x = v_1 = 0,8c$. A sebesség összeadás szerint

$$u_x = \frac{v_0 + u'_x}{1 + \frac{v_0 u'_x}{c^2}}, \quad (19.5.4)$$

amelyből

$$u'_x = \frac{u_x - v_0}{1 - \frac{v_0 u_x}{c^2}} = 0,384c. \quad (19.5.5)$$

19.6. Feladat: A kezdetben $v_0 = 0,6c$ sebességű m_0 nyugalmi tömegű részecske impulzusát 16/9-szeresére növeljük. Mekkora lesz a végső v_2 sebesség és mekkora energia befektetés kellett ehhez?

- (a) Számítsa ki klasszikusan!
 (b) Számítsa ki relativisztikus közelítésben!

Megoldás:

(a) Klasszikus megoldás: A részecske impulzusa kezdetben m_0v_0 , a gyorsítás végén m_0v_2 . A feladat szövege szerint

$$m_0v_2 = \frac{16}{9}m_0v_0, \quad (19.6.1)$$

amelyből

$$v_2 = \frac{16}{9}v_0 = \frac{16}{15}c. \quad (19.6.2)$$

A befektetendő energia

$$W_{kl} = \frac{1}{2}m_0v_2^2 - \frac{1}{2}m_0v_0^2 = 0,389m_0c^2. \quad (19.6.3)$$

(b) Relativisztikus megoldás: A részecske impulzusa kezdetben

$$\frac{m_0v_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \quad (19.6.4)$$

a gyorsítás végén

$$\frac{m_0v_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}. \quad (19.6.5)$$

A feladat szövege szerint fennáll, hogy

$$\frac{m_0v_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{16}{9} \frac{m_0v_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}. \quad (19.6.6)$$

Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy

$$v_2 = 0,8c. \quad (19.6.7)$$

A befektetendő energia

$$W_{rel} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{5}{12}m_0c^2 = 0,4167m_0c^2. \quad (19.6.8)$$

19.7. Feladat: Egy M tömegű részecske $v_1 = 0,6c$ sebességgel összeütközik egy másik m tömegű és $v_2 = 0,8c$ sebességű ellenkező irányba mozgó részecskével. Az ütközés után a két részecske egy összetett rendszert képez, amely a laboratóriumhoz képest nyugalomban van. Mekkora az M/m arány?

Megoldás: Az impulzus megmaradás ez esetben

$$\frac{Mv_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{mv_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \quad (19.7.1)$$

alakban fogalmazható meg. Az adatok behelyettesítése után a kért hányados

$$\frac{M}{m} = \frac{16}{9}. \quad (19.7.2)$$