MECHANIKA 2	A) HF 01.

A01.) feladat

A Speciális Relativitáselmélet kidolgozásakor rengeteg paradoxon született. Ezek az elmélet (nem létező) belső ellentmondásaira kívántak rámutatni. Némelyikük máig is fennmaradt, mert elemzésük hozzájárul az elmélet jobb megértéséhez. Az egyik ilyen az ún. „ikerparadoxon" amely mára már beépült az elméletbe.

Egy másik az ún. **„pajta-rúd" paradoxon**. Ennek lényege a következő.

Adott egy pajta, amelynek két ellentétes falán egy-egy ajtó van. Az ajtók távolsága „L_0" . Tekintsünk egy ugyancsak „L_0" hosszúságú rudat. Fussunk át a rúddal relativisztikus nagyságú „V" sebességgel a pajtán! Ekkor hozzánk képest a pajta „V" sebességgel mozog. Ezért azt észleljük, hogy a pajta hossza (azaz az ajtók távolsága) kisebb lesz mint a nyugalmi hosszúság, azaz $L_P < L_0$. Mivel $L_R = L_0$, ezért $L_P < L_R$. Tehát a rúd valamelyik vége mindig kilóg valamelyik ajtón. Azaz a rúd „nem fér be a pajtába". Tehát, nem tudunk egy olyan pillanatot találni, amikor gyorsan becsukhatnánk mind a két ajtót

A pajtban álló megfigyelő szerint azonban a „V" sebességgel mozgó rúd rövidül meg. Azaz $L_R < L_0$, Mivel a pajta hossza $L_P = L_0$, ezért mindig igaz, hogy $L_R < L_P$. Tehát lesz olyan időpillanat amikor a rúd teljes egészében bent van a pajtában. Ekkor mindkét ajtó egy pillanatra becsukható. Mindkét ajtó zárt vagy csukott állapota azonban objektív dolog. Tegyük fel ugyanis, hogy készítünk egy olyan robbantó elektronikát, amelyet a két ajtó sorba kapcsolt zárszerkezete működtet. A bomba tehát akkor robban, amikor mindkét ajtó zárva van. A fenti gondolatmenetekben az ellentmondás nyilvánvaló. A robbanás ténye ugyanis nem lehet relatív. Ezt mindkét megfigyelő egyformá érzékeli. Vagy robban a pajta velü(n)k együtt, vagy nem!

a.) Mekkora a rúd hossza a pajtához rögzített koordinátarendszerben? Mekkora a pajta hossza a rúdhoz rögzített koordinátarendszerben?

A további ábrákon legyen a téridő-sík origója az a pillanat, amikor a rúd eleje beér a pajtába!

b.) Rajzolja fel a pajtához rögzített koordinátarendszerben a rúd elejének és végének világvonalait, valamint a pajta bejáratának és kijáratának világvonalait. Jelölje be azokat az eseményeket amikor a rúd eleje kiér a pajtából, ill. amikor a rúd vége beér a pajtába! Melyik történt korábban?

c.) A rúddal együttmozgó koordinátarendszer tér és idő koordinátatengelyei az ábrán egyenes vonalak. Rajzolja be ezeket az ábrára!

d.) A b.) feladatban is jelölt két esemény (rúd eleje kiér a pajtából, rúd vége beér a pajtába) világpontján keresztül húzzon párhuzamost az együttmozgó rendszer x'-tengelyével!

e.) Ez alapján melyik esemény történt korábban, a rúd vonatkoztatási rendszerében?

A „robbanást" esetleg kiváltó jelenségtől a feladat során tekintsen el. (Ez ugyanis már egy „rafináltabb" történet!)

A02.) feladat

Egy űrhajó adó-vevő antennája ν_0 frekvenciával rádió impulzusokat bocsát ki és érzékeli a bejövő impulzusokat. Az űrhajó állandó „V" sebességgel távolodik a Földtől. Mindeközben, folyamatosan rádió impulzusokat küld a Földre amelyek onnan visszaverődnek és a visszavert jelet az űrhajó vevőantennája érzékeli. Legyen a Föld az „álló" K rendszer és az ürhajó a mozgó „K'„ rendszer. A jelenség (relativisztikus) leírásakor használjuk a „standard boost"-ot!

Az űrhajón az indulástól számított t_1'=40 sec időpillanatban a beérkező jelek frekvenciája ν_1'=1/2 ν_0.

a.) Írja fel az álló K rendszerben mérhető $(\omega / c, \vec{k})$ és a mozgó K' rendszerben mérhető $(\omega' / c, \vec{k}')$ adatok közötti kapcsolatot megadó L(K,K') Lorentz transzformációt.

b.) A hullám terjedési sebességét ismerve adja meg k és ω kapcsolatát!

c.) Tekintsük az űrhajó által a Föld felé sugárzott jeleket. Az L(K,K') val kapott eredmények alapján határozza meg, hogy milyen frekvenciájú jeleket észlel a földi állomás!

d.) A Földhöz rögzített K rendszerben adja meg a visszavert jel hullámszám négyesvektorát, majd az a.) feladatban kapott transzformáció inverzével határozza meg az űrhajó által vett visszavert jel ω'' körfrekvenciáját!

e.) Tudjuk, hogy a feladat kiírása szerint $\omega'' = 2\pi\nu_1'$. Mekkora az űrhajó sebessége a Földhöz rögzített K rendszerben?

f.) EXTRA! Milyen távol van az űrhajó a Földtől a viszavert jel észlelésének a t_1' pillanatában mind az űrhajósok, mind pedig a földi irányítók szerint? (Az űrhajó gyorsítása elhanyagolható idő alatt történt meg.)

g.) EXTRA! A földi állomás órája szerint mikor verődött vissza az a jel, amelyet az űrhajón a t_1' időpontban észleltek?

MECHANIKA 2	B) HF 01.

B01.) feladat

Tudjuk, hogy az $a^\mu = \left(a^0, a^x, a^y, a^z\right)$ „négyes gyorsulás” az $(u^\mu) = \left(\gamma c, \gamma\vec{v}\right)$ négyes sebesség sajátidő szerinti deriválásával kapható meg. Az (a^μ)-ben megjelennek a $\dot{\vec{v}}$ (hármas gyorsulás) komponensei.

a.) Írja fel az (a^μ) négyes gyorsulást úgy, hogy szerepeljen benne a „$\vec{v}$” hármas sebesség és az „$\vec{a}$” hármas gyorsulás. (**MEGJEGYZÉS**: Ez szerepelt a gyakorlaton!)

b.) Legyen a hármas sebesség párhuzamos az „x” tengellyel, tehát $\vec{v} = (\dot{x}, 0, 0)$. Legyen a hármas gyorsulás tetszőleges irányú, azaz $\dot{\vec{v}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$. Határozza meg ebben az esetben a (a^μ) négyes gyorsulást!

c.) Az álló K rendszerben egy tömegpont „R” sugarú körpályán egyeltes, „v” nagyságú sebességgel mozog. Tekintsük azt a pillanatot, amikor a tömegpont sebessége éppen az *x*-tengely irányába mutat. Adjuk meg ebben a pillanatban a tömegpont (a^μ) négyes gyorsulását a K rendszerben!

d.) A megfelelő Lorentz transzformáció alkalmazásával határozza meg a pont $\left(a^\mu\right)'$ négyes gyorsulását a ponttal (pillanatnyilag) együtt mozgó K’ rendszerben!

e.) A d.) válasz ismeretében határozza meg a pont $\vec{a}'$ hármas gyorsulását a megadott pillanatban.

f.) Mutassa meg, hogy ugyanezt az eredményt kapnánk elemi módon is, ha a sajátidő fogalmát a körmozgásra közvetlenül alkalmaznánk!

B02.a) feladat

Tekintsünk két $\underline{\underline{L}}_1$ és $\underline{\underline{L}}_2$ Lorentz transzformációt. Ezek az állónak tekintett K rendszerből rendre a K_1' és a K_2' mozgó rendszerbe transzformálnak.

$$\underline{\underline{L}}_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & -B_1\Gamma_1 & 0 & 0 \\ -B_1\Gamma_1 & \Gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{L}}_2 = \begin{pmatrix} \Gamma_2 & 0 & -B_2\Gamma_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -B_2\Gamma_2 & 0 & \Gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ahol $\quad B_k \equiv \dfrac{V_k}{c} \qquad$ és $\qquad \Gamma_k \equiv 1/\sqrt{1-B_k^2} \quad k=1,2$

a.) Adja meg a két transzformáció fizikai jelentését!

b.) Határozza meg a két mátrix determinánsát!

c.) Mutassa meg, hogy $\underline{\underline{L}}_1 \cdot \underline{\underline{L}}_2 \neq \underline{\underline{L}}_2 \cdot \underline{\underline{L}}_1$! Mi ennek a fizikai tartalma?

d.) Tegyük fel, hogy $V = V_1 = V_2$ elegendően kicsi. Számítsa ki az $\underline{\underline{L}}_1 \cdot \underline{\underline{L}}_2 - \underline{\underline{L}}_2 \cdot \underline{\underline{L}}_1$ mátrixot, és közelítse *V/c* - ben legalacsonyabb rendig! Milyen geometriai transzformációt kapott?

e.) Ellenőrizze, hogy $\left|\underline{\underline{L}}_1\right| \cdot \left|\underline{\underline{L}}_2\right| = \left|\underline{\underline{L}}_2 \cdot \underline{\underline{L}}_1\right|$. Mi ennek a fizikai tartalma?

B02.b) feladat

Adott a K álló és a K' mozgó inercia rendszer. A koordináta tengelyek legyenek párhuzamosak. A K' sebessége a K-hoz képest legyen $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$! A rendszeridőkre a szokásos feltétel érvényes, azaz t=t'=0 ha az origók egybe esenek (O=O').

a.) Mutassa meg hogy ebben az esetben az $\vec{r}, t$ Lorentz transzformációja a következő alakú:

$$\vec{r}\,' = \vec{r}_\perp + \Gamma \cdot \left[\vec{r}_{ll} - \vec{B} \cdot ct\right] \qquad ct' = \Gamma \cdot \left[ct - \vec{B}\vec{r}\right]$$

Ahol a szokásos módon : $\vec{B} = \dfrac{\vec{V}}{c}$ és $\Gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - B^2}}$

Valamint $\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_{ll}$ ahol $\vec{r}_\perp$ a $\vec{B}$ -re merőleges és $\vec{r}_{ll}$ a $\vec{B}$ -vel párhuzamos komponens.

MEGJEGYZÉS: Elegendő bebizonyítani, hogy $\vec{r}^{\,2} - (ct)^2 = \vec{r}\,'^2 - (ct')^2$

b.) Írja fel a transzformáció (4 x 4)-es mátrixát, és mutassa meg, hogy ez egy szimmetrikus mátrix. Vesse össze a **B02.a)** feladat c.) részében kiszámolt $\underline{\underline{L}}_1 \cdot \underline{\underline{L}}_2$ mátrixszal! Utóbbi nem szimmetrikus. Mivel magyarázhatjuk ezt?

B03.) feladat

Valamely K koordinátarendszerben két űrhajó mozgását figyeljük, melyek egyenes vonalban egyenletesen, azonos *v=c/2* nagyságú sebességgel mozognak. Az (1) jelű űrhajó az *x*-tengely irányában mozog, a (2) jelű űrhajó az *y* tengely irányában. Amikor a K koordinátarendszerben a *t = 0* időpont van, az (1) űrhajó az (*x = 0, y = d*) pontban, a (2) űrhajó pedig az (*x = d, y = 0*) pontban van. Az adatok alapján láthatjuk, hogy a két űrhajó össze fog ütközni.

a.) Adja meg a két űrhajó (u^μ) négyessebesség vektorát a K rendszerben!

b.) Adjon meg egy Lorentz-transzformációt, ami a K rendszerből a (2) űrhajóval együttmozgó rendszerbe való áttérést írja le! Ezt a rendszert a továbbiakban jelöljük K'-vel!

c.) Adja meg az űrhajók (u^μ ') négyessebességét a K' rendszerben!

d.) Mekkora az egyes űrhajók sebességének nagysága a K' rendszerben?

e.) Adja meg a K rendszerben megadott (*t = 0*) kezdeti feltételek tér és időkoordinátáit a K' rendszerben!

f.) A c.) és d.) feladat eredményei alapján adja meg az űrhajók helyzetét a K' rendszerben az ottani *t'* idő függvényében!

g.) Összeütköznek-e az űrhajók a K' rendszerben? Ha igen, adjuk meg az ütközés *t'* időpontját!