MECHANIKA 2	A) HF 07.

A 13.) feladat

Adott a következő Lagrange sűrűség:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\psi_x\psi_t + \frac{\alpha}{6}\psi_x^3 - \frac{\nu}{2}\psi_{xx}^2$$

Ahol a matematikában a parciális differenciálegyenletek elméleténél szokásos jelölést használtuk,

azaz $\frac{\partial}{\partial x}\psi = \psi_x$, $\frac{\partial}{\partial t}\psi = \psi_t$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = \psi_{xx}$

a.) A Lagrange sűrűség felhasználásával határozza meg a a rendszer mozgásegyenletét! Ügyeljen arra, hogy a funkcionál deriválásban szerpelnie kell ψ_{xx} deriváltnak is!

b.) A Vezesse be a $\phi = \psi_x$ skalár teret és a kapott mozgásegyenletet írja át erre a ϕ térre.

(**MEGJEGYZÉS**: A kapott mozgásegyenlet $\phi_t + \alpha\phi\phi_x + \nu\phi_{xxx} = 0$).

Ez az ún. „**Korteweg – deVries**" (KdV) differenciálegyenlet. Az egyenletet a két szerző először 1895-ben publikálta. Ötven évvel azelött **J.S.Russel** skót mérnök észrevette, hogy a csatornákban néha alakváltozás nélkül „magányos hullámok" futnak végig sok kilométeren keresztül. A **KdV** szerzőpáros megmutatta, hogy az általuk kitalált „nagyon" nemlineáris hullámegyenletnek is vannak „szoliton" megoldásai.

A KdV egyenlet ezután feledésbe merült. Újrafelfedezése **1965 –ben Zabusky** és **Kruskal** nevéhez fűződik akik a Fizikában szoliton állapotokkal foglalkoztak.

A 14.) feladat

Adott a következő Lagrange sűrűség:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\psi_t^2 - \frac{c^2}{2}\psi_x^2 + \lambda\left(\psi^2 - 1\right)^2$$

a.) A Lagrange sűrűség felhasználásával határozza meg a rendszer mozgásegyenletét!

b.) Térjen át új változókra a következő képpen: „$t \to \sqrt{2\lambda}\cdot t$" és „$x \to \frac{\sqrt{2\lambda}}{c}x$" !

Mutassa meg, hogy ekkor a „$\psi_{tt} - \psi_{xx} = 2\left(\psi^2 - 1\right)\psi$" hullámegyenlethez jutunk.

c.) Vezesse be a $\psi(x,t) = \psi(\xi)$ „egyváltozós" teret, ahol „$\xi = x - \nu t$". Ezek az ún. szolitonok. Használja a $\psi' = \frac{\partial\psi}{\partial\xi}$ és $\psi'' = \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}$ jelöléseket és mutassa meg, hogy az új hullámegyenlet most a következő lesz: $\left(1 - \nu^2\right)\psi'' = 2\left(\psi^2 - 1\right)\psi$

d.) Mutassa meg, hogy ez az egyenlet az alábbi Lagrange-függvényből is származtatható,

$$L = \frac{1}{2}(\psi')^2 + \frac{1}{2}\eta^2\left(\psi^2 - 1\right)^2.$$ Határozza meg az „η"-t!

e.) Az új Lagrange függvényben triviálisan definiálható egy „V" potenciál azaz

$$V(\xi) = -\frac{1}{2}\eta^2\left(\psi^2 - 1\right)^2.$$

Rajzolja vel a $V(\psi)$ potenciált! Határozza meg a lokális szélső értékek helyét és nagyságát!

f.) EXTRA! Fejtse sorba a $V(\psi)$ potenciált a „ψ” változója szerint a szélső értékek kis környezetében. Határozza meg az így kapott L -ből adódó mozgásegyenlete(ke)t!

g.) EXTRA! Oldja meg a közelítő mozgásegyenletet és elemezze a kapott megoldást a szolitok szemszögéből!
