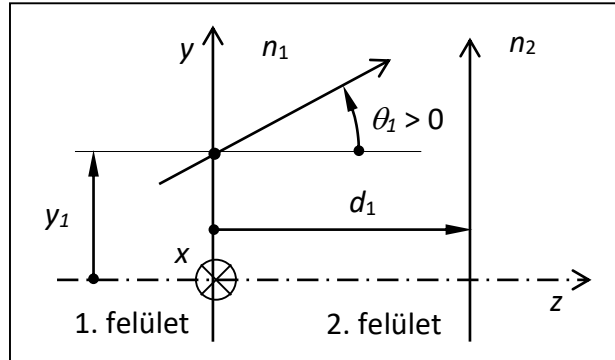


4. GYAKORLAT

Dr. Erdei Gábor, 2019-10-04

Sugárkoordináták, optikai iránykoszinuszok, előjelek



Optikai iránykoszinuszok: p és q . Pl. $q \equiv n \cdot \theta$

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= A \cdot y_1 + B \cdot q_1 \\ q_2 &= C \cdot y_1 + D \cdot q_1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Átviteli mátrixok, elemek jelentése

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ q_1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

B – értéke nulla, ha leképezés áll fenn a két felület között

A – transzverzális nagyítás (leképezés esetén)

C – a törőerő -1 -szerese (rendszerparaméter)

D – szögnyújtás n_2/n_1 -szerese (leképezés esetén)

Egy gömbi felület törőereje (felület sorszáma 2) – akkor pozitív, ha fókuszál:

$$P_2 \equiv \frac{n_2}{f_2} = \frac{n_2 - n_1}{r_2}. \quad (3)$$

A rádiusz akkor pozitív, ha a gömb középpontja $+z$ irányban van a homlokpontról.

Szabadtéri terjedés mátrixa

Fényterjedés közben az iránykoszinusz nem függ a pozíciótól, tehát $C = 0$, a kezdő és kiinduló felület között nem változik meg: $D = 1$.

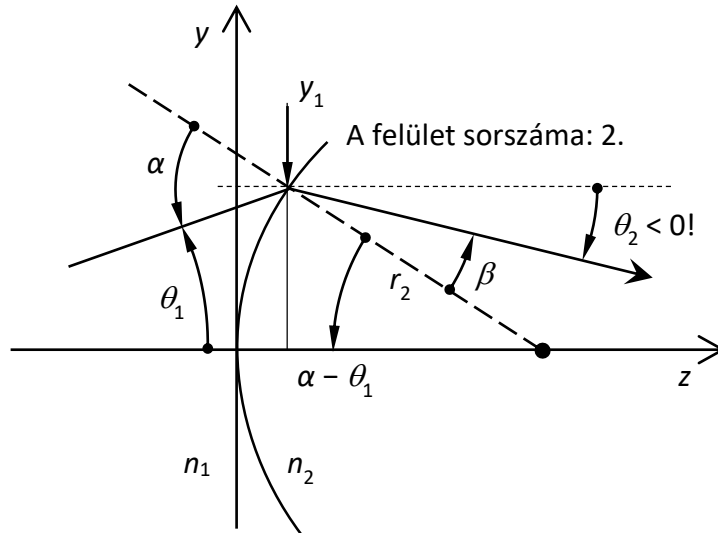
$$y_2 = y_1 + \theta_1 \cdot d_1 = 1 \cdot y_1 + \frac{q_1}{n_1} \cdot d_1 \quad (4)$$

Tehát $A = 1$ és $B = q_1/n_1$, azaz

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{d_1}{n_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Gömbfelületi törés mátrixa, fókusztávolság

Töréskor a sugárdőféspont pozíciója nem függ a beesési szögtől, tehát $B = 0$, valamint nem változik meg: $A = 1$.



$$n_1 \alpha = n_2 \beta \quad (6)$$

$$\alpha - \theta_1 \approx \frac{y_1}{r_2} \quad (7)$$

$$(\alpha - \theta_1) = \beta - \theta_2 \rightarrow \theta_2 = -(\alpha - \theta_1) + \beta \quad (8)$$

$$\theta_2 = -\frac{y_1}{r_2} + \frac{n_1}{n_2} \alpha \rightarrow \theta_2 = -\frac{y_1}{r_2} + \frac{n_1}{n_2} \left(\frac{y_1}{r_2} + \theta_1 \right) \quad (9)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{r_2} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) y_1 + \frac{n_1}{n_2} \theta_1 \quad (10)$$

$$n_2 \theta_2 = \frac{n_1 - n_2}{r_2} y_1 + n_1 \theta_1 \quad (11)$$

Tehát $C = -P$ és $D = 1$, ahol P_2 a felület rőrőereje. Ezzel:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Általános esetben, ha a rendszerben több (pl. N db) törőfelület és szabadtéri terjedés van egymás után, akkor a mátrixok összeszorzódnak:

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}_N \cdot \mathbf{R}_N \cdot \dots \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{T}_1 \quad (13)$$

Gömbtükör

Egyetlen, n_1 törésmutatójú közegben lévő r_2 ráduszú gömbi tükörfelület mátrixának felírása. A tükrözési törvény alapján:

$$\beta = -\alpha \quad (14)$$

Ez olyan mintha $n_2 = -n_1$ lenne, a többi egyenlet változatlan, tehát:

$$P_2 = -2 \frac{n_1}{r_2}. \quad (15)$$

Vagyis a mátrix most is (12) alakú.

Sík törőfelület

$$n_1 \alpha = n_2 \beta \quad (16)$$

$$\theta_1 = \alpha + \delta \quad (17)$$

$$\theta_2 = \beta + \delta \quad (18)$$

$$\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \alpha + \delta = \frac{n_1}{n_2} (\theta_1 - \delta) + \delta \quad (19)$$

Vastaglencse

Vastaglencse mátrixa az első felületről a másodikra:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{d_1}{n_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - P_1 \frac{d_1}{n_1} & \frac{d_1}{n_1} \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - P_1 \frac{d_1}{n_1} & \frac{d_1}{n_1} \\ -P_2 \left(1 - P_1 \frac{d_1}{n_1}\right) - P_1 & -P_2 \frac{d_1}{n_1} + 1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$P = P_2 \left(1 - P_1 \frac{d_1}{n_1}\right) + P_1 = P_1 + P_2 - P_1 P_2 \frac{d_1}{n_1}. \quad (32)$$

Összetett rendszerek, fősíkok

Legyen egy levegővel körülvevett ($n = n' = 1.0$) szimmetrikus gyűjtőlencse törőereje $P = +4$ dioptria, a lencse vastagsága $d_1 = 3.0$ mm, törésmutatója $n_1 = 1.5$. Mekkora a lencse fókusztávolsága?

$$P \equiv \frac{n_2}{f'} = 4 \text{ m}^{-1} = 0.004 \text{ mm}^{-1} \quad (33)$$

Ebből $f' = 1/0.004 = 250$ mm. Mekkora a lencse rádiusza, azaz görbületi sugara ($r_1 = -r_2$)?

$$P_1 = P_2 = \frac{n_1 - n}{r_1} = \frac{1.5 - 1}{r_1} = \frac{0.5}{r_1}. \quad (34)$$

$$P = P_1 + P_2 - P_1 P_2 \frac{d_1}{n_1} = \frac{0.5}{r_1} + \frac{0.5}{r_1} - \frac{0.25}{r_1^2} \frac{3}{1.5} = 0.004 \quad (35)$$

$$0.004 r_1^2 - r_1 + 0.5 = 0 \quad (36)$$

Ebből $r_1 = 0.501$ mm ; $r_2 = 249.5$ mm – az utóbbi a hétköznapilag megszokott lencséknek megfelelő megoldás. A 0.501 mm-es rádiusz is értelmes, ez annak felel meg, ha a két lencse között van egy köztes fókuszpont.

Mekkora egy felület törőereje? (34)(33)-ből: $P_1 = 2.004 \cdot 10^{-3}$ 1/mm. Mik a lencse mátrixának elemei a két felülete között?

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.996 & 2 \\ -0.004 & 0.996 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Liouville-tétel következménye: az átviteli mátrix determinánsa mindig 1.0. Ez azt is jelenti, hogy a mátrixelemek nem függetlenek egymástól. Az összefüggés számolásaink ellenőrzésére felhasználható. Esetünkben a determináns értéke: 1.000016.

Hol vannak a lencse fősíkjai?

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z'}{n'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{z}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z'}{n'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -A \frac{z}{n} + B \\ C & -C \frac{z}{n} + D \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} A - \frac{z'}{n'} C & -A \frac{z}{n} + B + \frac{z'}{n'} \left(-C \frac{z}{n} + D \right) \\ C & -C \frac{z}{n} + D \end{bmatrix} \quad (40)$$

A két fősík között leképezés áll fenn, melyek között a nagyítás definíció szerint +1. Tehát:

$$A - \frac{z'}{n'} C = 1 \quad (41)$$

Ebből $z' = -1.00$ mm. A szőgnagyítás értékéből a következő jön ki:

$$-C \frac{z}{n} + D = 1 \quad (42)$$

Ebből: $z = 1.0$ mm. Itt a Lagrange-Helmholtz egyenletet (tulajdonképpen az energiamegmaradást) használtuk ki: $m \cdot m_\alpha = n'/n$, azaz leképezés esetén $A \cdot D = 1$.