7.

Gyakorlat

42A-7

Az emberi szem kb. 555 nm hullámhossznál a Iegnagyobb érzékenységű. Adjuk meg annak a fekete testnek a hőmérsékletét, amely sugárzásának a spektrális teljesitménye ezen a hullámhosszon a maximális!

Megoldás:

$$\lambda_{max} \cdot T = 2,8977721 \cdot 10^{-3}\, K\, m \qquad \text{Wien törvénye} \tag{7.1}$$

ahonnan

$$T = \frac{2,8977721 \cdot 10^{-3}}{555 \cdot 10^{-9}} = 5221\, K \tag{7.2}$$

42A-15

A nátrium kilépési munkája 2,75 eV. Adjuk meg a fotoelektromos hatàs küszöbhullámhosszát Na esetére.

Megoldás:

Az Einstein–képlet szerint

$$h \cdot \nu = W + E_{kin} = W + \frac{1}{2} m\, v^2 \tag{7.3}$$

A küszöbhullámhossz esetén a kilépő elektronok kinetikus energiája nulla

$$h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} = W \tag{7.4}$$

$$\lambda = \frac{h\, c}{W} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} J\, s \cdot 2,998 \cdot 10^{8}\, m/s}{2,75 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} J} = 4,509 \cdot 10^{-7} \frac{\cancel{J}\, \cancel{s}\, m/\cancel{s}}{\cancel{J}} \tag{7.5}$$

$$\lambda = \underline{\underline{4,509 \cdot 10^{-7} m}} \tag{7.6}$$

42B-22

Egy gamma–foton, melynek energiája az elektron nyugalmi energiájával (511 kev) egyenlő, összeütközik egy elektronnal, ami kezdetben nyugalomban volt. Számitsuk kí, mekkora mozgási energiát nyer az elektron az ütközésben, ha a foton az eredeti pályaegyeneséhez képest 30^o-os szögben szóródik?

Megoldás:

A feladatban leírt folyamat a Compton effektus, amelynek képlete

$$\Delta\,\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_{Compton}\,(1-\cos\theta) \qquad \text{ahol} \tag{7.7}$$

$$\lambda_{Compton} = \frac{h}{m_e\,c} = 2,43\cdot 10^{-12}\,m \qquad \text{az elektron Compton hullámhossza} \tag{7.8}$$

Behelyettesítve

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= 2,43\cdot 10^{-12}\,m\,(1-cos30^o) = \\ &= 2,43\cdot 10^{-12}\,(1-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \\ &= 3,251\cdot 10^{-13} m \\ \lambda' &= \lambda + 3,251\cdot 10^{-13} m \end{aligned} \tag{7.9}$$

Tudjuk, hogy a foton kezdeti energiája

$$\mathcal{E}_{foton} = h\,\nu = h\,\frac{c}{\lambda} = 511\cdot 10^3\,eV = 511\cdot 10^3\cdot 1,602\cdot 10^{-19} = 8,187\cdot 10^{-14} J,$$

ahonnan $\lambda = 2,426\cdot 10^{-12}\,m$. Mivel a kimenő foton hullámhossza nagyobb, energiája kisebb lesz és ez az energiacsökkenés lesz egyenlő az elektron kinetikus energiájának növekedésével. Mivel kezdetben az elektron nyugalomban volt ez egyúttal a teljes mozgási energiája is lesz

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_{foton} &= \frac{h\,c}{\lambda'} = \frac{1,987\cdot 10^{-25}}{2,751\cdot 10^{-12}} = 7,220\cdot 10^{-14} J = 450,6\,keV \\ \mathcal{E}_{kin} &= -(\mathcal{E}'_{foton} - \mathcal{E}_{foton}) = 9,674\cdot 10^{-15} J = 60,38\,keV \end{aligned} \tag{7.10}$$

43A-12

Egy mozgó neutron de Broglie-bullámhossza 0,2 nm. Adjuk meg (a) a sebességét, és (b) a mozgási energiáját eV egységekben!

Megoldás:

A de Broglie képlet szerint

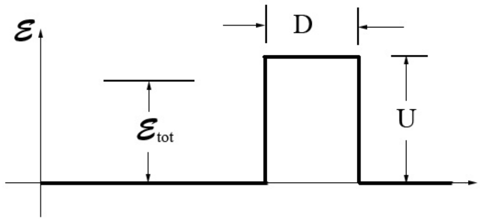
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\,v}$$
$$v = \frac{h}{m_n\,\lambda} = \frac{6,626\cdot 10^{-34}}{1.673\cdot 10^{-27}\cdot 2\cdot 10^{-10}} = 1981\,\frac{m}{s}$$
$$\mathcal{E}_{kin} = \frac{1}{2}\,m_n\,v^2 = 3.281\cdot 10^{-21}\,J = 2,048\cdot 10^{-2}\,eV \tag{7.11}$$

43B-23

A T áteresztési tényező azt adja meg, mekkora a valószinűsége annak, hogy egy m tömegű részecske a 43-23 ábrán bemutatott derékszögű potenciálfalhoz közeledve „átalagútozik” a potenciálfalon.

$$T = e^{-2\,k\,D}, \qquad \text{ahol } k = \sqrt{\frac{8\,\pi^2\,m_e\,(U-\mathcal{E})}{h^2}} \tag{7.12}$$

Vizsgáljunk olyan potenciálfalat, melyre $U = 5\,eV$ és $D = 950\,pm$ (pikométer). Tegyük



7.1. ábra. 43-23

fel, hogy egy E= 4,5 eV energiája elektron közeledik a potenciálfalhoz. Klasszikusan az elektron nem képes áthaladni a potenciálfalon, mert $E < U$. A kvantummechaníka szerint azonban véges valószinűsége van az átalagútozásnak. Számitsuk ki ezt a valószínűséget!

Megoldás:

$$k = \sqrt{\frac{8\,\pi^2\,9,109\cdot 10^{-31}\,(5-4,5)\cdot 1,602\cdot 10^{-19}}{(6.626\cdot 10^{-34})^2}} \tag{7.13}$$
$$= 3.623\cdot 10^9\,\frac{1}{m} \tag{7.14}$$
$$T = e^{-2\,3.623\cdot 10^9\,950\cdot 10^{-12}} = \underline{\underline{1.025\cdot 10^{-3}}} \tag{7.15}$$

43B-28

Egy atomot az 1,8 eV energiával az alapállapot fölötti szintre gerjesztve, az atom ott átlagosan $2 \cdot 10^{-6}$ s időt tölt el, mielött alapállapotba kerülne vissza. (a) Adjuk meg a kibocsátott foton frekvenciáját! (b) Adjuk meg a foton hullámhosszát! (c) Adjuk meg a foton energiájának bizonytalanságát!

Megoldás:

Az alapállapotba visszatérés során kibocsátott foton frekvenciája és hullámhossza:

$$\nu = \frac{\mathcal{E}}{h} = \frac{1,8 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}\, J}{6.626 \cdot 10^{-34}\, J\, s} = 4.352 \cdot 10^{14} Hz \tag{7.16}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 6.888 \cdot 10^{-7}\, m \tag{7.17}$$

Egy adott állapot $\Delta\,\mathcal{E}$ energiabizonytalansága és az adott állapotban tartozkodás $\Delta\,t$ időtartama között is fennáll egy határozatlansági összefüggés:

$$\Delta\,E \cdot \Delta\,t \geq \hbar$$

$$\Delta\,E \geq \frac{\hbar}{\Delta\,t} = 5.27286 \cdot 10^{-29}\, J = 3.29106 \cdot 10^{-10}\, eV$$

43C-33

Amikor egy atom fotont bocsát ki, az energia valamilyen hányada az atom visszalökődésére fordítódik. Mutassuk meg, hogy ez a hányad közelítőleg $\frac{\mathcal{E}}{2\,m\,c^2}$, ahol $\mathcal{E}$ az átmenet energiája es m az atom tömege.

Megoldás:

Kissé más megfogalmazásban a keletkező fotonok $\mathcal{E}_{foton}$ energiája kisebb lesz, mint az átmenet energiája. A feladat állítása szerint

$$\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{foton}}{\mathcal{E}} \approx \frac{\mathcal{E}}{2\,m\,c^2}$$

Ennek igazolásához az energia és impulzusmegmaradás feltételeit kell felhasználjuk. A $\mathcal{E}$ energiájú átmenet során az energia és az impulzus megmarad, vagyis

$$p_{atom} + p_{foton} = p'_{atom} + p'_{foton} \tag{7.18}$$

$$\mathcal{E}_{atom} + \mathcal{E}_{foton} = \mathcal{E}'_{atom} + \mathcal{E}'_{foton} \tag{7.19}$$

$$\tag{7.20}$$

Maradjunk az emisszió előtt nyugalomban levő atom vonatkoztatási rendszerében. Ekkor az impulzusokra

$$\begin{aligned}
p_{atom} &= p_{foton} = 0\\
p'_{atom} &= p'_{foton}, \text{ és mivel}\\
p'_{foton} &= \frac{\mathcal{E}}{c}\\
p'_{atom} &= \frac{\mathcal{E}}{c}
\end{aligned}$$

Innentől mind klasszikus, mind relativisztikus módon megoldhatjuk a feladatot. Figyelembe véve, hogy a visszalökődő atom sebessége sokkal kisebb, mint a fénysebesség ezen a szinten elegendő a klasszikus fizikai megoldás.

Válasszuk az atom alapállapotbeli energiáját nullának! A kibocsátott foton energiája a visszalökődés miatti energiaveszteség következtében nem azonos az energiaszintek $\mathcal{E}$ távolságával. Jelöljük ezt $\mathcal{E}_{foton}$-nal! Az atom tömegét m-el jelölve, (7.18) és (7.19) -be a foton $p_{foton} = \frac{\mathcal{E}}{c}$ és az atom klasszikus fizikai $p = m\,v$ formuláit behelyettesítve

$$0 = m\,v + \frac{\mathcal{E}_{foton}}{c} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathcal{E}_{foton}}{c} = -m\,v \tag{7.21}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \mathcal{E}_{foton}, \text{ és mivel}$$

$$\frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2\,m}\cdot(m\,v)^2 = \frac{1}{2\,m}\cdot\left(\frac{\mathcal{E}_{foton}}{c}\right)^2$$

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}^2_{foton}}{2mc^2} + \mathcal{E}_{foton} \tag{7.22}$$

Azonban ebben az egyenletben a jobboldalon az ismeretlen fotonenergia szerepel. Mivel $\mathcal{E} \ll m\,c^2$, ezért $\mathcal{E}$ és $\mathcal{E}_{foton}$ csak kicsit különbözhet egymástól , vagyis

$$\delta\,\mathcal{E} \equiv \mathcal{E} \;-\; \mathcal{E}_{foton} \;\ll\; \mathcal{E}$$

$\delta\,\mathcal{E}$ bevezetésével

$$\delta\,\mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_{foton} = \frac{\mathcal{E}^2_{foton}}{2mc^2} = \frac{(\mathcal{E} - \delta\,\mathcal{E})^2}{2mc^2} \tag{7.23}$$

$$= \frac{\mathcal{E}^2}{2mc^2} - \frac{2\,\delta\,\mathcal{E}\cdot\mathcal{E}}{2mc^2} + \frac{\delta\,\mathcal{E}^2}{2mc^2} \tag{7.24}$$

$$\approx \frac{\mathcal{E}^2}{2mc^2} \tag{7.25}$$

Ez az az energia rész, ami az atom visszalökődésére fordítódik, vagyis a foton energiája ennyivel kisebb lesz. Ezért

$$\frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{foton}}{\mathcal{E}} \approx \frac{\mathcal{E}}{2\,m\,c^2} \tag{7.26}$$

Ezzel az állítást igazoltuk[1].

448-9

A csillagközi térben az atomos hidrogén éles spektrumvonala, az ún. 21 cm-es sugárzás keletkezik; a csillagászok ezt tartják legalkalmasabbnak a csillagok közötti hidrogenfelhök detektálására. A csillagközi por elmosódottá teszi a látható tartományba eső hullámhosszakat, ezért az elöbb emlitett sugárzás, amely a rádióhullámok tartományába esik, nagyon hasznos. Az elektronállapotok közötti energiaátmenetet, melytől ez a sugárzás ered, nem lehet egy meghatározott n-nel jellemezni. Az a helyzet, hogy az n = 1 alapállapotban az elektron és a proton spinje paralel vagy antiparalel lehet; a két állapot energiája kissé különböző. a) Mi a feltétele a magasabb energiájú állapotnak? b) A pontos hullámhosszérték 21,11 cm. Mi a két állapot energiakülönbsége? c) A gerjesztett állapot átlagos élettartama 10^7 év. Számitsuk ki a gerjesztett állapot energiájának bizonytalanságát.

Megoldás:

a)

Az elemi részecskék (példánkban a proton és az elektron) spinjéhez mágneses momentum is kapcsolódik a

$$\mu = Q\,g\,\frac{1}{2\,m} S \tag{7.27}$$

képlet szerint, ahol S a spin, μ a mágneses momentum nagysága, Q a részecske töltése és g az ún. g–faktor. Mivel a proton töltése pozitív az elektron töltése negatív a proton mágneses momentuma spinjével egyirányú, az elektroné azzal ellentétes. A proton mágnenses momentumához tartozó mágneses térben az elektron akkor lesz magasabb energiájú, ha a mágneses momentumok egyirányúak, vagyis a spin momentumok ellentétes irányúak.

b)

A két állapot energiakülönbsége felel meg a kibocsátott foton energiájának. Mivel $\lambda =$

[1] Szilárd testekben a képletbe helyettesítendő tömeg az atomok kölcsönhatása miatt nem feltétlen azonos a szabad atom tömegével, lehet annál nagyobb, kisebb, sőt akár végtelen is. Ezt a tömeget az atom *effektív tömeg*ének nevezzük. Ezt a Mössbauer-effektust használjuk ki pl. a meteorok és holdkőzetek analízisére a Mössbauer-spektroszkópiában.

$0,2111\,m$ az energiakülönbség

$$\Delta\,\mathcal{E} = h\,\nu = h\,\frac{c}{\lambda} = \frac{6.62607\cdot 10^{-34}\,J\,s\cdot 2.99793\cdot 10^{8}\,m/s}{0.2111\,m} = 9.40998\cdot 10^{-25}\,J$$
$$= 5.87325\cdot 10^{-6}\,eV \qquad (7.28)$$

c) Az energiabizonytalanság

$$\Delta\,\mathcal{E}\cdot\Delta\,T \geq \hbar$$
$$\Delta\,\mathcal{E} \geq \frac{\hbar}{\Delta\,T} = \frac{1.05457\cdot 10^{-34}\,J\,s}{10^{7}\cdot 365\cdot 24\cdot 3600 s} = 3.34403\cdot 10^{-49} J = 2.08718\cdot 10^{-30}\,eV \qquad (7.29)$$

44-36

Mi a valószinűsége annak, hogy az ls-állapotú hidrogén elektronját a magtól 2,50 a_o-nál nagyobb távolságra találjuk meg?

Megoldás:

Az 1s állapotbeli hullámfüggvény gömbszimmetrikus, radiális része

$$R(r) = 2\left(\frac{1}{a_o}\right)^{3/2}\cdot e^{-r/2a_o} \qquad (7.30)$$

Annak a valószínűsége, hogy az elektront a magtól r -nél nagyobb távolságra találjuk

$$\mathcal{P}(r,\Delta\,r) = \int_r^{\infty} R(r)\cdot 4\,\pi\,r^2\,dr =$$
$$= 8\,\pi\left(\frac{1}{a_o}\right)^{3/2}\int_r^{\infty} r^2\cdot e^{-r/2a_o}$$

Integráltáblázatból kinézve az integrál értékét[2]:

$$\mathcal{P}(r,\Delta\,r) = 8\,\pi\left(\frac{1}{a_o}\right)^{3/2}\left[e^{-r/2a_o}\left(-2\,a_0\,r^2 - 4\,a_o^2\,r - 8\,a_o^3\right)\right]_r^{\infty}$$
$$= 8\,\pi\left(\frac{1}{a_o}\right)^{3/2} e^{-r/2a_o}\left(2\,a_0\,r^2 + 4\,a_o^2\,r + 8\,a_o^3\right)$$

[2]Ez az integrál integráltáblázat nélkül két egymás utáni parciális integrálás alkalmazásával könnyen kiszámolható.

Behelyettesítve az $r = 2,50\, a_o = 2,50 \cdot 0,0529\, nm = 0,132\, nm$ értékeket

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(r) &= 8\,\pi\, \left(\frac{1}{a_o}\right)^{3/2} e^{-2,5/2} \left(2 \cdot 2,5 \cdot a_o^3 + 4 \cdot 2,5\, a_o^3 8 \cdot 2,5 \cdot a_o^3\right) \\
&= 8\,\pi\, a_o^{3/2}\, e^{-1,25}\, (5 + 10 + 20) = 8 \cdot 35 \cdot \pi\, a_o^{3/2}\, e^{-1,25} \\
&= 280 \cdot \pi\, a_o^{3/2}\, e^{-1,25} = 230 \cdot 3,1415 \cdot 0,0529 \cdot 10^{-9}\, e^{-1,25} \\
\mathcal{P}(r) &= 1.09513 \cdot 10^{-8}
\end{aligned}
$$