

# ÜTKÖZÉSEK ELEMZÉSE ENERGIA-IMPULZUS DIAGRAMOKKAL

Bokor Nándor  
BME, Fizika Tanszék

Hasznosak lehetnek a relativisztikus ütközések tanításánál az energia-impulzus diagramok [1], amelyekben a szokásos Minkowski-diagramokon szereplő idő- és a helykoordináták szerepét az energia és az impulzus veszi át. Mint az alábbiakban látható lesz, az ilyen diagramok fő vonzereje abban rejlik, hogy az ütközés előtti és utáni állapotokat egyszerre jeleníti meg, és hogy az összes lényeges fizikai paraméter (a tömegpontok tömege, sebessége, impulzusa, energiája) azonnal leolvasható az ábráról.

Az egyszerűség kedvéért a képleteket végig  $c = 1$  egységekben fogom felírni [2]. Ez azt jelenti, hogy a  $t$  időt hosszúságegységben mérjük (például méterben), a  $v$  sebesség nagysága pedig 0 és 1 közé eső dimenzió nélküli szám. Ugyanebből a konvencióból az is következik, hogy az  $m$  tömeg, az  $E$  energia és a  $p$  impulzus mind ugyanabban az egységben mérendők. Ez az egység lehet például kilogramm, joule, erg, elektrontömeg stb. Hogy konkrétan melyiket választjuk, annak a jelen cikkben nincs jelentősége, ezért hacsak külön nem jelölöm, mindenütt az a.u. („arbitrary unit”, azaz „tetszőleges egység”) megjelölés értendő a számérték után.

A *téridő-beli* Minkowski-diagramokat széles körben alkalmazzák a relativitáselmélet tanításában. Ezekben egy-egy pont egy-egy eseményt jelöl, amelynek koordinátáit  $(t, x)$  alakban, vagy  $(t, x, y)$  alakban szokás megadni, attól függően hogy két- vagy háromdimenziós diagramról, azaz egy vagy kettő térbeli dimenziójú tárgyalásmódról van szó. Megállapodás szerint a függőleges tengelyen szokás a  $t$  időkoordinátát, a vízszintes tengely(ek)en pedig a térbeli koordinátá(ka)t ábrázolni. Három térbeli dimenziójú Minkowski-diagramot nem tudunk készíteni, hiszen négydimenziós ábrázolásra lenne hozzá szükség. Szerencsére a relativisztikus jelenségek nagy részének tárgyalásához nyugodtan elhagyható a harmadik térbeli dimenzió.

Minkowski-diagramokat az *energia-impulzus térben* is konstruálhatunk [1]; ekkor a függőleges tengelyen az  $E$  energia, a vízszintes tengely(ek)en pedig a  $p$  impulzus szerepel. Az ilyen diagramokon egy-egy  $(E, p)$  – vagy  $(E, p_x, p_y)$  – pont valamilyen tömegpont adott *állapotát* jelöli: megadja energiáját és azt az impulzust, amellyel a tömegpont éppen mozog. Az energia és az impulzus alább felírt relativisztikus kép-

leteiből megérthetjük a diagramok néhány általános jellemzőjét:

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (1)$$

és 1 dimenzióban

$$p = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}} v, \quad (2)$$

illetve 2 dimenzióban

$$p_x = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}} v_x \text{ és } p_y = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}} v_y, \quad (3)$$

amelyek a tömeg, energia és impulzus közötti jól ismert összefüggéshez vezetnek:

$$E^2 - p^2 = m^2. \quad (4)$$

A (4) egyenlet a tömeg invarianciáját fejezi ki. Egy adott tömegpont energiájára különböző inerciarendszer-beli megfigyelők különböző számértékeket fognak kapni, mint ahogyan az impulzusára is; az eltérő számoknak az a különleges algebrai kombinációja azonban, amely a (4) egyenlet bal oldalán szerepel, minden megfigyelő számára ugyanazt a számértéket szolgáltatja: a tömeg invariáns.

A (4) egyenletből leolvasható, hogy az energia-impulzus diagramokon egy adott  $m$  tömegű tömegpont összes lehetséges állapota ugyanazon a *hiperbolán* – illetve 2D mozgásnál ugyanazon a *forgási hiperboloidon* – fekszik. (Ez a tény természetesen szoros kapcsolatban van a *téridő-intervallum* invarianciájával; a téridőbeli Minkowski-diagramokon analóg módon hiperbolákat használunk például arra, hogy a különböző vonatkoztatási rendszerekhez tartozó koordinátatengelyeket egymáshoz kalibráljuk.) Az a vektor, amelyet az origóból e hiperbola – vagy hiperboloid – megfelelő pontjához húzunk, az adott tömegpont *energia-impulzus vektora*.

Az energia-impulzus vektor közvetlen vizuális információt ad a tömegpontnak az ütközés szempontjából lényeges összes tulajdonságáról: a vektor által meghatározott hiperbola – vagy hiperboloid – és az  $E$ -tengely metszéspontja megadja a részecske tömegét; a vektor  $E$ -tengelyhez képesti meredeksége pedig a részecske sebességét. Különösen vonzó tulaj-

Köszönetemet fejezem ki *Hraskó Péter*nek támogató bírálatáért és hasznos javaslataiért.

donsága az ilyen diagramoknak az, hogy például egy tömegpontrendszer teljes energiáját és teljes impulzusát egyetlen lépésben láthatóvá lehet tenni: csupán meg kell szerkeszteni az egyes energia-impulzus vektorok *vektori összegét*, és leolvasni az összegvektor függőleges, illetve vízszintes komponenseit.

Az alábbiakban azt tekintem át, hogyan olvasható le egyetlen pillantással mind a rugalmatlan, mind a rugalmas ütközések szinte valamennyi fontos adata az energia-impulzus diagramokról.

## Ütközések

Az ütközésekkel kapcsolatos számpéldákban általában adottak az ütközésben résztvevő tömegek és kezdeti sebességeik; a diákoknak ezután az a feladatuk, hogy kiszámítsák

a) az ütközéskor keletkezett egyetlen test tömegét és sebességét (tökéletesen rugalmatlan ütközés esetén, amit az egyszerűség kedvéért röviden *rugalmatlan ütközésnek* fogok nevezni)

b) az ütköző tömegpontok végsebességét (*rugalmas ütközés* esetén)

### Rugalmatlan ütközés két tömegpont között

Az *1. ábra* egy olyan *rugalmatlan* ütközés energia-impulzus diagramját mutatja, amelyben egy  $m_A$  és egy  $m_B$  tömegű részecske vesz részt. A tömegek és a sebességek a következők:  $m_A = 1$  [a.u.],  $m_B = 2$  [a.u.],  $v_A = -0,5$ ,  $v_B = 0,6$ .

Az ütközés során a két tömegpont „összetapad” egyetlen,  $m_C$  tömegű (továbbra is pontszerűnek tekintett) testté, amely  $v_C$  sebességgel indul tovább. Az összetapadt test energia-impulzus vektora a két ütköző tömegpont energia-impulzus vektorának összege.

Ha felírjuk és megoldjuk az energiamegmaradás és az impulzusmegmaradás egyenletét, az  $m_C = 3,536$  [a.u.] és  $v_C = 0,252$  számértékeket kapjuk.

Bár az *1. ábráról* nem látszanak ilyen sok tizedesjegyre a fenti számértékek, de azért az ütközés „teljes sztorija” leolvasható belőle, ráadásul *kvantitatív* válaszokat kapunk minden lényeges kérdésre: mindhárom test *tömegét* látjuk, ha leolvassuk, hol metszi az  $E$ -tengely a megfelelő hiperbolákat; a három tömegpont *sebességét* a megfelelő energia-impulzus vektor ( $E$ -tengelyhez képesti) meredeksége mutatja; energiájukat és impulzusukat pedig ugyanezen a vektorok függőleges, illetve vízszintes komponense.

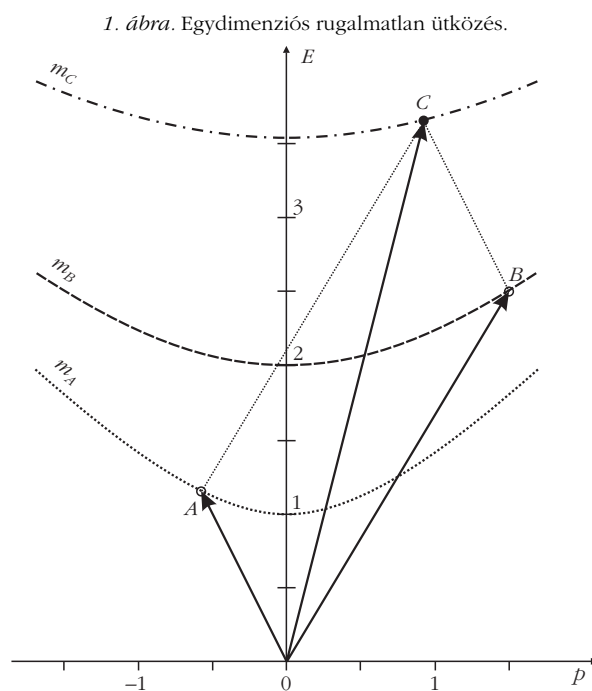
Az ütközés kimenetele, így  $m_C$  és  $v_C$  értéke is egyértelműen meghatározott. A rugalmatlan ütközések szokásos, algebrai tárgyalásakor ezt a tényt általában úgy magyarázzuk, hogy *két ismeretlen* meghatározásához éppen *két független egyenlet* (az energiamegmaradás és az impulzusmegmaradás) áll rendelkezésünkre. Ha azonban az *1. ábrához* hasonló energia-impulzus diagramot használunk, a megoldás egyértelműségének oka triviálisan látszik: az összetapadt testet az ábrán egy olyan vektor képviseli, amelyet két

vektor összegeként kaptunk, és természetesen ennek az összegvektornak mind „hossza” (azaz  $m_C$ ), mind iránya (azaz  $v_C$ ) egyértelműen meghatározott.

A rugalmatlan ütközések során a végállapot, azaz a keletkezett test  $m_C$  tömege és  $v_C$  sebességvektora a *térbeli dimenziók számától függetlenül mindig egyértelmű*. Algebrai tárgyalásmód esetén ezt úgy magyarázzuk, hogy a dimenziószám növelésekor amilyen mértékben növekszik az *ismeretlenek* száma (azaz  $v_C$  komponenseinek száma), ugyanolyan mértékben növekszik a független *egyenletek* száma is (mindig egy-egy újabb komponensegyenlethez jutunk az impulzusvektor megmaradásából). Így az ismeretlenek száma mindig megegyezik a független egyenletek számával. Az energia-impulzus diagramos tárgyalásmódban ismét egyszerűbb az érvelés: a keletkezett test energia-impulzus vektorát két energia-impulzus vektor összegeként kapjuk, tehát „hossza” (azaz  $m_C$ ) és iránya (ami  $v_C$  komponenseit adja) egyértelműen meghatározott.

Az *1. ábra* tömegpontok összetapadására, *fúziójára* nyújt példát. Az ilyen kölcsönhatások egyik legfontosabb jellemzője a tömegnövekedés:  $m_C > m_A + m_B$ , hiszen a kezdeti mozgási energia egy része az új test nyugalmi energiájának – tömegének – növelésére fordítódott. Az ábra ezt a jelenséget is közvetlenül mutatja, sőt az  $m_C - (m_A + m_B)$  tömegnövekedés *mértéke* is számszerűen leolvasható.

A tömegnövekedés mértéke annál kisebb, minél inkább közelítenek a függőlegeshez az *1. ábra* energia-impulzus vektorai, azaz minél kisebbek az ütközésben előforduló sebességek. (Teljesen függőleges vektorok – álló tömegpontok – összekombinálása az  $E$ -tengely mentén zajlik, ilyenkor – a tengely lineáris kalibrálása miatt – triviálisan teljesül a tömegmegmaradás: az összetapadt test tömege egyenlő a két kiin-



dulási tömeg összegével.) Az 1. ábra alapján így érthető például az is, hogy bár a középiskolában rugalmatlan ütközési típuspéldaként tárgyalt ballisztikus inga esetében is *van* tömegnövekedés – a lövedék kezdeti mozgási energiájának hővé (a zsák-lövedék rendszer belső energiájává) alakuló része valóban megnöveli a rendszer tömegét –, azt a tömegnövekedést teljes joggal hanyagoltuk el.

Az 1. ábrán bemutatott rugalmatlan ütközést „időben visszafelé is lejátszhatjuk”, ez olyan jelenségek tárgyalásához vezet minket, mint a *maghasadás*, vagy egy bomba felrobbanása darabokra stb. Természetesen ilyen esetekben is az 1. ábrához hasonló diagramot kapunk; ekkor azonban a *tömegdefektus* lesz leolvasható az ábráról.

Egy dimenziós rugalmas ütközés két tömegpont között

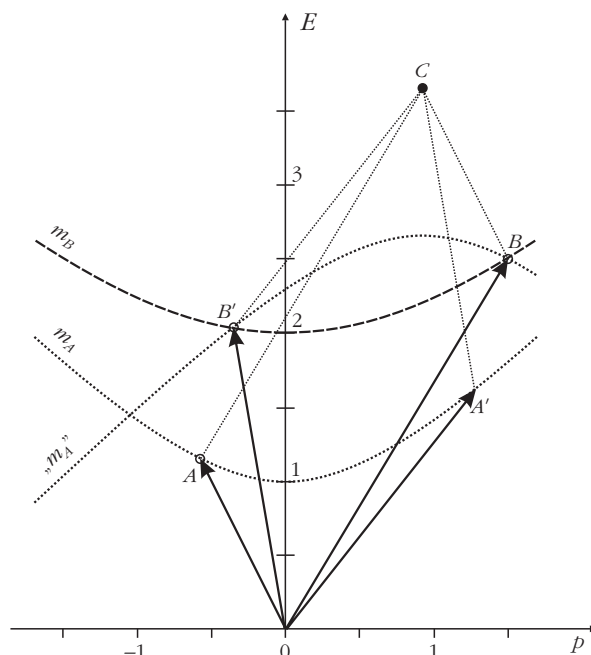
Tekintsünk most egy *rugalmas* ütközést ugyanolyan kezdőfeltételekkel, mint az 1. ábrán. Feladat: meghatározni a két tömegpont  $v'_A$  és  $v'_B$  végsebességét, miután visszapattantak egymásról. Az energia-impulzus diagram „nyelvére fordítva” ez azt jelenti, hogy két olyan energia-impulzus vektort keresünk, amelyek kielégítik az alábbi feltételeket:

1. összegük ugyanazt az energia-impulzus vektort kell adja, mint az kiindulási két energia-impulzus vektor összege (azaz összegük a  $C$  pontba kell hogy mutasson);

2. a két keresett vektor végpontja az  $m_A$ , illetve  $m_B$  jelzésű hiperbolára kell mutasson, hiszen az ütközés után az eredeti két tömegpont halad tovább.

A probléma egyszerűen megoldható a következő geometriai módszerrel (2. ábra): a  $C$  pontból, mint origóból, rajzoljuk fel az  $m_A$  hiperbolát fejtetőn. Ez az invertált hiperbola (amelyet a 2. ábrán „ $m_A$ ” felirattal jelöltem) az  $m_B$  hiperbolát két pontban metszi. Mindkét metszéspont teljesíti a fenti feltételeket; ráadásul *csak* ez a két metszéspont ilyen. A két metszéspont fizikai jelentése: ezek képviselik azokat az állapotokat, amelyeket ebben a kölcsönhatásban az  $m_B$  tömegű tömegpont felvehet. Egyikük (a 2. ábrán  $B$ -vel jelölt pont) az  $m_B$  ütközés *előtti* állapotát jelzi; a másikuk (az ábrán  $B'$ -vel jelölt pont) ugyanezen tömegpont ütközés *utáni* energia-impulzus vektorát adja. Mint az ábrán látszik, a vektorösszeadás paralelogramma-szabályát alkalmazva egyszerűen megrajzolható ezek után az  $m_A$  tömegű tömegpont ütközés utáni energia-impulzus vektora is (ezt  $A'$  jelzi az ábrán). Ismét az ütközés teljes történetét megtudjuk *egyetlen ábrából*: az összes sebesség-, energia- és impulzus-adat, mind ütközés előtt, mind ütközés után, kvantitatíven látszik az ábrán. (A keresett két végsebesség,  $v'_A$  és  $v'_B$  például a végső energia-impulzus vektorok meredeksége.)

Egy dimenziós rugalmas ütközés esetén  $v'_A$ -ra és  $v'_B$ -re egyértelmű megoldást kapunk. Csakúgy, mint a rugalmatlan ütközéseknél, algebrai okoskodással ezt úgy magyarázzuk, hogy az ismeretlenek és a független egyenletek száma megegyezik: két egyenlet (energia-



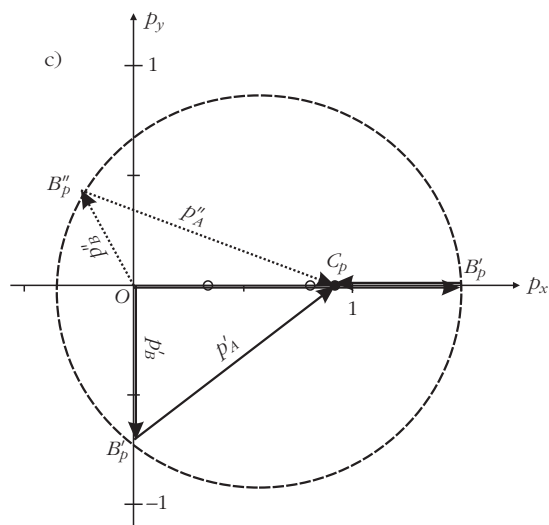
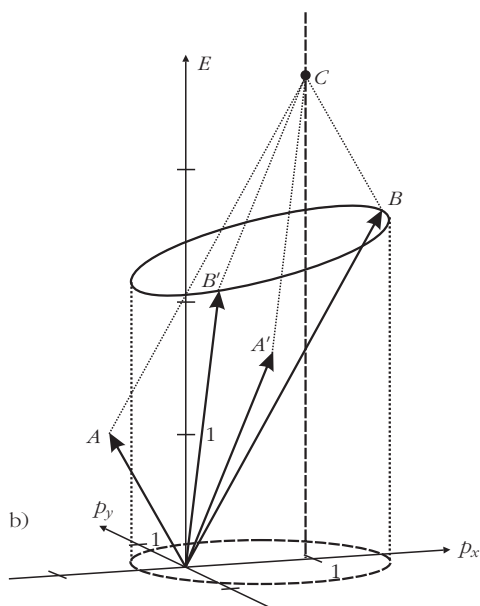
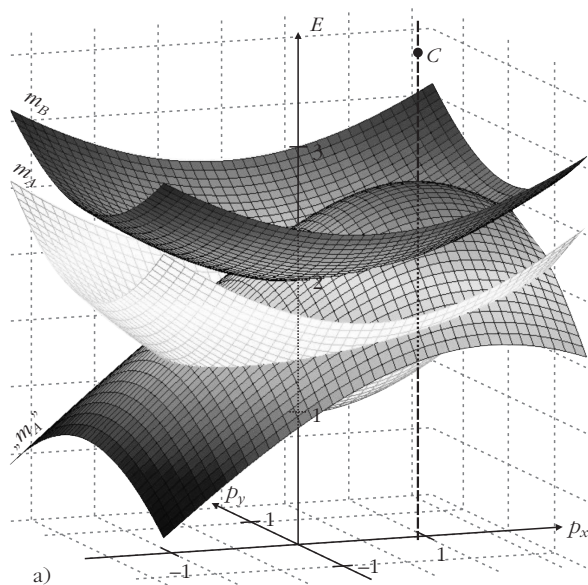
2. ábra. Egydimenziós rugalmas ütközés.

megmaradás és impulzusmegmaradás) két ismeretlenre. A 2. ábra energia-impulzus diagramja azonban „a sztorinak” ezt a részét is első pillantásra „elmeséli”: ha két hiperbola metszi egymást, pontosan *két* metszéspontjuk van. Az egyik metszéspont a tömegpontok kiindulási állapotának felel meg. A másik egyértelműen meghatározza a tömegpontok ütközés utáni állapotát.

Két dimenziós rugalmas ütközés két tömegpont között

Az előző gondolatmenet egyszerűen általánosítható olyan ütközésekre, amelyek két térbeli dimenzióban zajlanak. Az energia-impulzus diagram három dimenziós ábrává alakul, amelyben az ütköző tömegpontokat nem egy-egy hiperbola, hanem egy-egy forgási hiperboloid jelképez, mint az a (3) és (4) egyenlekből leolvasható. A 3.a ábrán egy ilyen diagram látható, ugyanazokra a kezdőfeltételekre, mint az 1. és 2. ábrák. (A tömegpontok ütközés előtt az  $x$ -tengely mentén mozogtak.) A 2. ábra magától értetődő általánosításaként most az  $m_A$  hiperboloidot rajzoljuk fel fejtetőn (ismét a  $C$  pontot origónak tekintve). Ennek az invertált hiperboloidnak (amelyet az ábrán „ $m_A$ ” felirat jelöl) és az  $m_B$  hiperboloidnak *metszéspörgörbéje* adja azon energia-impulzus vektorok végpontjait, amelyekkel az  $m_B$  tömegpont ebben a kölcsönhatásban rendelkezhet.

Két dimenziós rugalmas ütközéseknél *végtelen sok* végállapot lehetséges. Ezt algebrai úton úgy szoktuk magyarázni, hogy négy ismeretlenünk van (a  $v'_A$  és  $v'_B$  végsebességek  $x$ - és  $y$ -komponensei), viszont meghatározásukhoz csak három független egyenlet áll rendelkezésünkre (az energiamegmaradás, illetve az impulzusmegmaradás mindkét komponensre). Az energia-impulzus diagramra azonban ismét elég egyetlen pillantást vetnünk, hogy szemléletes magya-



3. ábra. Kétdimenziós rugalmas ütközés.

rázatot kapunk a lehetséges végállapotok végtelen számára: a két hiperboloid *folytonos görbe* mentén metszi egymást (nem csupán két pontban, mint az egy dimenziós esetben, lásd 2. ábra), és a metszégörbe minden pontja egy-egy lehetséges megoldást ad.

A 3.b ábrán a két hiperboloid metszégörbéje, egy megdöntött ellipszis látható. Az ábrán szereplő  $A'$  és  $B'$  energia-impulzus vektorok a két tömegpontnak csupán egy ütközés utáni konfigurációját jelenítik meg a végtelen sok lehetséges esetből. (Éppen azt az esetet, amikor az  $m_B$  tömegpont a negatív  $y$  irányban mozog az ütközés után.) Az ábrán láthatók az  $A$ -val és  $B$ -vel jelölt, ütközés előtti energia-impulzus vektorok is.

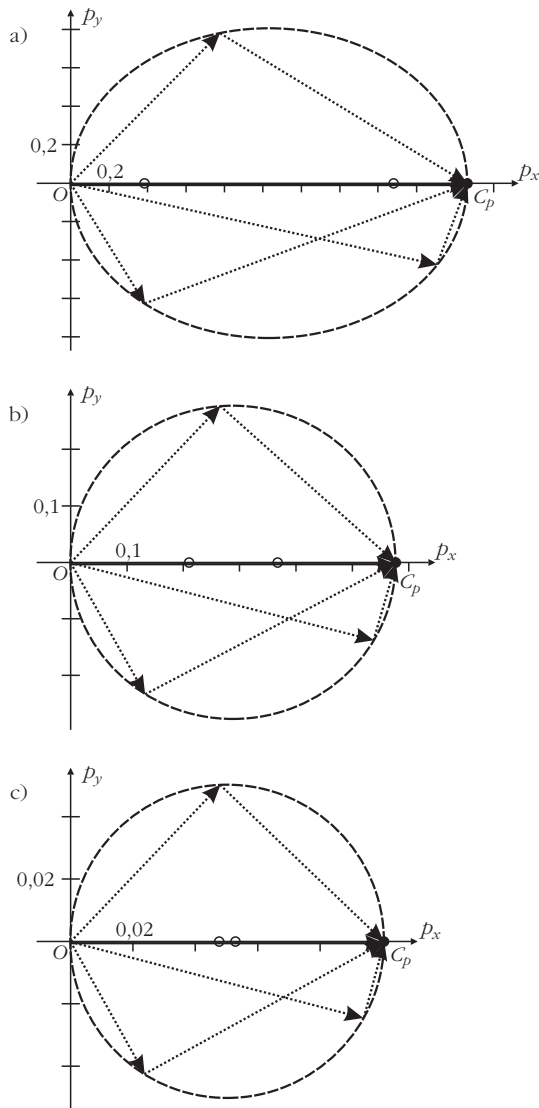
A metszégörbét levetítve a  $(p_x, p_y)$  síkba egy újabb ellipszist kapunk, ez a 3.b ábra szaggatott görbéje. A 3.c ábra részletesebben mutatja ezt a  $(p_x, p_y)$  síkba levetített ellipszist. A „p” alsó indexszel jelölt pontok mind a 3.b ábra megfelelő pontjainak levetítései a  $(p_x, p_y)$  síkba. (A  $B''_p$  pont egy újabb lehetséges végállapotot mutat, amely nem szerepelt a 3.b ábrán.) Ez a fajta részleges „impulzus-diagram” is hasznos lehet pedagógiai szempontból. Ha az  $O$  origót összekötjük az ellipszis bármely pontjával, az  $m_B$  tömegpont egy lehetséges impulzusvektorát kapjuk, az abból az ellipszispontból  $C_p$ -be húzott vektor pedig az az impulzusvektor, amellyel *ugyanekkor* az  $m_A$  tömegpont rendelkezik. A rendszer teljes impulzusvektora minden kombinációra az  $OC_p$  vektor. (Az illusztráció kedvéért az ábrán – kis körökkel – feltüntettem az ellipszis két fókuszpontját is.)

### Speciális esetek

Kétdimenziós ütközés két azonos tömegpont között, amelyek közül az egyik nyugalomban van

A kétdimenziós ütközések gyakran tárgyalt speciális esete, amikor két azonos tömegű részecske ütközik össze (azaz  $m_A = m_B$ ), és egyikük az ütközés előtt nyugalomban van. A newtoni mechanikából könnyen levezethető ezen ütközéstípusnak az az érdekes tulajdonsága, hogy ütközés után a két tömegpont mozgása *egymásra merőleges*. Impulzus-diagramok segítségével szépen illusztrálható, hogy ez az eredmény csak kis kezdősebességeknél érvényes.

A 4. ábra ilyen ütközések mutatja az impulzus-diagramokat, a következő paraméterek mellett:  $m_A = m_B = 1$  [a.u.], és  $v_A = 0,9, 0,5$  és  $0,1$  (ilyen sorrendben az a), b) és c) ábrákon). A 3.c ábrához hasonlóan – és a relativisztikus tárgyalásnál mindig – itt is mindenütt egy-egy *ellipszis* írja le az ütközés utáni lehetséges állapotokat. (Az ellipszisek fókuszpontjait ismét kis körök jelzik az ábrán.) Ebben a speciális esetben azonban  $O$  és  $C_p$  (a teljes impulzusvektor kezdőpontja és végpontja) nem más, mint az adott ellipszis *nagy-tengelyének két végpontja*. A 4. ábrán a teljes impulzust vastag vonallal húzott vízszintes vektor ábrázolja; a két tömegpont ütközés utáni impulzusainak néhány



4. ábra. Kétdimenziós rugalmas ütközés két azonos tömegű részecske között, amelyek közül az egyik nyugalomban volt.

lehetséges konfigurációját pedig pontozott vonalú vektorok jelzik. A 4.a ábrából látható, hogy nagy kezdősebességnél az ütközés utáni impulzusvektorok egymással bezárt szög jelentősen eltérhet a  $90^\circ$ -tól.

Ahogy közelítünk a klasszikus esethez (azaz ahogy  $v_A$  csökken), az ütközés utáni impulzusok relatív helyzete egyre inkább közelít a merőlegeshez: csökkenő  $v_A$  mellett ugyanis az ellipszis excentricitása csökken, a diagram pedig egyre inkább körhöz kezd hasonlítani. Newtoni közelítésben a diagram pontosan kör, amelynek  $OC_p$  az átmérője; így bármely lehetséges impulzus-konfiguráció egy kör átmérője fölé húzott két szomszédos húrnak felel meg, amelyekről Thalész tételéből tudjuk, hogy merőlegesek.

A 4. ábráról az is leolvasható, hogy a teljes impulzus  $m_A \cdot v_A$  newtoni képlete mennyiben tér el a helyes relativisztikus eredménytől, és hogyan közelíti meg azt kis sebességeknél. A teljes impulzus, azaz az O és  $C_p$  pontok közötti távolság, a 4.a, 4.b és 4.c ábrán 2,06, 0,58 és 0,10 értékűnek adódik. A megfelelő newtoni számértékek: 0,90, 0,50 és 0,10.

## Compton-szórás

A két dimenziósként tárgyalható ütközések egy másik speciális esete a Compton-szórás: itt egy foton ütközik egy nyugalomban levő elektronnal. A foton energiájának egy része átadódik az elektronnak, így az mozgásba lendül valamilyen irányban, míg maga a foton egy másik irányba szóródik. Energiavesztése abban nyilvánul meg, hogy hullámhossza eltolódik (nagyobb hullámhosszak felé).

Fotonra  $E^2 - p^2 = 0$ , tehát a fotonokat az energia-impulzus diagramon egy *kúpfelület* reprezentálja (lásd a  $ph_A$ -val jelölt kúpot az 5.a ábrán). Fontos megjegyezni, hogy a téridőbeli Minkowski-diagramok jól ismert „fénykúpjaival” ellentétben az 5.a ábrán szereplő kúp az összes fotont jelképezi, amelyek az  $(x, y)$  síkban *bármikor, bárhol* mozognak. A fotonok nulla tömegű részecskék, ez a tulajdonságuk azonnal látszik az 5.a ábrán, hiszen a kúp olyan elfajult hiperboloidnak tekinthető, amely az  $E=0$ -ban metszi.

Az elektront az  $m_B$  jelű hiperboloid jelképezi. Az egyszerűség kedvéért az ebben a példában előforduló összes tömeg-, energia- és impulzusértéket az elektrontömeg egységeiben (u.e.m., „units of electron mass”) fejezem ki, azaz például  $m_B = 1$  [u.e.m.]. A bejövő fotonról feltesszük, hogy a pozitív  $x$ -tengely mentén mozog,  $E_A = p_A = 0,5$  [u.e.m.] energiával.

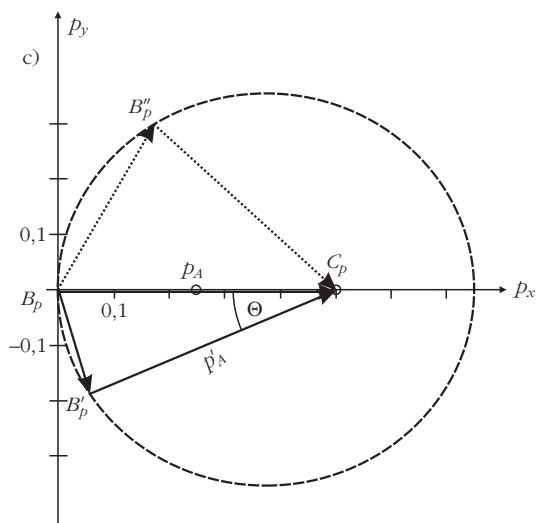
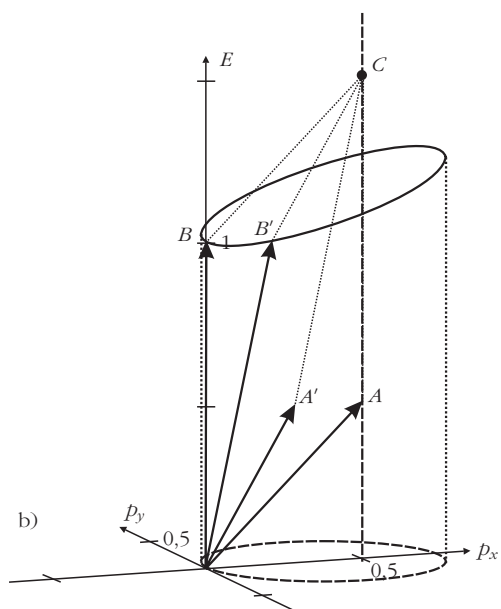
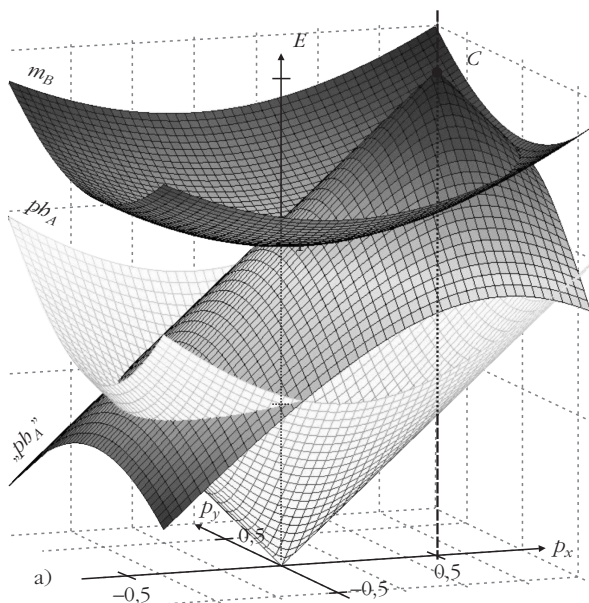
A lehetséges végállapotok megtalálásának geometriai módszere hasonló a 3.a ábrán szereplő eljárás-hoz. Először meghatározzuk a rendszer teljes energia-impulzus vektorát (jelen paramétereinkkel ennek  $E$ -komponensére 1,5,  $p_x$ -komponensére pedig 0,5 adódik). A vektor csúcsát a  $C$  pont jelzi az 5.a ábrán.  $C$ -ből ezután megrajzoljuk a foton-kúpot fejjel lefelé (ezt „ $ph_A$ ” jelöli az ábrán). Az  $m_B$  hiperboloid és a „ $ph_A$ ” invertált kúp metszetgörbéje mutatja az elektron lehetséges végállapotait a kölcsönhatás után.

Az 5.b ábrán a metszetgörbe látható (amely ismét egy megdőlt ellipszis). Ugyanezen az ábrán az  $A$  és  $B$  pontok a foton és az elektron kezdeti energia-impulzus vektorát jelölik, az  $A'$  és  $B'$  pontok pedig a foton és az elektron egy lehetséges végállapot-konfigurációját.

A 3.b ábrához hasonlóan a metszet-ellipszist ezután levetíthetjük a  $(p_x, p_y)$  síkra. A levetített ellipszist az 5.c ábra mutatja. Ezen az ellipszisen két feltűnő sajátosság figyelhető meg a 3.c ábrához képest (amely egy általánosabb ütközést írt le két tömegpont között):

1. a nagytengely bal oldali végpontja az *origóban* van;
2. a  $C_p$  pont, vagyis a  $C$  pont levetítése az ellipszis *jobb oldali fókuszpontjába* esik.

Az 5.c ábrán a  $B'_p$  és a  $B''_p$  pontok két lehetséges végállapotot jelölnek. Ha az origót összekötjük az ellipszis bármely pontjával, az elektron egy lehetséges impulzusvektorát kapjuk, az abból az ellipszispontból  $C_p$ -be húzott vektor pedig a szóródott foton megfelelő impulzusvektorát. Az elektron és foton egymáshoz viszonyított lehetséges mozgásirányai tehát azonnal lát-



5. ábra. Compton-szórás.

szanak az ábrából. A foton különleges részecske: impulzusvektorának hossza egyben megadja energiájának számértékét is. (Mint arról az alábbiakban még szó lesz, az ellipszis pontos alakja függ a bejövő foton energiájától. Ugyanakkor a fotonenergiától függetlenül minden „Compton-ellipszis” rendelkezik a fent felsorolt két geometriai sajátossággal.)

A Compton-szórás néhány kvalitatív jellemzője közvetlenül leolvasható az 5.c ábráról:

1. a szóródott fotonoknak feltétlenül kisebb az energiája (azaz nagyobb a hullámhossza), mint a bejövő fotonnak;

2. a szórási szög növekedésével csökken a szóródott foton energiája, minimális energiája (azaz maximális hullámhossza) a hátrafelé szóródott fotonnak van.

Folytassuk az 5.c ábrán szereplő Compton-ellipszis elemzését. Ehhez egy kis számolásra is szükségünk van. Először határozzuk meg az ellipszis egyenletét. Az  $m_B$  hiperboloid egyenlete

$$E = \sqrt{m_B^2 + p_x^2 + p_y^2}, \quad (5)$$

a „ $pb_A$ ” invertált kúpé pedig

$$E = p_A + m_B - \sqrt{(p_x - p_A)^2 + p_y^2}. \quad (6)$$

Az (5) és (6) egyenletek jobb oldalát egyenlővé téve, és a kapott összefüggést átrendezve megkapjuk a metszetellipszis  $(p_x, p_y)$  síkba levetített képe, azaz a „Compton-ellipszis” az egyenletét:

$$\left(\frac{p_x - a}{a^2}\right)^2 + \frac{p_y^2}{b^2} = 1, \quad (7)$$

ahol a fél nagytengelyre

$$a = \frac{p_A(p_A + m_B)}{2p_A + m_B}, \quad (8)$$

a fél kistengelyre pedig

$$b = p_A \sqrt{\frac{m_B}{2p_A + m_B}} \quad (9)$$

adódik. A fókusz távolság:

$$f = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{p_A^2}{2p_A + m_B}. \quad (10)$$

A (8)–(10) összefüggéseket felhasználva az ellipszis excentricitására és  $\Pi$  paraméterére a következő egyszerű képleteket kapjuk:

$$e \equiv \frac{f}{a} = \frac{p_A}{p_A + m_B}, \quad (11)$$

$$\Pi \equiv \frac{b^2}{a} = \frac{p_A m_B}{p_A + m_B}. \quad (12)$$

Az  $e$  excentricitás azt fejezi ki, hogy ellipszis alakja „mennyire tér el” a körtől (ha  $e \rightarrow 0$ , az ellipszisből kör lesz, a két fókuszpont pedig egybeesik a kör középpontjával). A (11) egyenletből ezek után látható, hogy a Compton-ellipszis excentricitásának fizikai tartalma is van: ha a bejövő foton energiája sokkal kisebb, mint az elektron tömege (azaz  $p_A/m_B \ll 1$ ), az ellipszisből kör lesz, a szóródó foton lehetséges impulzusvektorai pedig ezen kör a rádiuszai mentén helyezkednek el (lásd 5.c ábra). Ilyen esetekben tehát a foton csak mozgási irányát változtatja meg, miközben energiája gyakorlatilag változatlan marad.

Az ellipszis egyenlete egy olyan polárkoordináta-rendszerben veszi fel legegyszerűbb és legegánsabb algebrai alakját, amelynek origója az egyik fókuszpontban van. Az egyenlet ekkor az origóból húzott rádiuszvektor  $r$  hosszát adja meg a  $\theta$  polárszög függvényében:

$$r = \frac{\Pi}{1 - e \cos\theta}. \quad (13)$$

Amint az 5.c ábrából látszik, a Compton-ellipszis esetében a  $\Theta$  fotonszórési szöghöz tartozó „rádiuszvektor” hossza éppen az ehhez a szórési szöghöz tartozó  $p'_A$  fotonimpulzus. Így a (13) egyenletet a Compton-ellipsziszre felírva, és  $e$  és  $\Pi$  értékét a (11) és (12) kifejezésekből behelyettesítve a

$$p'_A = \frac{m_B}{1 + \frac{m_B}{p_A} - \cos\Theta} \quad (14)$$

összefüggés adódik. Helyettesítsük be a kölcsönhatás előtti és utáni fotonimpulzusra a

$$p_A = \frac{h}{\lambda} \text{ és } p'_A = \frac{h}{\lambda'}$$

de Broglie-összefüggéseket (ahol  $h$  a Planck-állandó), és szorozzuk be (14) mindkét oldalát a jobb oldal nevezőjével. Ezzel

$$\frac{h}{\lambda'}(1 - \cos\Theta) = m_B \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda'} \quad (15)$$

adódik, azaz

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_B}(1 - \cos\Theta). \quad (16)$$

A Compton-szórás jól ismert hullámhossz-eltolódási képletét tehát mintegy a Compton-ellipszis geometriai tulajdonságaiból kaptuk meg, nem pedig a szokásos tisztán algebrai módszerrel (amelyben felírjuk az energiamegmaradás és az impulzusmegmaradás egyenletrendszerét, majd kiküszöböljük belőlük az elektron végsebességét és haladási irányszögét). Az itt felvázolt levezetés ugyan nem feltétlenül egyszerűbb, mint a tisztán algebrai módszer, de valószínű, hogy sok diák számára vonzóbb és elegánsabb ez a fajta geometriai okoskodás, annál is inkább, mert az elektron végsebessége és szóródási szöge fel sem bukkan benne.

Összefoglalva: az energia-impulzus diagramok – az algebrai tárgyalás kiegészítőjeként – hasznos pedagógiai segédeszközt nyújthatnak különféle kölcsönhatások elemzéséhez. A diákok *egyetlen ábrára* rápillantva ellenőrizhetik a kölcsönhatás minden fontos fizikai sajátosságát, sőt a lényeges fizikai mennyiségek közelítő számértékét is leolvashatják róla.

#### Irodalom

1. E. J. Saletan: Minkowski diagrams in momentum space. *Am. J. Phys.* 65/8 (1997) 799–800.
2. lásd például: E. F. Taylor, J. A. Wheeler: *Téridőfizika*. Typotex, Budapest, 2006.