Fizika feladatok

2014. október 22.

Ez a feladatgyűjtemény a villamosmérnök hallgatók korábbi jogos igényének megfelelve, nagy hiányt pótol. A kitűzött feladatok az I. féléves fizika tárgyának anyagához illeszkednek. Remélhetőleg érzékelhető segítséget jelent mind a hallgatók, mind a tárgyat oktatók számára, valamint hozzájárul az egységes oktatás megvalósításához. A gyűjteményben a * jelzés a magasabb nehézségi szintű feladatokat jelöli, míg a **-gal jelölt feladatokat a kihívásokat kedvelő megoldóknak ajánljuk. A feladatgyűjtemény folyamatosan bővül új feladatokkal és megoldásokkal. Javaslatokat új feladatokra, valamint megoldásokat és egyéb észrevételeket szívesen látunk. (Szerk.: Márkus Ferenc, Rakyta Péter, Krafcsik Olga)

Tartalomjegyzék

1. Feladatok a kinematika tárgyköréből

Tömegpontok mozgása egyenes mentén

1.1. Feladat: Mekkora az átlagsebessége annak pontnak, amely mozgásának első szakaszában v_1 sebességgel s_1 utat, második szakaszában v_2 sebességgel s_2 utat tesz meg?

Megoldás: Az átlagsebességet az összesen megtett útmennyiség és az ehhez szükséges teljes időtartam hányadosaként kapjuk meg: $\overline{v} = \frac{\sum_i s_i}{\sum_i t_i}$. Az eltelt időtartamok: $t_1 = \frac{s_1}{v_1}$ és $t_2 = \frac{s_2}{v_2}$. Így

$$\overline{v} = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}}. \tag{1.1.1}$$

1.2. Feladat: Két mozdony s_1 távolságból, egymáshoz képest v sebességgel közeledik egymás felé az egyenes vasúti pályán. Az egyik fényjelet ad, amely a szélvédőkről visszaverődik. Mekkora utat tesz meg a fény, amíg s_2 távolságra lesznek egymástól?

Megoldás: Az eltelt idő:

$$t = \frac{s_1 - s_2}{v}, \tag{1.2.1}$$

amely idő alatt a fény

$$s = ct = c\frac{s_1 - s_2}{v} \tag{1.2.2}$$

utat tesz meg.

1.3. Feladat: Egyenes vasúti pályán egy mozdony halad v sebességgel, s közben Δt ideig dudál. Milyen hosszúnak hallja a pálya mellett álló utas a dudaszót, ha a vonat nem halad el mellette?

Megoldás: Tegyük fel, hogy a mozdony s távolságban van, amikor elkezd dudálni. A hangot

$$t_1 = \frac{s}{c} \tag{1.3.1}$$

idő elteltével hallja meg a megfigyelő. Ezt követően Δt idő múlva már csak $s - v\Delta t$ távolságban lesz a mozdony, amely ekkor befejezi a dudálást. A dudaszó vége

$$t_2 = \Delta t + \frac{s - v\Delta t}{c} \tag{1.3.2}$$

idő elteltével jut a megfigyelőhöz. A dudaszót a megfigyelő tehát

$$t_2 - t_1 = \Delta t + \frac{s - v\Delta t}{c} - \frac{s}{c} = \frac{c - v}{c}\Delta t \tag{1.3.3}$$

hosszúnak hallja. *Megjegyzés:* Távolodó mozdony esetén a dudaszó

$$t_2 - t_1 = \Delta t + \frac{s + v\Delta t}{c} - \frac{s}{c} = \frac{c + v}{c}\Delta t \tag{1.3.4}$$

időtartamúnak hallatszik.

1.4. Feladat: Egy gépkocsi 54 km/h sebességről 5 m/s^2 lassulással egyenletesen lefékez. Mekkora a teljes fékút?

Megoldás: Legyenek $v_0 = 54$ km/h $= 15$ m/s és $a = 5$ m/s^2. A sebesség az idő függvényében a

$$v(t) = v_0 - at, \tag{1.4.1}$$

összefüggéssel adható meg. Ennek segítségével a gépkocsi megállásáig eltelt idő

$$t = \frac{a}{v_0} = 3 \text{ s}. \tag{1.4.2}$$

A teljes fékút pedig

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 = 22,5 \text{ m}. \tag{1.4.3}$$

1.5. Feladat: Egy tömegpont az x tengely mentén mozog –4 m/s^2 állandó gyorsulással. Az $x = 0$ helyen a sebessége 20 m/s, az időt ekkor kezdjük el mérni. Mikor lesz a test először az $x = 18$ m helyen?

Megoldás: Legyenek $v_0 = 20$ m/s, $a = -4$ m/s^2. A tömegpont helye, mint az idő függvénye az

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \tag{1.5.1}$$

összefüggéssel adható meg. Oldjuk meg az egyenletet a t változóra az $x = 18$ m helyettesítés mellett:

$$18 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \tag{1.5.2}$$

Az egyenlet gyökei: $t_1 = 1$ s és $t_2 = 9$ s. A tömegpont először a t_1 időpillanatban éri el az $x = 18$ m helyet.

1.6. Feladat: (HN 2B-18) Egy futó a 100 m-es vágtaszámot $10,3$ s-os eredménnyel nyerte meg. Egy másik futó $10,8$ s-os idővel futott be. Feltéve, hogy az atléták az egész távon egyenletesen futottak, határozzuk meg, hogy milyen távol volt a második futó a céltól, amikor a győztes átszakította a célszalagot!

Megoldás: Az adatokat jelöljük az alábbi módon: $s = 100$ m; $t_1 = 10,3$ s; $t_2 = 10,8$ s. A másodikként célba érkező futó sebessége

$$v = \frac{s}{t_2} = 9,26 \text{ m/s} \tag{1.6.1}$$

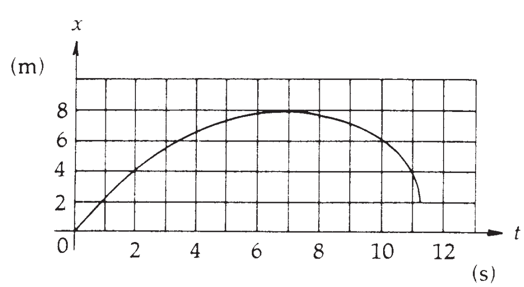
volt. Mivel a hátránya $t = t_2 - t_1 = 0,5$ s volt, így $d = vt = 4,63$ m-re volt a célvonaltól.

1.7. Feladat: (HN 2B-19) A 1. ábra egy egyenesvonalú pályán mozgó részecske út-idő grafikonját mutatja.

(a) Határozzuk meg a mozgás átlagsebességét a $t_1 = 2$ s és $t_2 = 5$ s időintervallumra!

(b) Melyik időpillanatban zérus a mozgás sebessége?

(c) Mekkora a $t = 10$ s időpontban a pillanatnyi sebessége?



Megoldás:

(a) A grafikonról leolvasható, hogy a $t_1 = 2$ s időpillanatban $x_1 = 4$ m a helykoordináta, valamint a $t_2 = 5$ s időpillanatban $x_2 = 7$ m. Az átlagsebességet a teljesen megtett út és hozzá tartozó idő hányadosaként kapjuk meg:

$$\overline{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = 1 \text{ m/s}. \tag{1.7.1}$$

(b) A mozgás sebessége ott zérus, ahol a görbéhez húzott érintő meredeksége zérus. Ez jó közelítéssel láthatóan a

$$t' = 7 \text{ s} \tag{1.7.2}$$

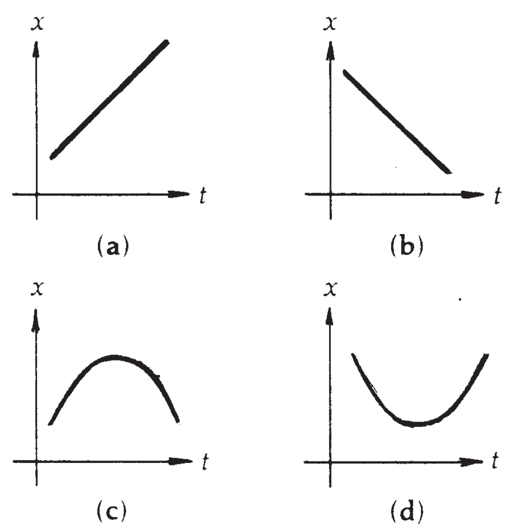
időpillanatban áll fenn.

(c) A $t = 10$ s-beli sebesség meghatározása a pontbeli érintő kiszámolását jelenti. Ez azt jelenti, hogy a ponthoz nagyon közeli értékeket kellene leolvasni. Mivel elég nagy a leolvasási pontatlanság – a megértés lényegét pedig nem érinti – az érintő meghatározását úgy végezzük el, hogy tekintjük a $t_9 = 9$ s-hoz és $t_{11} = 11$ s-hoz tartozó $x_9 = 7$ m és $x_{11} = 4$ m helykoordinátákat, és kiszámoljuk a

$$v_{10} = \frac{x_{11} - x_9}{t_{11} - t_9} \sim -2 \text{ m/s}. \tag{1.7.3}$$

meredekséget. A negatív előjel arra utal, hogy a pont az origó felé mozog. A mozgás irányának megváltozása a $t' = 7$ s időpillanatban történt.

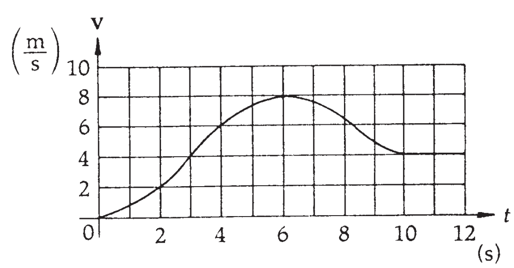
1.8. Feladat: (HN 2B-22) Az 1. ábra négy különböző mozgás hely-idő függvényábráját mutatja. Állapítsuk meg minden esetben, hogy a gyorsulás pozitív, negatív vagy zérus!



1. ábra.

Megoldás: Az 1. (a) és (b) ábráinak grafinkonjai lineáris összefüggést írnak le a megetett út és az eltelt idő között. A lineáris grafikonok egyenletes sebességű mozgást írnak le, következés képpen a mozgások alatt a gyorsulás zérus. A gyorsulás mellett a tömegpont sebességének iránya is megállapítható a grafikonok meredekségéből: az 1. (a) ábrán pozitív meredeksége van a grafikonnak, tehát a tömegpont pozitív irányba mozog és sebessége pozitív, míg az 1. (b) ábra negatív meredekségű egyenest mutat, mely negatív irányba mozgó tömegpontot ír le negatív sebességgel. Az 1. (c) ábra grafinkonja olyan mozgást ír le, mely során a tömegpont először pozitív irányba mozog, majd egy adott pillanatban visszafordul. A grafikon meredekségét elemezve az egyes t időpillanatokban megállapítható, hogy kezdetben pozitív irányba mozgott a tömegpont, majd pedig visszafordult, a debessége negatív lett. A tömegpont gyorsulása ezért negatív volt a mozgás során. Végül az 1. (d) ábra az előző meggondolások alapján egy pozitív irányba gyorsuló tömegpont mozgását írja le.

1.9. Feladat: (HN 2B-24) A 2. ábra egy egyenes úton nyugalomból induló motorkerékpáros sebesség-idő grafikonját mutatja.
(a) Mekkora a motorkerékpáros átlagos gyorsulása a $t_0 = 0$ s és $t = 6$ s időtartamban?
(b) Állapítsuk meg (közelítőleg), hogy mikor éri el a gyorsulás maximális értékét és mekkora a gyorsulás ebben a pillanatban?
(c) Mikor zérus a gyorsulás?
(d) Mikor veszi fel a gyorsulás legnagyobb negatív értékét és mekkora ez az érték?



2. ábra.

Megoldás:
(a) A $[t_0, t]$ s időintervallumban a teljes sebességváltozás $\Delta v = 8$ m/s. Az átlag gyorsulás ezért

$$a = \frac{\Delta v}{t - t_0}\ . \tag{1.9.1}$$

A számértékek behelyettesítése után $a = 1.3$ m/s^2.
(b) A legnagyobb gyorsulást akkor éri el a motorkerékpáros, amikor a sebesség-idő grafikonban legnagyobb a mindenkori érintő meredeksége. a 2. ábra alapján ez $t \approx 3$ s pillanatban következik be. Ekkor a motorkerékpáros gyorsulásának közelítő értékét az ábráról leolvasható értékek segítségével határozhatjuk meg. Az ábráról leolvasható adatok pontosságát a felrajzolt négyzetrács határozza meg. A gyorsulás meghatározásához szükséges sebességek értékét a szomszédos $t_1 = 2$ s és $t_2 = 4$ s időpillanatokban olvashatjuk le. A sebességek értékét a $t \approx 3$ s pillanatban húzott érintő segítségével határozhatjuk meg: $v_1 = 2$ m/s és $v_2 = 6$ m/s. A maximális gyorsulás tehát:

$$\overline{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}\ . \tag{1.9.2}$$

Behelyettesítés az értékeket $\overline{a} = 2$ m/s^2 adódik.
(c) Mivel a motorkerékpáros gyorsulását a sebesség-idő grafikon pontjaiban húzott érintők meredeksége jelzi, a vízszintes érintőjű pontok a zérus gyorsulású pillanatoknak felelnek meg. A 2. ábra egyetlen olyan pontja melyben az érintő vízszintes, a $t = 6$ s pillanathoz tartozik.
(d) A motorkerékpáros a legnagyobb negatív értékű gyorsulását a $t = 8$ s pillanatban éri el, mivel ebben a pillanatban a legmeredekebb a grafikon érintője. Megszerkesztve a grafikon érintőjét a (b) feladatrészhez hasonlóan megállapítható gyorsulás közelítő értéke, mely $\overline{a}_n - \approx 2$ m/s^2-nak adódik.

1.10. Feladat: (HN 2B-26) Egy gépkocsi sebessége 9 s alatt 4 m/s-ról egyenletesen 7 m/s-ra növekszik.
(a) Mekkora a kocsi gyorsulása?
(b) Ezután az autó 12 s alatt egyenletesen lassulva megáll. Mekkora a gyorsulás ezen a szakaszon?
(c) Összesen mekkora utat tett meg a 21 s alatt az autó?
(d) Mekkora az átlagsebessége?

Megoldás: Legyenek $t_1 = 9$ s, $v_1 = 4$ m/s, $v_2 = 7$ m/s és $t_2 = 12$ s.
(a) A mozgás első szakaszát leíró gyorsulás

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_1} = \frac{1}{3}\ \text{m/s}^2. \qquad (1.10.1)$$

(b) A sebesség időbeli változása

$$v(t) = v_2 + a_2 t_2, \qquad (1.10.2)$$

amellyel a megállás tényét is figyelembe véve a

$$0 = 7 + 12a_2 \qquad (1.10.3)$$

egyenlet írható fel. A második szakasz gyorsulása tehát

$$a_2 = -\frac{7}{12}\ \text{m/s}^2. \qquad (1.10.4)$$

(c) A megtett út az első szakaszra

$$x_1 = v_1 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = 39,5\ \text{m}, \qquad (1.10.5)$$

a másodikra

$$x_2 = v_2 t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = 42 \text{ m}, \tag{1.10.6}$$

így az összesen megtett út $81,5$ m.

(d) Az átlagsebesség

$$\overline{v} = \frac{x_1 + x_2}{t_1 + t_2} = 3,88 \text{ m/s}. \tag{1.10.7}$$

1.11. Feladat: (HN 2A-32) Függőlegesen felfelé hajítunk egy labdát 12 m/s sebességgel. Hol van, mekkora és milyen irányú sebességgel rendelkezik

(a) 1 s és

(b) 2 s időpontban az elhajítás után?

Megoldás: A függőleges felfelé hajításra vonatkozó sebesség-idő és hely-idő összefüggések:

$$v(t) = v_0 - gt \tag{1.11.1}$$

és

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \tag{1.11.2}$$

Behelyettesítés után:

(a) $v(1\text{ s}) = 2$ m/s felfelé (a pozitív előjel ezt mutatja); $y(1\text{ s}) = 7$ m;

(b) $v(1\text{ s}) = -8$ m/s lefelé (a negatív előjel ezt mutatja); $y(1\text{ s}) = 4$ m.

1.12. Feladat: (HN 2B-33) 50 m mély kútba követ ejtünk. Határozzuk meg, hogy mennyi idő múlva halljuk a kő csobbanását! A hang terjedési sebessége 330 m/s.

Megoldás: A h mélységű kút aljára

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{1.12.1}$$

idő alatt ér le a kő. A h utat a hang

$$t_2 = \frac{h}{c} \tag{1.12.2}$$

idő alatt teszi meg. Így összesen

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{c} = 3,31 \text{ s} \tag{1.12.3}$$

idő múlva hallható a csobbanás.

1.13. Feladat: (HN 2B-35) Feldobunk egy érmét 4 m/s sebességgel. Mennyi idő alatt ér fel 0,5 m magasra. Miért kapunk két eredményt?

Megoldás: Az emelkedés út-idő függvénye:

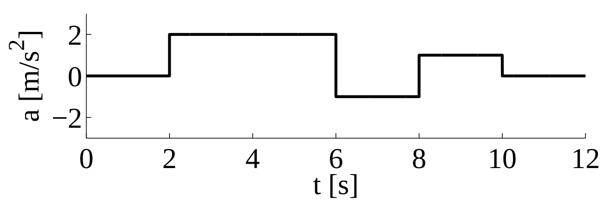
$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \tag{1.13.1}$$

Az adatokat behelyettesítve a

$$0 = 5t^2 - 4t + 0,5 \tag{1.13.2}$$

másodfokú egyenlet adódik, amelynek megoldásai a $t_1 = 0,155$ s és a $t_2 = 0,644$ s. Azért van két megoldás mert az első időpont után még tovább emelkedik, s a lefele esésnél a második időpontban ugyancsak $0,5$ m magasan lesz.

1.14. Feladat: (HN 2C-54) Egy, az origóból induló test a 3. ábra szerinti gyorsulással egyenesvonalú mozgást végez. Rajzoljuk meg a mozgás sebesség-idő és hely-idő függvényvényeket!



3. ábra.

Tüntessük fel a $t = 2,\ 6,\ 8$ és 10 s időpontokhoz tartozó sebesség és helykoordináták értékét.

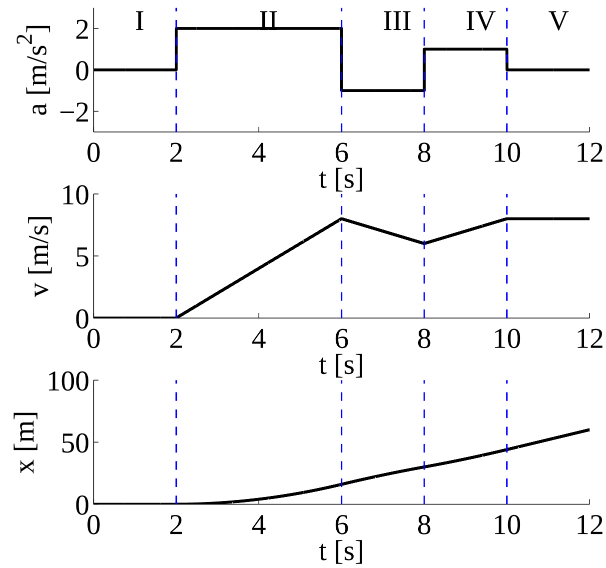
Megoldás: Egyenletesen gyorsuló mozgás esetében a gyorsulás, a sebesség és a megtett út az alábbi egyenletekkel adható meg:

$$a(t) \equiv a_0, \tag{1.14.1}$$

$$v(t) = v_0 + a_0 (t - t_0), \tag{1.14.2}$$

$$x(t) = x_0 + v_0\,(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0\,(t - t_0)^2, \tag{1.14.3}$$

ahol a_0 a gyorsulás nagysága (a pozitív iránnyal ellentétesen gyorsuló mozgás esetében negatív), t_0 a mozgás kezdeti időpontja, v_0 a kezdősebesség, x_0 pedig a tömegpont kezdeti koordinátája. A tömegpont mozgását bontsuk fel a 4. ábra alapján I,II,III,IV és V szakaszokra. Az egyes szakaszokban a v_0 kezdősebesség, x_0 koordináta és t_0 időpont az előző szakasz végpontjában



4. ábra.

felvett értékekből határozhatóak meg. (A soron következő összefüggésekben a $\{\xi\}$ jelölés a ξ fizikai mennyiség számértékét jelöli SI mértékegységekben.)

<u>I. szakasz:</u> $\boxed{0<t<2s}$. A kezdeti értékek: $a_0 = 0$ m/s^2, $v_0 = 0$ m/s, $x_0 = 0$ m, $t_0 = 0$ s.
Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig $v(t) = 0$ m/s és $x(t) = 0$ m adódik.
A $t = 2$ s pillanatban a sebesség és kitérés értékei: $v(2\text{s}) = 0$ m/s és $x(2\text{s}) = 0$ m.

<u>II. szakasz:</u> $\boxed{2s<t<6s}$. A kezdeti értékek: $a_2 = 0$ m/s^2, $v_0 = 0$ m/s, $x_0 = 0$ m, $t_0 = 2$ s.
Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig $\{v(t)\} = 2(\{t\}-2)$ és $\{x(t)\} = (\{t\}-2)^2$ adódik.
A $t = 6$ s pillanatban a sebesség és kitérés értékei: $v(6\text{s}) = 8$ m/s és $x(6\text{s}) = 16$ m.

<u>III. szakasz:</u> $\boxed{6s<t<8s}$. A kezdeti értékek: $a_0 = -1$ m/s^2, $v_0 = 8$ m/s, $x_0 = 16$ m, $t_0 = 6$ s.
Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig $\{v(t)\} = 8 - (\{t\} - 6)$ és $\{x(t)\} = 16+8(\{t\}-6)-\frac{1}{2}(\{t\}-6)^2$ adódik.
A $t = 8$ s pillanatban a sebesség és kitérés értékei: $v(8\text{s}) = 6$ m/s és $x(8\text{s}) = 30$ m.

<u>IV. szakasz:</u> $\boxed{8s<t<10s}$. A kezdeti értékek: $a_0 = 1$ m/s^2, $v_0 = 6$ m/s, $x_0 = 30$ m, $t_0 = 8$ s.
Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig $\{v(t)\} = 6 + (\{t\} - 8)$ és $\{x(t)\} = 30+6(\{t\}-8)+\frac{1}{2}(\{t\}-8)^2$ adódik.
A $t = 10$ s pillanatban a sebesség és kitérés értékei: $v(10\text{s}) = 8$ m/s és $x(10\text{s}) = 44$ m.

<u>V. szakasz:</u> $\boxed{10s<t<12s}$. A kezdeti értékek: $a_0 = 0$ m/s^2, $v_0 = 8$ m/s, $x_0 = 44$ m, $t_0 = 10$ s.
Az (1.14.2) és (1.14.3) egyenletek felhasználásával pedig $\{v(t)\} = 8$ és $\{x(t)\} = 44+8(\{t\}-10)$ adódik.

A $t = 12$ s pillanatban a sebesség és kitérés értékei: $v(12\text{s}) = 8$ m/s és $x(12\text{s}) = 60$ m.

1.15. Feladat: (HN 2C-66) Egy leejtett kődarab útjának a talajra érkezés előtti utolsó harmadát $1,0$ s alatt teszi meg. Milyen magasról esett le a kő?

Megoldás: Jelölje h az ejtés magasságát, t a teljes esési időt és $t_0 = 1$ s az utolsó harmadhoz tartozó időt. A szabadon eső tömegpont kinematikai összefüggései alapján:

$$h = \frac{1}{2}gt^2. \tag{1.15.1}$$

Az út 2/3-át pedig $t - t_0$ idő alatt teszi meg a kődarab:

$$\frac{2}{3}h = \frac{1}{2}g(t - t_0)^2. \tag{1.15.2}$$

A h változó eliminálásával t-re az alábbi másodfokú egyenlet adódik

$$0 = \frac{1}{6}gt^2 - gtt_0 + \frac{1}{2}gt_0^2. \tag{1.15.3}$$

A másodfokú egyenlet két megoldása $t_1 = 5,45$ s, valamint $t_2 = 0,55$ s. A második megoldás fizikailag nem értelmes, mivel $t_2 < t_0$. A t_1 megoldáshoz tartozó magasság:

$$h = 148,51 \text{ m}. \tag{1.15.4}$$

1.16. Feladat: * (HN 2B-40) Az x tengelyen mozgó részecske sebesség-idő függvényét a $v(t) = 4 + 2t - 3t^2$ függvény adja meg. A $t = 0$ időpillanatban a részecske az $x = 8$ m helyen van.
(a) Mi az egyes együtthatók mértékegysége?
(b) Határozzuk meg a mozgás gyorsulás-idő függvényét!
(c) Határozzuk meg a mozgás hely-idő függvényét!
(d) Mekkora a részecske legnagyobb $+x$ irányú sebessége?

Megoldás:
(a) $A = 4$ m/s, $B = 2$ m/s^2, $C = 3$ m/s^3: $v(t) = A + Bt - Ct^2$.
(b) A gyorsulás a sebesség idő szerinti deriváltja, azaz

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = B - 2Ct = 2 - 6t. \tag{1.16.1}$$

(c) A kezdeti $t = 0$ s időpillanatban a részecske koordinátája $x = 8$ m. A hely-idő függvény a sebesség idő szerinti integrálásával kapható meg a kezdeti feltételek illesztése mellett. Ezt a

$$\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t \tag{1.16.2}$$

összefüggésbol kiindulva a

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = x(t) - x_0 = \int_{t_0=0}^{t} (A + Bt - Ct^2)\mathrm{d}t \tag{1.16.3}$$

határozott integrál kiszámolásával kaphatjuk. Ennek eredménye

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0=0}^{t} (A + Bt - Ct^2)\mathrm{d}t = \left[At + \frac{1}{2}Bt^2 - \frac{1}{3}Ct^3\right]_{t_0=0}^{t}, \tag{1.16.4}$$

ahonnan a hely

$$x(t) = x_0 + At + \frac{1}{2}Bt^2 - \frac{1}{3}Ct^3 = 8 + 4t + t^2 - t^3. \tag{1.16.5}$$

(d) A sebesség akkor a legnagyobb, amikor a gyorsulás zérus. Ez a $t = 1/3$ s időpillanatban következik be. A sebesség értéke ekkor $v = 4,33$ m/s.

1.17. Feladat: * (HN 2B-41) Az x tengelyen mozgó részecske helyzetét az $x(t) = a + bt - ct^2$ függvény adja meg. Az együtthatók számértéke SI egységekben: $\{a\} = 2$, $\{b\} = 3$, $\{c\} = 4$,
(a) Adjuk meg az egyes együtthatók dimenzióját!
(b) Határozzuk meg a sebesség-idő függvényt!
(c) Határozzuk meg a gyorsulás-idő függvényt!
(d) Határozzuk meg a részecske maximális x irányú elmozdulását és az ehhez tartozó időpontot is!

Megoldás:
(a) Az egyes együtthatók dimenziója: $[a]$ =m; $[b]$ =m/s; $[c]$ =m/s^2
(b) A sebességet a hely idő szerinti deriváltjaként határozhatjuk meg:

$$\{v(t)\} = \frac{\mathrm{d}\{x\}}{\mathrm{d}t} = 3 - 8t. \tag{1.17.1}$$

(c) A gyorsulás pedig a sebesség idő szerinti deriváltjával egyenlő:

$$\{a(t)\} = \frac{\mathrm{d}\{v\}}{\mathrm{d}t} = -8. \tag{1.17.2}$$

(d) A maximális elmozdulás pillanatában a test sebessége zérus ($\{v(t)\} = 0$, ami a

$$t = \frac{3}{8}\ \mathrm{s}, \tag{1.17.3}$$

pillanatban következik be. A maximális elmozdulás pedig

$$x = \frac{51}{16}\ \mathrm{m}. \tag{1.17.4}$$

Tömegpontok síkbeli mozgása

1.18. Feladat: * Jelölje egy folyó partját az x tengely. A víz a parttal párhuzamosan folyik, az x irányú sebesség a parttól való távolság függvénye, amely a $v_x(y) = ky$ lineáris összefüggéssel adható meg, ahol $0 < k$, y pedig a parttól mért távolság. (A túloldali part sokkal távolabb van, mint a távolság, melyen a sodrási sebességet leíró lineáris összefüggés érvényes.) A parton lévő úszó a parttól d távolságra lévő stéghez szeretne úszni.
(a) Mekkora távolsággal előbb kell a vízbe mennie, ha a folyásirányra merőlegesen állandó u sebességgel fog úszni?
(b) Milyen a lesz a pályagörbe alakja?

Megoldás:
(a) Az úszó a parttól az idő függvényében

$$y(t) = ut \tag{1.18.1}$$

távolságra jut. Közben az x irányú sebessége is folyamatosan változik a

$$v_x(t) = ky = kut \tag{1.18.2}$$

összefüggésnek megfelelően. A mozgás x irányú vetülete lényegében egy állandó gyorsulású mozgással azonosítható, ahol a gyorsulás $a_x = ku$:

$$x = \frac{1}{2} a_x t_s^2. \tag{1.18.3}$$

A sodródás ideje

$$t_s = \frac{d}{u}, \tag{1.18.4}$$

így meghatározható az a távolság is, amellyel az úszónak előrébb kell a vízbe mennie:

$$x = \frac{1}{2} a_x t_s^2 = \frac{1}{2} kut_s^2 = \frac{1}{2} \frac{kd^2}{u}. \tag{1.18.5}$$

(b) A pályagörbe meghatározásához válasszunk olyan koordinátarendszert, hogy a stég a

$$\left[\frac{1}{2}\frac{kd^2}{u};d\right] \tag{1.18.6}$$

koordinátájú pontban legyen. Ekkor az origóból indulva éppen ehhez a ponthoz jut. Az (1.18.1) és (1.18.1) egyenletekből küszöböljük ki a t változót. Ekkor a pályagörbére az

$$y(x)^2 - \frac{2ux}{k} = 0 \tag{1.18.7}$$

összefüggést kapjuk, ami egy parabola egyenlete.

1.19. Feladat: Egy repülőgép 360 km/h sebességgel vízszintesen repül. A repülőgépből egy-egy pisztollyal felfelé és lefelé lőnek azonos pontból. Milyen messze van egymástól a két lövedék $t = 0,8$ s múlva? Mindegyik lövedék kezdeti sebessége a repülőgéphez képest $v_0 = 160$ m/s. (A közegellenállás elhanyagolható.)

Megoldás: Vízszintesen mindkét lövedék 360 km/h sebességgel halad, így ez nem befolyásolja a kettejük távolságát. A függőleges irányban mindkettőnek $-g$ gyorsulása van, az egyiknek $+v_0$, a másiknak $-v_0$ a kezdősebessége. Mivel mindkét lövedék ugyanazzal a gyorsulással esik, a távolodásukat a kezdősebességük határozzák meg. A két lövedék közötti távolság tehát

$$d = \left(v_0t - \frac{1}{2}gt^2\right) - \left(-v_0t - \frac{1}{2}gt^2\right) = 2v_0t = 256 \text{ m}. \tag{1.19.1}$$

1.20. Feladat: (HN: 3B-21) Egy 25 m magas hídról vízszintes irányban hajítunk el egy követ. A kő becsapódási helyét 45°-os irányban látjuk.
(a) Mekkora sebességgel hajítottuk el a követ?
(b) Mekkora és milyen irányú sebességgel csapódott a kő a vízbe?

Megoldás:
(a) A feladat feltétele szerint a kő becsapódási helyét a vízszinteshez képest lefelé 45°-os szög alatt látjuk. Ennek alapján a kő ugyanakkora távolságot tett meg vízszintesen mint függőleges irányban. Helyezzük a koordináta-rendszer kezdőpontját az eldobás pontjába. Ekkor becsapódás koordinátái: $[x_0, H] = [25; -25]$ m. A v_0 sebességgel elhajított kő mozgását leíró kinematikai egyenletek pedig

$$x(t) = v_0t \tag{1.20.1}$$

és

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2. \tag{1.20.2}$$

A becsapódás pillanatában:

$$x_0 = v_0 t \tag{1.20.3}$$

és

$$H = -\frac{1}{2}gt^2. \tag{1.20.4}$$

Az két egyenletből a hajítás idejére $t = 2,24$ s, az eldobás sebességére pedig $v_0 = 11,18$ m/s adódik.

(b) Az eldobott kő mindenkori sebességének komponensei

$$v_x(t) = v_0 \tag{1.20.5}$$

és

$$v_y(t) = -gt. \tag{1.20.6}$$

A $t = 2,2$ s repülési időt behelyettesítve a sebesség vektora $\mathbf{v} = [11,18;\ 22,36]$ m/s-nak adódik. A becsapódás α szöge a sebességkomponensek segítségével meghatározható a

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_y}{v_x} = 2 \tag{1.20.7}$$

egyenlet segítségével, amiből $\alpha = 63,44^\circ$ adódik.

1.21. Feladat: Egy $h = 35$m magas torony tetejéről, a vízszinteshez képest $\alpha = 25^0$-os szög alatt ferdén felfelé egy labdát hajítunk el $v_0 = 80$ m/s kezdősebességgel.

(a) Határozzuk meg a földetérésig eltelt időt!

(b) Határozzuk meg a labda földetérési helyének távolságát a toronytól!

(c) Határozzuk meg a labda becsapódási sebességének nagyságát és irányát!

Megoldás:

(a) Helyezzük a koordináta-rendszer kezdőpontját a torony lábához. A labda x és y koordinátái az idő függvényében ekkor az

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha \tag{1.21.1}$$

és

$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 + h \tag{1.21.2}$$

összefüggésekkel adhatóak meg. A repülés teljes ideje a

$$0 = v_0 t_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt_0^2 + h \tag{1.21.3}$$

egyenletből határozható meg. A másodfokú egyenlet fizikailag értelmes megoldása

$$t_0 = 7,67\,\mathrm{s}. \tag{1.21.4}$$

(b) A repülési időt behelyettesítve az (1.21.1) egyenletbe megkapjuk a becsapódás távolságát, ami

$$d = x(t_0) = v_0 t_0 \cos\alpha. \tag{1.21.5}$$

Behelyettesítve az értékeket $d \approx 556,1$ m adódik.
(c) A becsapódás pillanatában sebességvektor komponensei

$$v_x(t_0) = v_0 \cos\alpha \approx 72,5\,\mathrm{m/s} \tag{1.21.6}$$

és

$$v_y(t_0) = v_0 \sin\alpha - g t_0 \approx -42,9\,\mathrm{m/s}. \tag{1.21.7}$$

A sebesség nagysága pedig az egyes komponensek segítségével számolható ki a $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ összefüggéssel. Behelyettesítve a számadatokat $v \approx 84,2$ m/s adódik. A becsapapódás szöge pedig

$$\beta = \mathrm{arctg}\frac{v_y}{v_x} = -30,61^0. \tag{1.21.8}$$

1.22. Feladat: A talajról a vízszintessel $\alpha = 30°$-os szöget bezáró szögben $v_0 = 50$ m/s nagyságú kezdősebességgel kilövünk egy lövedéket. A lövedék a szemközt lévő függőleges falba csapódik. Milyen magasan van a becsapódás helye, ha a fal $d = 80$ m távolságra van a kilövés helyétől?

Megoldás: A kinematikai alapösszefüggéseket alkalmazva a sebesség vízszintes és függőleges komponensei a

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha, \tag{1.22.1}$$

és

$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - g t. \tag{1.22.2}$$

összefüggésekkel adhatóak meg. Helyezzük koordináta-rendszer kezdőpontját a kilövés pontjába. Ekkor a lövedék koordinátái az idő függvényében

$$x(t) = v_0 \cos\alpha t \tag{1.22.3}$$

és

$$y(t) = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2} g t^2. \tag{1.22.4}$$

A lövedék repülésének időtartama a

$$d = x(t_0) = v_0 t_0 \cos\alpha, \tag{1.22.5}$$

egyenlettel határozható meg. Az emelkedési magasság pedig

$$h = y(t_0) = v_0 t_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_0^2. \tag{1.22.6}$$

Az (1.22.5) egyenletből a

$$t = \frac{d}{v_0 \cos\alpha} \tag{1.22.7}$$

repülési időt kifejezve és behelyettesítve az (1.22.6) egyenletbe $h \approx 29,14$ m emelkedési magasság adódik.

1.23. Feladat: (HN: 3C-29) A kinematikai egyenletekből kiindulva határozzuk meg egy a vízszintes síkhoz képest θ szög alatt, v_0 kezdősebességgel kilőtt lövedék röppályájának egyenletét és az R lőtávolságot!

Megoldás: Az elhajított test gyorsulásvektora $\mathbf{a} = (0;\ -g)$, a $t = 0$ kezdőpillanathoz tartozó sebesség vektora pedig $\mathbf{v_0} = (v_0 \cos\theta;\ v_0 \sin\theta)$. A kinematikai alapösszefüggéseket alkalmazva a sebesség vízszintes komponense

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta, \tag{1.23.1}$$

míg a függőleges komponense

$$v_y(t) = v_0 \sin\theta - gt. \tag{1.23.2}$$

A koordináta-rendszer kezdőpontját a hajítás pontjába választva, az eldobott test $\mathbf{r}(t) = (x(t);\ y(t))$ helyvektorának komponensei

$$x(t) = v_0 t \cos\theta, \tag{1.23.3}$$

és

$$y(t) = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2. \tag{1.23.4}$$

A pálya általános egyenletét megkapjuk, ha a fenti két egyenletből (melyeket a röppálya paraméteres egyenleteinek is nevezhetünk) kiküszöböljük a t paramétert. Ekkor a röppálya általános egyenlete:

$$y(x) = x \operatorname{tg}\theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}. \tag{1.23.5}$$

Az 1.23.5 egy száraival lefelé álló parabolát ír le, amely átmegy az origón. A lőtávolságnak megfelelő $x = R$ koordinátában az y emelkedési magasság zérus, vagyis a lőtávolságot az $y(x = R) = 0$ egyenlet megoldásával kaphatjuk meg:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta. \tag{1.23.6}$$

1.24. Feladat: (HN: 3C-30) A ferde hajítás röppálya egyenletének differenciálásával mutassuk meg, hogy a maximális lőtávolságot $\theta = 45°$ kilövési szög esetén érjük el!

Megoldás: A hajítási távolság mint a θ kilövési szög függvénye az (1.23.6) egyenlettel adott. A függvénynek szélsőértéke van, ha az elsőrendű derivált nulla, azaz

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\theta} = 0. \tag{1.24.1}$$

A differenciálás muveletét elvégezve:

$$0 = 2\frac{v_0^2}{g}\cos 2\theta. \tag{1.24.2}$$

Az egyenletet megoldva, a hajítási szögre $\theta = 45°$ adódik. Egy függvény szélsőértéke azonban a lokális maximum mellett jelenthet lokális minimumot is. Ahhoz, hogy biztosan állíthassuk, hogy egy függvény szélsőértéke lokális maximumnak felel meg, meg kell vizsgálnunk a függvény másodrendű deriváltját is a kérdéses pontban.

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\theta^2} = -4\frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta. \tag{1.24.3}$$

A másodrendű derivált a $\theta = 45°$ helyettesítési értékben negatív, ezért a talált szélsőérték valóban egy lokális (esetünkben globális) maximumot találtunk.

1.25. Feladat: (HN: 3C-32) Határozzuk meg, hogy milyen θ kilövési szög esetén lesz egy lövedék D lőtávolsága egyenlő a H emelkedési magassággal?

Megoldás: A lövedék $y(x)$ röppályája az (1.23.5) agyenlettel adható meg, a hajítás távolságát pedig az (1.23.6) egyenlettel adtuk meg egy korábbi feladatban. Az emelkedés H magasságát a $H = y(\frac{D}{2})$ összefüggés adja meg, azaz

$$H = \frac{D}{2}\operatorname{tg}\theta - \frac{1}{2}g\frac{D^2}{4v_0^2\cos^2\theta}. \tag{1.25.1}$$

A feladat szövegének megfelelően a $D = H$ feltételből a

$$\cos\theta = \frac{1}{4}\sin\theta \tag{1.25.2}$$

trigonometriai egyenlet adódik. Ennek fizikailag értelmes megoldása:

$$\theta = 76°. \tag{1.25.3}$$

1.26. Feladat: (HN: 3C-38) Egy szöcske vízszintes irányban legfeljebb $R_{max} = 1$ m távolságra tud elugrani. Feltételezve, hogy az elugráshoz szükséges idő elhanyagolható, határozzuk meg, hogy vízszintes úton mekkora sebességgel halad a szöcske, ha mindig a maximális távolságba ugrik!

Megoldás: A vízszintes hajítás R távolságát egy korábbi feladatban az (1.23.6) egyenlettel adtuk meg. A hajítási távolság a maximális értékét (a röppálya szimmetria-tulajdonságai miatt) a $\theta = 45°$ hajítási szög mellett veszi fel:

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}. \tag{1.26.1}$$

Ebből az ugrás sebessége

$$v_0 = \sqrt{R_{max} g}. \tag{1.26.2}$$

A szöcske vízszintes haladási sebességét a v_0 sebesség vízszintes komponense asja meg. Mivel a hajítási szög $\theta = 45°$, így

$$v_x = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{R_{max} g}{2}} \tag{1.26.3}$$

adódik.

1.27. Feladat: (HN 3C-39) Egy lövedéket θ kilövési szöggel lövünk ki. Határozzuk meg, hogy a lövedék röppályájának tetőpontja mekkora φ szög alatt látszik a kilövési pontból!

Megoldás: A korábbi feladatok megoldásaiból tekintsük a hajítási röppálya (1.23.5 egyenletét és az (1.23.6) egyenlettel adott hajítási távolságot. A pálya szimmetria-tulajdonságai miatt a röppálya tetőpontjának x koordinátája

$$x = \frac{D}{2} = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\theta. \tag{1.27.1}$$

Az ehhez tartozó $y = H$ emelkedési magasság pedig

$$H = y\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \sin^2\theta. \tag{1.27.2}$$

Az (1.27.1) és (1.27.2) egyenletek segítségével

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\theta \tag{1.27.3}$$

adódik a keresett szögre.

1.28. Feladat: ** A falhoz támasztott L hosszúságú létra földdel érintkező P pontját v_0 állandó sebességgel mozgatjuk az x tengely mentés, pozitív irányban. Az xy sík merőleges a falra, az x koordináta pedig a faltól mért távolságot méri. A P pont a $t=0$ időpillanatban legyen az x_0 koordinátájú helyen.

(a) Adjuk meg a létra felső A pontjának sebességét és

(b) gyorsulását az idő függvényében!

Megoldás:

(a) Az alsó pont helye az idő függvényében: $x_P(t)=v_0t+x_0$. Ha az A pont nem válik el a faltól, az A pont $y_A(t)$ koordinátája és a P pont vízszintes $x_P(t)$ koordinátája között az alábbi összefüggés érvényes:

$$x_P^2(t)+y_A^2(t)=L^2, \tag{1.28.1}$$

ahonnan $y_A(t)=\sqrt{L^2-x_P^2(t)}$ adja meg a legfelső pont talajtól mért távolságát. Az A pont sebességét az (1.28.1) egyenletet idő szerinti deriválásával kaphatjuk meg:

$$x_P(t)\dot{x_P}(t)+y_A(t)\dot{y_A}(t)=0 \tag{1.28.2}$$

Az egyenletben az A pont sebessége $v_A(t)=\dot{y_A}(t)$ a P pont sebessége pedig $v_P(t)=\dot{x_P}(t)\equiv v_0$. A felső pont sebessége tehát

$$v_A(t)=\dot{y_A}(t)=-\frac{x_P(t)\dot{x_P}(t)}{y_A(t)}=-\frac{(v_0t+x_0)v_0}{\sqrt{L^2-(v_0t+x_0)^2}}. \tag{1.28.3}$$

Megjegyzés: Az $y(t)=\sqrt{L^2-x^2(t)}$ függvény explicit idő szerinti deriválásával hasonlóan a fenti végeredményhez juthatunk.

(b) Az A pont gyorsulását az

$$a_P(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_y(t)=-\frac{v_0^2\sqrt{L^2-(v_0t+x_0)^2}+\frac{(v_0t+x_0)^2v_0^2}{\sqrt{L^2-(v_0t+x_0)^2}}}{L^2-(v_0t+x_0)^2} \tag{1.28.4}$$

összefüggéssel számolhatjuk ki.

1.29. Feladat: ** Egy kétágú létra egyik szárának alsó pontját (az origóban) rögzítjük, a másik szár alsó pontját pedig állandó v_0 sebességgel vízszintesen mozgatjuk az x tengely mentén, pozití irányba. Ennek következtében a létra szétnyílik. A mozgó alsó P pont a $t=0$ időpillanatban legyen az x_0 koordinátájú helyen. Mekkora a létra felső A pontjának $\mathbf{v_A}$ sebessége az idő függvényében? A létra szárai L hosszúságúak.

Megoldás: A P pont x koordinátája az idő függvényében: $x_P(t) = v_0 t + x_0$. A létra szimmetria-tulajdonságai miatt az A pont mozgásának x irányú vetülete $v_0/2$ sebességű mozgással írható le:

$$x_A(t) = \frac{1}{2}(v_0 t + x_0). \tag{1.29.1}$$

MIvel a létra baloldali szára nem nyúlik meg:

$$x_A^2(t) + y_A^2(t) = L^2 \tag{1.29.2}$$

ahol $y(t) = \sqrt{L^2 - x_f^2(t)}$ a felső pont talajtól való távolsága. Az (1.29.2) egyenletet idő szerint deriválva kapjuk a

$$x_A(t)\dot{x_A}(t) + y_A(t)\dot{y_A}(t) = 0 \tag{1.29.3}$$

egyenletet, ahol az A pont x irányú sebessége $v_x(t) = \dot{x_A}(t) = v_0/2$, valamint az y irányú sebessége

$$v_y(t) = \dot{y_A}(t) = -\frac{x_A(t)\dot{x_A}(t)}{y_A(t)} = -\frac{\frac{1}{4}(v_0 t + x_0)v_0}{\sqrt{L^2 - \frac{1}{4}(v_0 t + x_0)^2}}. \tag{1.29.4}$$

1.30. Feladat: ** Egy $2l$ szélességű folyó az x tengely mentén helyezkedik el úgy, hogy az x tengely a folyó gometriai középvonala. A folyó sebességprofilja a partvonalra merőleges y koordináta függvényében

$$V(y) = v_0\left(1 - \frac{y^2}{l^2}\right). \tag{1.30.1}$$

Az koordiná-rendszer origójából (a folyó közepéről) a partra merőleges irányban, állandó u sebességgel kezd el úszni egy ember.

(a) Mekkora távolsággal sodródik le az úszó a folyó mentén?

(b) Milyen az úszó mozgásának pályagörbéje?

Megoldás:

(a) Az úszó y koordinátája az idő függvényében

$$y = ut, \tag{1.30.2}$$

így az x tengely irányú sebesség az idő függvényében

$$v_x(t) = V(y(t)) = v_0\left(1 - \frac{u^2 t^2}{l^2}\right) \tag{1.30.3}$$

összefüggéssel adható meg. A part eléréséhez $t_0 = l/u$ idő szükséges. Az x tengely irányú d elmozdulás az x irányú sebességkomponens integrálásával kapjuk meg:

$$x(t) = \int_0^t v_x(t')\,\mathrm{d}t' = \int_0^t v_0\left(1 - \frac{u^2 t'^2}{l^2}\right)\mathrm{d}t' = \left[v_0 t - \frac{1}{3}v_0\frac{u^2 t'^3}{l^2}\right]_0^t = v_0 t' - \frac{1}{3}v_0\frac{u^2 t'^3}{l^2}. \tag{1.30.4}$$

A partra úszás alatt az úszó $d = x(t_0)$ távolsággal sodródik le a folyó mentén. Rövid számolással

$$d = \frac{2}{3}\frac{lv_0}{u} \tag{1.30.5}$$

adódik.

(b) Az úszó pályájának paraméteres egyenletét az (1.30.2) és (1.30.4) egyenletek adják meg. A pályagörbe általános egyenletét a t paraméter kiküszöbölésével határozhatjuk meg.

$$x(y) = v_0\frac{y}{u} - \frac{1}{3}v_0\frac{y^3}{ul^2} \tag{1.30.6}$$

* *Megjegyzés:* Általános esetben egy görbe egyenlete $f(x,y) = 0$ implicit formában adható meg.

1.31. Feladat: Egy kocsi vízszintes pályán $v = 30$ m/s állandó sebességgel egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. A mozgó kocsiról egy lövedéket lőnek ki úgy, hogy miután a kocsi $s = 80$ m-t megtett, a lövedék visszaesik a kocsira.

(a) Mennyi a repülési idő?

(b) A kocsihoz képest mekkora relatív sebességgel és a vízszinteshez képest mekkora szög alatt kellett a lövedéket kilőni?

Megoldás:

(a) A lövedék repülési ideje

$$t_0 = \frac{s}{v}. \tag{1.31.1}$$

Behelyettesítve a számadatokat $t_0 \approx 2,67$ s adódik.

(b) A lövedéknek a kocsihoz képest csak függőleges irányú sebessége lehetett. Mivel t_0 idő múltán ismét a kocsira esett vissza a lövedék, t_0 idő elteltével a lövedék y koordinátája nulla lesz:

$$y(t_0) = 0 = v_y t_0 - \frac{1}{2}gt_0^2. \tag{1.31.2}$$

Ebből a lövedék sebességének függőleges komponense:

$$v_y = \frac{1}{2}gt. \tag{1.31.3}$$

adódik. Behelyettesítve a számadatokat $v_y = 13,3$ m/s adódik.

1.32. Feladat: Egy lövedéket $v = 330$ m/s vízszintes irányú kezdősebességgel egy $h = 80$ m magas szikla tetejéről lőnek ki.

(a) Mennyi ideig tart, amíg a lövedék a Föld felszínére érkezik?

(b) A szikla aljától mekkora távolságban érkezik a Földre?

(c) Mekkora és milyen irányú sebességgel csapódik a talajba?

Megoldás:

(a) A lövedék függőleges irányban egyenletesen gyorsuló mozgást végez. A repülés ideje

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{1.32.1}$$

Behelyettesítve a számadatokat $t_0 \approx 4$ s adódik.

(b) A lövedék a szikla aljától

$$x = vt_0 \tag{1.32.2}$$

távolságban érkezik a Földre. Behelyettesítve a számadatokat $x \approx 132$ m adódik.

(c) A becsapódás pillanatában a sebességkomponensek $v_x = 330$ m/s, valamint $v_y = gt_0 = 40$ m/s. Így a sebesség nagysága

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \approx 332,4\,\mathrm{m/s}, \tag{1.32.3}$$

míg a becsapódás szöge

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{v_y}{v_x} \approx 6,9^0. \tag{1.32.4}$$

2. Feladatok körmozgás tárgyköréből

Kerületi sebesség

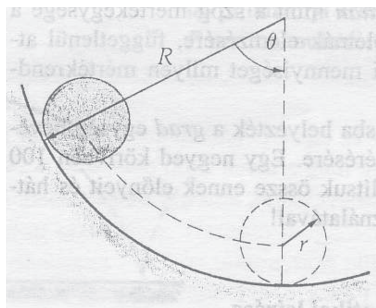
2.1. Feladat: (HN 11C-14) Egy kerék a vízszintes talajon csúszás nélkül $v = 6$ m/s sebességgel gördül. Határozzuk meg a kerületén lévő részecske talajhoz viszonyított pillanatnyi sebességét, mikor a részcske a kerék elülső pontjában van!

Megoldás: A haladó mozgásból eredően a kerék minden egyes pontja rendelkezik $v_x = 6$ m/s vízszintes irányú haladómozgással. Ugyanakkor a kerületi pontok ugyancsak $v_k = 6$ m/s sebességgel mozognak a kerék középpontja körül. Az elülső pont kerületi sebességének iránya lefelé mutat, azaz $v_y = -6$ m/s. A részecske pillanatnyi sebességvektora tehát

$$\mathbf{v} = (v_x; v_y) = (6; -6)\,\mathrm{m/s}. \tag{2.1.1}$$

Megjegyzés: A tiszta gördülés feltétele, hogy a kerék legalsó pontja ne mozogjon a talajhoz képest. A legalsó pont kerületi sebessége épp ellentétes irányú, de azonos nagyságú, mint a kerék haladó mozgásából származó sebessége. A két mozgás „összegének” eredménye, hogy a kerék legalsó pontjának sebessége zérus a talajhoz képest.

2.2. Feladat: (HN 11C-15) Egy r sugarú henger csúszás nélkül gördül egy függőleges síkban lévő R sugarú körpályáján az 5. ábra szerint. Mutassuk meg, hogy a henger saját tengelye körüli δ elfordulási szöge és a henger tengelyének θ szögelmozdulása között fennáll, hogy $\delta = (R-r)\theta/r$!



5. ábra.

Megoldás: Az r sugarú henger középponja által súrolt s ív hosszúságát kétféle módon határozhatjuk meg. Egyrészt a θ szöget felhasználva

$$s = (R-r)\theta, \tag{2.2.1}$$

adódik, másrészt a δ szög- segítségével

$$s = r\delta. \tag{2.2.2}$$

A két egyenletből

$$\delta = \frac{(R-r)\theta}{r}, \tag{2.2.3}$$

adódik, ami éppen a feladat állítása.

Szöggyorsulás

2.3. Feladat: Egy $R = 30$ cm sugarú kerékre szíjat csévéltünk. Míg a kerék $f = 2{,}0$ 1/s-os fordulatszámról egyenletesen lassulva leáll, $s = 25$ m szíj tekeredik le róla.

(a) A folyamat alatt hány fordulatot tesz mega kerék?

(b) Mekkora a kerék szöggyorsulása?

Megoldás: Legyen a kezdeti szögsebesség $\omega_0 = 2\pi f \approx 12,56$ rad/s.

(a) A fordulatok N száma az

$$N = \frac{s}{2R\pi} \tag{2.3.1}$$

összefüggéssel határozható meg. Behelyettesítve a számadatokat $N \approx 13,26$ adódik.

(b) Az N fordulat megtétele alatt a kerék

$$\varphi_0 = 41,67\,\text{rad} \tag{2.3.2}$$

szöget fordul el. A forgásra vonatkozó kinematikai egyenletek segítségével felírhatjuk a mindenkori

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t, \tag{2.3.3}$$

szögsebességet és az elfordulás

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \tag{2.3.4}$$

szögét. A megállás pillanatában $\omega(t) = 0$, ekkor $\varphi(t_0) = \varphi_0$ rad. A

$$0 = \omega_0 + \beta t \tag{2.3.5}$$

és a

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2 \tag{2.3.6}$$

egyenletrendszert megoldva a β és t ismeretlenekre, megkaphatjuk a szöggyorsulás értékét:

$$\beta = -\frac{1}{2}\frac{\omega_0^2}{\varphi} \approx -1,89\,\text{rad/s}^2. \tag{2.3.7}$$

2.4. Feladat: Egy autó egyenletesen gyorsulva álló helyzetből 15 m/s-os sebességre tesz szert 20 s alatt.

(a) Mekkora a kerék szöggyorsulásam, ha egy kerekének sugara $1/3$ m és tisztán gördül a gyorsulás alatt?

(b) Hány fordulatot tett meg a kerék a folyamat alatt?

Megoldás:

(a) Az autó gyorsulása

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0,75\,\text{m/s}^2. \tag{2.4.1}$$

Mivel $a = R\beta$ (a kerék tisztán gördül), a szöggyorsulás értéke

$$\beta = 2,25\,\text{rad/s}^2. \tag{2.4.2}$$

(b) A szögelfordulás nagysága pedig

$$\varphi = \frac{1}{2}\beta t^2 = 450 \text{ rad}, \tag{2.4.3}$$

amelyből a megett fordulatok száma

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = 71,6. \tag{2.4.4}$$

Centripetális és tangenciális gyorsulások

2.5. Feladat: (HN: 4C-25) Egy versenyautó $v_0 = 210$ km/h sebességgel mozog a $s = 2$ km kerületű körpályán, majd egy teljes kört megtéve egyenletesen lassítva megáll.
(a) Mekkora az autó tangenciális gyorsulása?
(b) Mekkora a cenctripetális gyorsulás $d = 1$ km-rel a megállás előtt?
(c) Mekkora ebben a pillanatban az eredő gyorsulás?

Megoldás:
(a) Az egyenletes kerületi (a_t tangenciális) gyorsulás hatására a versenyautó

$$t_0 = \frac{v_0}{|a_t|} \tag{2.5.1}$$

idő alatt áll meg. Ez alatt az idő alatt a versenyautó

$$s = v_0 t_0 - \frac{1}{2}|a_t| t_0^2 = \frac{v_0^2}{2|a_t|}, \tag{2.5.2}$$

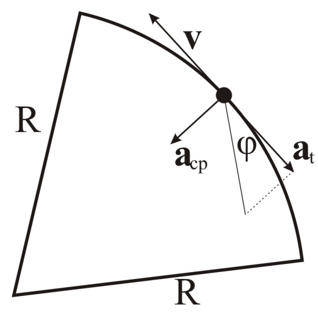
utat tesz meg. A mozgás során az autó gyorsulása ezért:

$$|a_t| = \frac{v_0^2}{2s} \approx 0,85 \text{m/s}^2. \tag{2.5.3}$$

Mivel az autó sebessége 0-ra csökken a mozgás során, a megszokott konvenciókkal $a_t \approx -0,85$ m/s^2.
(b) Abban a pillanatban, amikor az autónak még d távolságot kell megtennie a megállásig, a hátralévő út megtételéhez még további

$$t_0 = \sqrt{\frac{2d}{|a_t|}} \tag{2.5.4}$$

idő szükséges. A megálláshoz szükséges időt úgy kaphatjuk meg a legegyszerűbb módon, ha a lassulás folyamatát időben visszafelé tekintjük. Ekkor egy álló helyzetből, $-a_t$ gyorsulással



6. ábra.

mozgó autó mozgását követjük nyomon. A d távolság megtételéig éppen t_0 idő szükséges. A versenayutó sebességét is hasonló gondolatmenettel számolhatjuk ki ebben a pillanatban:

$$v = |a_t|t_0 \approx 41,3 \text{ m/s}. \tag{2.5.5}$$

Ebben a pillanatban a centripetális gyorsulás

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \frac{2\pi v^2}{d} \approx 5,36 \text{m/s}^2. \tag{2.5.6}$$

(c) Az eredő gyorsulás pedig

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} \approx 5,43 \text{m/s}^2. \tag{2.5.7}$$

2.6. Feladat: (HN: 4C-26) Egy $R = 300$ m-es állandó görbületi sugarú úton haladó autó $a_t = -1,2$ m/s^2 gyorsulással fékezni kezd. Határozzuk meg az autó gyorsulásának irányát és nagyságát abban az időpontban, amikor sebessége $v = 15$ m/s. Készítsünk vázlatot a gyorsulásvektor irányának jelzésére!

Megoldás: A kör középpontja felé mutató centripetális gyorsulás

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} \approx 0,75 \text{ m/s}^2. \tag{2.6.1}$$

Az autó a_t gyorsulása a tangenciális gyorsulás, iránya pedig a v sebességgel ellentétes. A tangenciális és centripetális gyorsulás egymásra merőlegesek. Az eredő gyorsulás érintő irányával bezárt φ szögére érvényes (lásd a 6. ábrát), hogy

$$\text{tg}\,\varphi = \left|\frac{a_t}{a_{cp}}\right| = 1,6. \tag{2.6.2}$$

Így az eredő gyorsulás $\varphi = 58^0$ szöget zár be az érintővel, nagysága pedig $|a| = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2} \approx 2$ m/s^2.

2.7. Feladat: (HN: 4C-27) A fonálra kötött labdát $R = 0,3$ m sugarú, a talaj felett $h = 1,2$ m magasban levő, vízszintes síkú körpályán állandó sebességgel pörgetünk. A fonal hirtelen elszakad és a labda attól a ponttól $s = 2$ m távolságban ér talajt, amelyet úgy kapunk, hogy az elszakadás pillantában elfoglalt helyzetét függolegesen a talajra vetítjük. Mekkora volt a labda centripetális gyorsulása, amíg körmozgást végzett?

Megoldás: A kötél elszakadásának pillanátában a labda vízszintes irányú sebessége $v = R\omega$, ahol ω a körmozgás körfrekvenciája. A fonál elszakadása után a labda s m utat tesz meg

$$t_0 = \frac{s}{R\omega} \tag{2.7.1}$$

idő alatt. Másrészt a labda függőleges irányban h m magasságból szabadon esik, ezért

$$h = \frac{1}{2}gt_0^2 = \frac{gs^2}{2\omega^2 R^2}. \tag{2.7.2}$$

A fonál elszakadásáig körmozgás körfrekvenciája tehát

$$\omega = \sqrt{\frac{gs^2}{2hR^2}} \tag{2.7.3}$$

volt. Ebből a centripetális gyorsulás könnyen meghatározható:

$$a_{cp} = R\omega^2 = \frac{gs^2}{2hR} \approx 55,6\,\mathrm{m/s^2}. \tag{2.7.4}$$

2.8. Feladat: (HN 4C-28) Egy lövedéket a vízszintes síkhoz képest θ szög alatt v_0 sebességgel lövünk ki. Fejezzük ki a röppálya tetőpontjához tartozó R görbületi sugarat a v_0, θ és g függvényében!

Megoldás: A pálya tetőpontján a pályát érintő sebességkomponens $v_x = v_0 \cos\theta$. A lövedék centripetális gyorsulása

$$a_{cp} = \frac{v_x^2}{R}. \tag{2.8.1}$$

A cetripetális gyorsulást a nehézségi gyorsulás biztosítja, ezért $a_{cp} = g$. A két összefüggésből a görbületi sugár kifejezhető:

$$R = \frac{v_x^2}{g} = \frac{v_0^2 \cos^2\theta}{g}. \tag{2.8.2}$$

3. Feladatok a dinamika tárgyköréből

Newton három törvénye

3.1. Feladat: Három azonos m tömegű gyöngyszemet fonálra fűzünk, egymástól kis távolságokban a fonálhoz rögzítünk, és az elhanyagolható tömegű fonál végét ujjunkkal fogva függőlegesen lógatunk a g homogén nehézségi erőtérben. Majd a t_0 időpillanattól kezdve a gyorsulással emeljük a fonál végét. Mekkora erő ébred az egyes fonalszakaszokban?

Megoldás: Számozzuk meg a gyöngyszemeket. A legalsó legyen az 1-es, a középső a 2-es, a felső a 3-as. A koordinátarendszer y tengelye mutasson felfele. Mindhárom gyöngyszem a gyorsulással mozog felfele, így a koordinátarendszerben pozitív értékű. A nehézségi gyorsulás lefele mutat, így negatív: $-g$.
Az 1-es testre a K_1 kötélerő (az 1-es 2-es testet összekötő fonalszakaszon) hat felfele;
a 2-es testre hat a $-K_1$ kötélerő lefele (az 1-es 2-es testet összekötő fonalszakaszon) és a K_2 kötélerő felfele (a 2-es 3-as testet összekötő fonalszakaszon);
a 3-as testre hat a $-K_2$ kötélerő lefele (az 2-es 3-as testet összekötő fonalszakaszon) és az F kötélerő felfele (ezt mi fejtjük ki).
A mozgásegyenletek rendre (1-2-3 testre):

$$ma = K_1 - mg, \tag{3.1.1}$$

$$ma = K_2 - K_1 - mg, \tag{3.1.2}$$

$$ma = F - K_2 - mg. \tag{3.1.3}$$

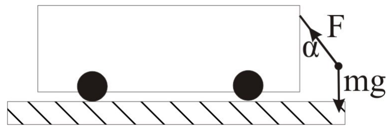
Az egyenletrendszerből a keresett kötélerők:

$$K_1 = m(a+g), \tag{3.1.4}$$

$$K_2 = ma + K_1 + mg = 2m(a+g), \tag{3.1.5}$$

$$F = ma + K_2 + mg = 3m(a+g). \tag{3.1.6}$$

Megjegyzés: Gyakorlásként általánosítsa a feladatot különböző számú és tömegű gyöngyszemekre!



7. ábra.

3.2. Feladat: Egy mozgó kocsin rögzített fonál végén egy $m = 2$ kg tömegű test lóg. A fonal szakítási szilárdsága $F_{max} = 30$ N. Mekkora egyenletes gyorsulással mozoghat a kocsi, hogy a fonal még éppen el ne szakadjon?

Megoldás: Jelölje α azt a szöget, amelyet a gyorsítás alatt a kötél bezár a függőlegessel (lásd a 7. ábrát). Ekkor az F kötélerő vízszintes komponense gyorsítja a testet

$$ma = F\sin\alpha, \tag{3.2.1}$$

míg a függőleges komponens a súlyerővel tart egyensúlyt

$$mg = F\cos\alpha. \tag{3.2.2}$$

A két egyenletből a gyorsulás maximális értéke

$$a_{max} = \sqrt{\frac{F_{max}^2}{m^2} - g^2}. \tag{3.2.3}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a_{max} \approx 11,18$ m/s^2 adódik.

3.3. Feladat: (HN 5B-19) Nyugalomból induló test súrlódásmentesen csúszik le a vízszintessel $\alpha = 30^0$-os szöget bezáró lejtőn.

(a) Határozzuk meg azt a t_0 időpillanatot amikor a test eléri a $v_0 = 50$ m/s-os sebességet?

(b) Mekkora s távolságba jut el ezalatt a test?

Megoldás:

(a) Az m tömegű test mozgásegyenlete

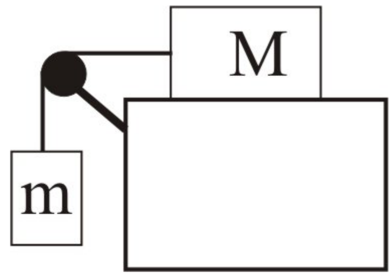
$$ma = mg\sin\alpha, \tag{3.3.1}$$

amiből a test gyorsulása

$$a = g\sin\alpha. \tag{3.3.2}$$

A test sebessége az idő függvényében

$$v(t) = g\sin\alpha t. \tag{3.3.3}$$



8. ábra.

A t_0 időpillanatban a test eléri a v_0 sebességet, azaz $v(t_0) = v_0$. A sebesség eléréséhez szükséges idő pedig $t_0 = v_0/(g \sin\alpha)$. Behelyettesítve a számadatokat $t_0 = 10$ s adódik.
(b) A t_0 idő alatt megtett út

$$s = \frac{1}{2} g t_0^2 \sin\alpha. \tag{3.3.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $s = 250$ m adódik.

3.4. Feladat: (HN: 5B-33) Az m és $M = 8$ kg tömegű hasábokat az 8. ábrán látható elrendezésben fonallal kötünk össze. A csiga tengelysúrlódása és az érintkező felületek közötti súrlódás elhanyagolható.
(a) Mekkora az alsó test m tömege, ha a testek gyorsulása $a = 2$ m/s^2?
(b) Mekkora K erő feszíti a fonalat?

Megoldás:
(a) Mivel a hasábokat összekötő kötél nem nyúlik meg, mindkét hasáb gyorsulása ugyanakkora (lásd a 9. ábrát.) Az egyes hasábok mozgásegyenletei

$$ma = mg - K \tag{3.4.1}$$

és

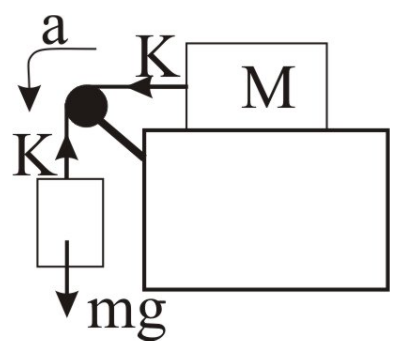
$$Ma = K. \tag{3.4.2}$$

E két egyenletből

$$m = \frac{Ma}{g-a} = 2\,\text{kg} \tag{3.4.3}$$

adódik.
(b) A kötelet feszítő erő pedig

$$K = \frac{mM}{m+M} g = 16\,\text{N}. \tag{3.4.4}$$



9. ábra.

Centripetális erő

3.5. Feladat: Egy $m = 70$ kg tömegű pilóta repülőgépével $R = 1$ km sugarú függőleges síkú pályán $v = 1080$ km/h egyenletes sebességgel köröz. A repülőnek állandóan a teteje néz a körpálya középpontja felé. Mekkora erővel nyomja a pilóta az ülést a körpálya legfelső pontján?

Megoldás: A körpálya legfelső pontjában a pilóta körmozgását az mg súlyerő és a kör közepe felé mutató N támaszerő biztoítja:

$$m\frac{v^2}{R} = mg + N \tag{3.5.1}$$

Ebből az egyenletből az N támaszerő könnyen kifejezhető:

$$N = m\frac{v^2}{R} - mg = 5600\,\mathrm{N}. \tag{3.5.2}$$

A pilóta az ülést ugyanekkora nagyságú, ellentétes irányú erővel nyomja. (A nyomóerő a pilóta súlyának nyolcszorosa.)

3.6. Feladat: (HN 5B-20) Egy gépkocsi $R = 18$ m sugarú, függőleges síkú, kör alakú domboldalon mozog felfelé. A domb tetején a vezető azt tapasztalja, hogy éppen csak érinti az ülést. Mekkora sebességgel haladt a gépkocsi?

Megoldás: A domb tetején két erő hat a vezetőre, melyek biztosítják a vezető körpályán történő mozgását. A kör közepe felé mutató mg súlyerő, valamint az ülés által kifejtett, ellentétes irányú N támaszerő határozzák meg a vezető gyorsulását, mely (feltéve, hogy az autó nem válik el az úttesttől) a centripetális gyorsulással egyenlő:

$$m\frac{v^2}{R} = mg - N. \tag{3.6.1}$$

Határesetben, amikor a vezető éppen csak érinti az ülést, $N \to 0$. A határesethez tartozó sebesség:

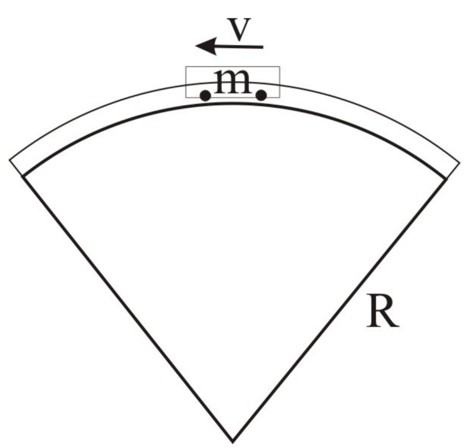
$$v = \sqrt{Rg} \approx 13,41 \text{ m/s}. \tag{3.6.2}$$

3.7. Feladat: (HN 5B-21) A hullámvasút kocsija állandó $v = 6$ m/s-os sebességgel halad át a pálya $R = 6$ m sugarú, függőleges síkú részének tetőpontján a 10. ábrán látható módon. A kocsi és az utasok együttes tömege $m = 1350$ kg.

(a) Mekkora és milyen irányú a kocsi gyorsulása a tetőponton?

(b) Mekkora eredő erő hat ebben a pillanatban a kocsira és az utasokra összesen?

(c) Mekkora erővel nyomja a pálya a kocsit a tetőponton?



10. ábra.

Megoldás:

(a) A kocsi gyorsulása a kör közepe felé (azaz lefelé) mutató centripetális gyorsulással egyenlő, melynek nagysága

$$a = a_{cp} = \frac{v^2}{R} = 6\,\text{m/s}^2. \tag{3.7.1}$$

(b) A kocsira ható erők eredőjét a kocsi gyorsulása határozza meg:

$$F = ma_{cp} = 8100\,\text{N}. \tag{3.7.2}$$

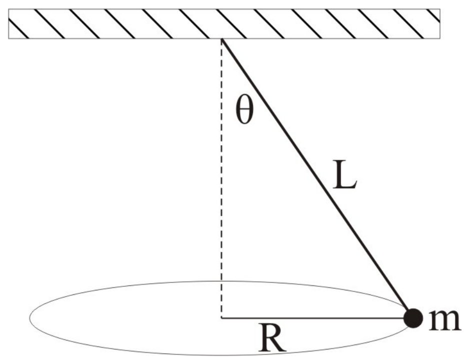
(c) A kocsira ható erők eredője a hullámvasút N támaszerejének és a kocsira ható súlyerőnek a különbsége:

$$F = mg - N. \tag{3.7.3}$$

Felhasználva a centripetális gyorsulás a (3.7.1) kifejezését, valamint a (3.7.2) egyenletet:

$$N = mg - ma_{cp} = 5400\,\mathrm{N}. \tag{3.7.4}$$

3.8. Feladat: (HN 5B-31) Egy L hosszúságú fonállal a mennyezethez erősített testet a 11. ábrán látható módon úgy hozunk mozgásba, hogy a test vízszintes síkú, R sugarú körpályán mozog, miközben a fonál a függőlegessel θ szöget zár be. Fejezzük ki egy fordulat idejét az L és θ paraméterek függvényében!

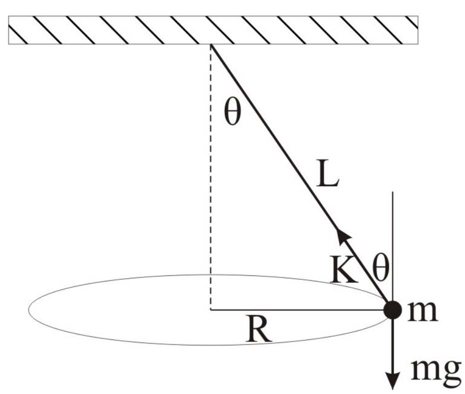


11. ábra.

Megoldás: Jelölje K az m tömegű testre ható kötélerő nagyságát (lásd a 12. ábrát). Mivel a tömegpont nem mozdul el függőlegesen, a súlyerő egyensúlyt tart a kötélerő függőleges komponensével:

$$K\cos\theta = mg, \tag{3.8.1}$$

míg a vízszintes komponens a körpályán történő mozgáshoz biztosítja a szükséges centripetális



12. ábra.

gyorsulást:

$$K\sin\theta = m\frac{v^2}{R}. \tag{3.8.2}$$

A két egyenletből a tömegpont sebessége (felhasználva, hogy $R = L\sin\theta$)

$$v = \sqrt{gL\sin\theta\,\mathrm{tg}\,\theta}. \tag{3.8.3}$$

Egy fordulat ideje

$$T = \frac{2R\pi}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}. \tag{3.8.4}$$

3.9. Feladat: (HN: 5B-32) Egy $L = 1,4$ m hosszú fonálinga függőleges síkban mozog. Amikor az ingatest sebessége $v = 2,2$ m/s, akkor a fonál $\alpha = 20^0$-os szöget zár be a függőlegessel. Határozzuk meg ebben a pillanatban

(a) az ingatest a_{cp} centripetális gyorsulását,

(b) az ingatest a_t tangenciális gyorsulását,

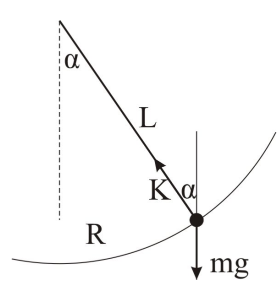
(c) a fonalat feszítő K erőt, ha az ingatest tömege $m = 600$ g!

Megoldás:

(a) A centripetális gyorsulás nagysága:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{L} \approx 3,45\text{m/s}^2. \tag{3.9.1}$$

(b) A tangenciális gyorsulást a súlyerő tangenciális komponense határozza meg (a kötélerő merőleges a körpálya érintőjére, ahogy azt a 13. ábra mutatja):



13. ábra.

$$a_t = g\sin\alpha \approx 3,40\text{m/s}^2. \tag{3.9.2}$$

A körmozgást a K kötélerő és a súlyerő fonálirányú komponense — $mg\cos\alpha$ — különbsége biztosítja. A mozgásegyenlet a radiális komponensekre

$$m\frac{v^2}{L} = K - mg\cos\alpha. \tag{3.9.3}$$

Az egyenletből kifejezhető a K kötélerő:

$$K = m\frac{v^2}{L} + mg\cos\alpha \approx 7,7\mathrm{N}. \tag{3.9.4}$$

Súrlódási erő

3.10. Feladat: Vízszintes asztallapon két tégla fekszik egymáson. Minimálisan mekkora F erővel kell hatni az alsó téglára, hogy az kicsússzon a felső alól? A súrlódási tényező az asztallap és a tégla, valamint a két tégla között $\mu = 0,4$, a két tégla össztömege pedig $m = 5$ kg.

Megoldás: Jelölje a felső test tömegét m_1, az alsó test tömegét pedig m_2. Ekkor $m = m_1 + m_2 = 5$ kg. Legyen ezen felül a_1 a felső test, a_2 pedig az alsó test gyorsulása. A felső téglára $F_{s1} = \mu m_1 g$ súrlódási erő hat, mellyel a tégla mozgásegyenlete:

$$m_1 a_1 = F_{s1} = \mu m_1 g \tag{3.10.1}$$

Az alsó téglára a felső tégla által kifejtett F_{s1} súrlódási erő mellett, az alsó tégla és asztallap között fellépő $F_{s2} = \mu(m_1 + m_2)g$ súrlódási erő is hat, melyek fékezni próbálják az alsó tégla mozgását. Az alsó tégla mozgásegyenlete:

$$m_2 a_2 = F - \mu m_1 g - \mu(m_1 + m_2)g = F - \mu m_1 g - \mu m g. \tag{3.10.2}$$

Az első egyenletből kifejezve az a_1 gyorsulást

$$a_1 = \mu g \tag{3.10.3}$$

adódik. amely az m_1 test maximális gyorsulását jelenti. Ez azt jelenti, hogy a mnimális F erő esetén még nem válnak el, és $a = a_1 = a_2$ írható. Ezzel a második mozgásegyenletbe a $\mu m_1 g$ helyére $m_1 a$ -t helyettesítve

$$m_2 a = F - m_1 a - \mu(m_1 + m_2)g. \tag{3.10.4}$$

Ezt az F erőre átrendezve a minimális erő

$$F = (m_1 + m_2)a + \mu(m_1 + m_2)g = ma + \mu m g = 40\,\mathrm{N}. \tag{3.10.5}$$

Megjegyzés: A feladatmegoldásból látszik, hogy a kérdés megválaszolásához csak az össztömegre volt szükség. Kisebb vagy nagyobb erő alkalmazásakor az egyenletekből levont következtetések módosulhatnak! Ezeknek diszkussziója gyakorló feladat.

3.11. Feladat: Egy autó az országúton nagy sebességgel halad. Az autógumi és az úttest felülete között a tapadási súrlódási együttható $\mu = 0,9$. Az $R = 100$ m sugarú, vízszinten kanyarban mekkora lehet a jármű maximális sebessége, hogy ne sodródjon ki?

Megoldás: A kanyarban az F tapadási súrlódási erő biztosítja az autónak a körmozgáshoz szükséges centripetális gyorsulást:

$$m\frac{v^2}{R} = F. \tag{3.11.1}$$

A maximális tapadási erő $F_{max} = \mu mg$ felső határt szab az autó maximális sebességének is, mely az alábbi egyenlőtlenséggel fejezhető ki:

$$m\frac{v^2}{R} \leq F_{max} = \mu mg. \tag{3.11.2}$$

Maximális sebesség esetén egyenlőség áll fenn az egyenlet két oldala között, ezért a maximális sebesség nagysága:

$$v_{max} = \sqrt{\mu gR}. \tag{3.11.3}$$

Behelyettesítve a számadatokat $v_{max} = 30$ m/s adódik.

3.12. Feladat: (HN 5B-43) Egy gyerek a parttól $s = 12$ m-re áll a befagyott tavacska jegén. Csizmája és a jég közötti tapadási súrlódási együttható $\mu = 0,05$. Határozzuk meg azt a minimális időt, amely alatt kisétálhat a partra, ha megcsúszás nélkül lépked?

Megoldás: A gyerek $F = \mu mg$ erővel nyomja a jeget, ezért csúszás nélkül legfeljebb $a = \mu g$ gyorsulásra képes. Az s út megtételéhez ezért legkevesebb

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{\mu g}} = 6,93\,\mathrm{s} \tag{3.12.1}$$

idő szükséges.

3.13. Feladat: (HN 5B-44) Egy rakodórámpán láda nyugszik. Ha a rámpa szöge $\alpha_1 = 30^0$-os, akkor a láda megcsúszik. Amennyiben a csúszó láda alatt a lejtő hajlásszöge $\alpha_2 = 20^0$-ra csökken, akkor a láda mozgása egyenletessé válik. Határozzuk meg a lejtő és a láda közötti csúszási és tapadási súrlódási együttható értékét!

Megoldás: A feladatban jelölje μ_t a tapadási és μ_{cs} a csúszási súrlódási együtthatót. Nyugalmi helyzetben a tapadási súrlódási erő egyensúlyt tart a súlyerő lejtővel párhuzamos komponensével, ezért

$$ma = 0 = mg\sin\alpha_1 - \mu_t g\cos\alpha_1. \qquad (3.13.1)$$

Az egyenletből

$$\mu_t = \mathrm{tg}\,\alpha_1 \approx 0,577 \qquad (3.13.2)$$

tapadási súrlódási együttható adódik. Egyenletes gyorsulás esetén a súlyerő lejtővel párhuzamos komponense a csúszási súrlódási együtthatóval tart egyensúlyt:

$$ma = 0 = mg\sin\alpha_2 - \mu_{cs} g\cos\alpha_2. \qquad (3.13.3)$$

Az egyenletből

$$\mu_{cs} = \mathrm{tg}\,\alpha_2 \approx 0,364. \qquad (3.13.4)$$

csúszási súrlódási együttható adódik.

3.14. Feladat: (HN 5B-46) Az $m = 5$ kg-os tömegű test lecsúszik a vízszintessel $\alpha = 41^0$ szöget bezáró lejtőn. A test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható $\mu = 0,3$.
(a) Határozzuk meg a súrlódási erő nagyságát!
(b) Mekkora gyorsulással csúszik le a test?

Megoldás:
(a) A lejtőn lecsúszó testre ható N támaszerő (kényszererő) egyensúlyt tart a súlyerő lejtőre merőleges komponensével, ezért $N = mg\cos\alpha$. A csúszási súrlódási erő pedig

$$F_s = \mu N = \mu mg\cos\alpha \approx 11,32\ \mathrm{N}. \qquad (3.14.1)$$

(b) A test lejtővel párhuzamos mozgását a súlyerő lejtővel párhuzamos komponense és a súrlódási erő határozzák meg:

$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha, \qquad (3.14.2)$$

ahonnan a test gyorsulása

$$a = g\sin\alpha - \mu\cos\alpha \approx 4,3\ \mathrm{m/s^2}. \qquad (3.14.3)$$

3.15. Feladat: (HN 5B-47) A vízszintessel $\alpha = 60^0$-os szöget bezáró lejtőn egy test $a = g/2$ gyorsulással csúszik le. Mekkora a csúszó súrlódási együttható?

Megoldás: A lejtővel párhuzamos mozgást leíró dinamikai egyenlet:

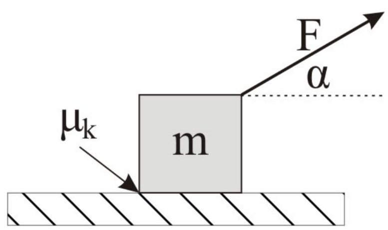
$$ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha. \tag{3.15.1}$$

Behelyettesítve a gyorsulás értékét a súrlódási együttható az alábbi alakban fejezhető ki:

$$\mu = \frac{\sin\alpha - \frac{1}{2}}{\cos\alpha}. \tag{3.15.2}$$

Behelyettesítve a számadatokat $\mu \approx 0,732$ adódik a súrlódási együttható értékére.

3.16. Feladat: (HN 5B-52) Egy $m = 4$ kg tömegű testet a 14. ábrának megfelelően $F = 20$ N erővel húzunk ($\alpha = 30^0$). Mekkora a test gyorsulása, ha a test és talaj közötti csúszási súrlódási együttható $\mu_k = 0,2$?



14. ábra.

Megoldás: Mivel a test nem emelkedik fel a talajról a függőleges gyorsulása zérus. Ezért

$$0 = N + F\sin\alpha - mg, \tag{3.16.1}$$

ahol N a testre ható támaszerő. Írjuk fel a mozgás vízszintes vetületére vonatkozó mozgásegyenletet!

$$ma = F\cos\alpha - F_s, \tag{3.16.2}$$

ahol F_s a testre ható súrlódási erő, melyet az N támaszerő segítségével határozhatunk meg:

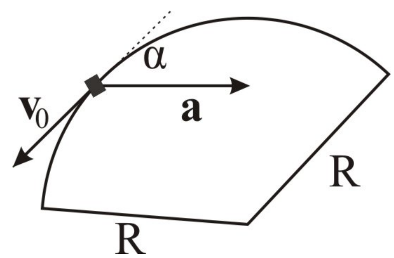
$$F_s = \mu_k N. \tag{3.16.3}$$

Az egyenletrendszer megoldásából a test gyorsulása meghatározható:

$$a = \frac{F(\cos\alpha + \mu_k\sin\alpha)}{m} - \mu_k g. \tag{3.16.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a \approx 2,83$ m/s^2 adódik.

3.17. Feladat: (HN 5B-58) Egy gépkocsi $R = 80$ m sugarú vízszintes körpályán mozog. A 15. ábra azt a pillanatot mutatja, amikor az autó sebessége éppen $v_0 = 10$ m/s és a gyorsulása **a**, mely a körpálya érintőjével $\alpha = 35^0$-os szöget zár be.
(a) Mekkora a gépkocsi centripetális gyorsulása?
(b) Mekkora a tangenciális gyorsulás?
(c) Mekkora utat tesz meg a gépkocsi a megállásig, ha az érintő menti gyorsulása állandó?
(d) Az úttest vízszintes, azaz a kanyarban nem túlemelt pálya. Mekkora minimális nyugalmi súrlódási együttható szükséges ahhoz, hogy az ábrán mutatott pillantban a gépkocsi ne csússzon meg?



15. ábra.

Megoldás:
(a) A centripetális gyorsulás az autó sebességének és a kanyar görbületi sugarának segítségével határozható meg:

$$a_{cp} = \frac{v_0^2}{R}. \tag{3.17.1}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a_{cp} = 1,25$ m/s^2 adódik.
(b) Az ábra segítségével meghatározhatjuk az **a** gyorsulásvektor nagyságát is. Felhasználva, hogy az **a** vektor sugár irányú vetülete éppen a centripetális gyorsulás, az eredő gyorsulás nagysága

$$a = |\mathbf{a}| = \frac{a_{cp}}{\sin\alpha}. \tag{3.17.2}$$

A tangenciális gyorsulás pedig az

$$a_t = a\cos\alpha = \frac{a_{cp}}{\mathrm{tg}\,\alpha} \tag{3.17.3}$$

összefüggéssel határozható meg. Behelyettesítve a számadatokat $a_t \approx 1,79$ m/s^2 adódik.
(c) Amennyiben a kocsi lassul, de a tangenciális gyorsulása állandó, a kocsi megállásáig megtett út meghatározható az alábbi összefüggésből:

$$s = v_0 t_0 - \frac{1}{2} a_t t_0^2, \tag{3.17.4}$$

ahol $t_0 = v_0/a_t$ a megállásig eltelt idő. Behelyettesítve a számadatokat $s \approx 27,9$ m adódik a megállásig megtett út hosszára.
(d) A dinamika alapegyenlete szerint

$$ma = F_s = \mu mg, \tag{3.17.5}$$

amelyből a minimális súrlódási együttható, mely mellett a kocsi még épp nem csúszik meg, $\mu \approx 0,218$.

3.18. Feladat: * A vízszintes asztalon m tömegű test nyugszik. A test és az asztallap közötti súrlódási együttható μ. (A tapadási és csúszási súrlódási együttható legyen azonos.) A testre a $t = 0$ időpillanattól kezdve $F(t) = f_0 t$ erővel hatunk.
(a) Mi az f_0 együttható mértékegysége?
(b) Mikor indul el a test?
(c) Mekkora lesz a test sebessége a t időpillanatban?

Megoldás:
(a) Az f_0 együttható mértékegysége N/s, mivel idő dimenziójú mennyiséggel megszorozva erő dimenziójú mennyiséget kell, hogy kapjunk.
(b) A test abban a t_0 pillanatban indul el, amikor a rá ható erő eléri a tapadási erő maximumát, azaz $F(t_0) = f_0 t_0 = \mu mg$, ahonnan

$$t_0 = \frac{\mu mg}{f_0}. \tag{3.18.1}$$

(c) A test mozgásegyenlete a megmozdulás pillanatát követő $t \geq t_0$ időintervallumban:

$$ma = f_0 t - \mu mg \tag{3.18.2}$$

Az egyenletből kifejezhetjük a gyorsulást az idő függvényében:

$$a(t) = \frac{f_0}{m} t - \mu g. \tag{3.18.3}$$

A sebességet a gyorsulás idő szerinti integrálásával határozhatjuk meg:

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} a(t')\,\mathrm{d}t' \int_{t_0}^{t} \left(\frac{f_0}{m} t' - \mu g\right) \mathrm{d}t' = \frac{1}{2}\frac{f_0}{m} t^2 - \mu g t + \frac{1}{2}\frac{\mu^2 m g^2}{f_0}. \tag{3.18.4}$$

Tehát a test sebessége:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha: } t \leq t_0 \\ \frac{1}{2}\frac{f_0}{m} t^2 - \mu g t + \frac{1}{2}\frac{\mu^2 m g^2}{f_0} & \text{ha: } t > t_0 \end{cases}. \tag{3.18.5}$$

3.19. Feladat: Egy függőleges tengelyű korong ω_0 szögsebességgel forog. A korong középétől R távolságban m tömegű test helyezkedik el. A korong és a test között μ tapadási súrlódási együttható van. A korong egyenletes lassulásba kezd. Legalább mekkora legyen a tapadási súrlódási együttható, hogy a test ne csússzon meg?

Megoldás: A korong szögsebessége az

$$\omega(t) = \omega_0 - \beta t \tag{3.19.1}$$

függvény szerint változik. Ezért a korongon lévő test centripetális gyorsulása

$$a_{cp} = R\omega(t)^2 = R(\omega_0 - \beta t)^2. \tag{3.19.2}$$

A test tangenciális gyorsulása pedig

$$a_t = R\beta. \tag{3.19.3}$$

A test eredő gyorsulása

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}, \tag{3.19.4}$$

melyet a tapadási erő biztosít a test számára. A tapadás feltétele, hogy

$$\mu mg \geq ma = m\sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2}. \tag{3.19.5}$$

A tapadási súrlódási együttható ezért:

$$\mu \geq \frac{\sqrt{R^2(\omega_0 - \beta t)^4 + (R\beta)^2}}{g}. \tag{3.19.6}$$

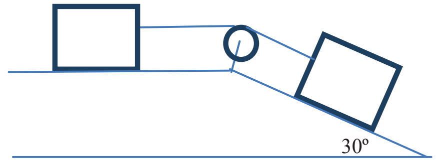
A legnagyobb tapadás a lassulás kezdeti pillanatában szükséges, ezért a minimális tapadasi együttható

$$\mu_{min} = R\frac{\sqrt{\omega_0^4 + \beta^2}}{g}. \tag{3.19.7}$$

3.20. Feladat: A 16. ábrán két, egyenként $m = 40$ kg tömegű test van összekapcsolva. A súrlódási együttható mindkét testre $\mu = 0,15$. Határozzuk meg a testek gyorsulását és a fonálban ébredő K kötélerőt!

Megoldás: Jelölje a a testek gyorsulását. (Mivel a kötél nem nyúlik meg, mindkét test azonos gyorsulással mozog) A balodali test mozgásegyenlete

$$ma = K - \mu mg, \tag{3.20.1}$$



16. ábra.

míg a lejtőn fekvő test mozgásegyenlete

$$ma = mg\sin\alpha - K - \mu mg\cos\alpha \tag{3.20.2}$$

A két egyenletből meghatározható a testek gyorsulása:

$$a = \frac{1}{2}(g\sin\alpha - \mu g - \mu g\cos\alpha). \tag{3.20.3}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a \approx 1,1$ m/s^2 adódik. A kötélerőt a (3.20.1) egyenlet segítségével határozhatjuk meg:

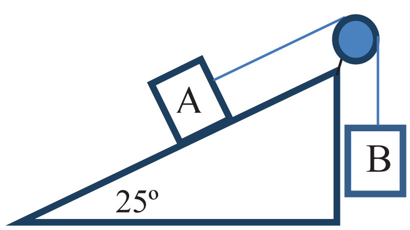
$$K = ma + \mu mg = \frac{\sin\alpha + \mu - \mu\cos\alpha}{2}mg. \tag{3.20.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $K \approx 104$ N adódik.

3.21. Feladat: A vízszintessel $\alpha = 25^0$-os szöget bezáró lejtőn nyugalmi helyzetből indulva $m_A = 30$ kg tömegű testet a 17. ábrán látható módon $m_B = 20$ kg tömegű test húz felfelé. A súrlódási együttható $\mu = 0,2$.

(a) Számoljuk ki a testek gyorsulását!

(b) Számoljuk ki a testek által $t_0 = 2$ s alatt megtett utat!



17. ábra.

Megoldás:

(a) Jelölje K a kötélet feszítő erőt és a a testek gyorsulását. A testek mozgásegyenlete:

$$m_A a = K - m_A g\sin\alpha - \mu m_A g\cos\alpha \tag{3.21.1}$$

és

$$m_B a = m_B g - K. \tag{3.21.2}$$

E két egyenletből a gyorsulás kifejezhető:

$$a = \frac{m_B - m_A \sin\alpha - \mu m_A \cos\alpha}{m_A + m_B} g. \tag{3.21.3}$$

Behelyettesítve a számadatokat $a \approx 0,0376$ m/s^2 adódik.

(b) A testek által megtett út t_0 idő alatt, amennyiben a testek nyugalmi helyzetből indulnak:

$$s = \frac{1}{2} a t_0^2. \tag{3.21.4}$$

Behelyettesítve a számadatokat $s \approx 7,5$ cm adódik.

3.22. Feladat: Az α hajlásszögű lejtőn a gyorsulással lefele csúszik a k direkcióerejű rugóval összekötött m_1 és m_2 tömegű testekből álló rendszer, mégpedig úgy, hogy az m_1 megy elől. A lejtő és a testek közötti súrlódási tényező rendre μ_1 és μ_2.

(a) Fejezzük ki a rendszer gyorsulását.

(b) Mekkora a rugó megnyúlása?

Megoldás: Jelölje F_r az ebredő rugóerőt. Legyen a koordinátarendszer x tengelye lejtőirányú.

(a) E koordinátarendszer irányítás mellett két test mozgásegyenlete sorban

$$m_1 a = m_1 g \sin\alpha - \mu_1 m_1 g \cos\alpha - F_r \tag{3.22.1}$$

és

$$m_2 a = m_2 g \sin\alpha - \mu_2 m_2 g \cos\alpha + F_r. \tag{3.22.2}$$

A két egyenletből a

$$a = \frac{(m_1 + m_2) g \sin\alpha - (\mu_1 m_1 g \cos\alpha + \mu_2 m_2 g \cos\alpha)}{m_1 + m_2}. \tag{3.22.3}$$

gyorsulás adódik.

(b) A gyorsulás visszahelyettesítésével a kapott rugóerő

$$F_r = (\mu_2 - \mu_1) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \cos\alpha. \tag{3.22.4}$$

Ezzel a rugó megnyúlása

$$\Delta l = \frac{F_r}{k} = \frac{1}{k} (\mu_2 - \mu_1) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \cos\alpha. \tag{3.22.5}$$

Látható, hogy ha $\mu_2 > \mu_1$, akkor a rugó megnyúlik, mert $\Delta l > 0$; ellenkező esetben összenyomódik. Ha a kettő egyenlő egymással, akkor a megnyúlás zérus.

Közegellenállási erők

3.23. Feladat: Az R sugarú vasgolyó vízben süllyed. Ismeretes, hogy hosszabb idő elteltével közegben a testek állandó sebességgel esnek. Sebességgel arányos közegellenállást feltételezve mekkora lesz a vasgolyó v végsebessége? Az arányossági tényező legyen: $c = 6\pi\eta R$ (Stokes-féle ellenállás; kis sebességek eseteire), ahol η a közeg viszkozitása, R a közegben mozgó golyó sugara.

Megoldás: Jelölje ϱ_{Fe} a vas, míg ϱ_{H_2O} a víz sűrűségét. A koordinátatengely mutasson lefele! (Ez a pozitív irány.) A testre három erő hat. Az

$$mg = \varrho_{Fe}\frac{4R^3\pi}{3}g$$

nehézségi erő, amely most pozitív; a pillanatnyi sebességgel ellentétes közegellenállás, amely – mivel a test süllyed, tehát v pozitív –, azért a közegellenállási erő negatív:

$$-cv = -6\pi\eta Rv;$$

valamint a felhajtó erő, amely felfele mutat

$$-\varrho_{H_2O}\frac{4R^3\pi}{3}g,$$

így most negatív. Mivel azt az esetet vizsgáljuk, amikor a test már állandó sebességgel süllyed, így tudjuk, hogy a testre ható erők eredője zérus. Felírhatjuk tehát a következő egyenletet

$$0 = \varrho_{Fe}\frac{4R^3\pi}{3}g - 6\pi\eta Rv - \varrho_{H_2O}\frac{4R^3\pi}{3}g, \tag{3.23.1}$$

amelyből a kérdezett v sebesség

$$v = (\varrho_{Fe} - \varrho_{H_2O})\frac{2R^2}{9\eta}g. \tag{3.23.2}$$

Megjegyzés: Ez a számolás az alapja annak a módszernek, amellyel a folyadékok viszkozitását meg lehet határozni.

3.24. Feladat: Az m tömegű golyó levegőben esik a homogén nehézségi erőtérben. A golyóra a sebesség négyzetével arányos közegellenállás hat. (Az arányossági tényezőt jelöljük c'-vel.) Mekkora a golyó végsebessége? (A felhajtóerőtől tekintsünk el.)

Megoldás: Amikor a test eléri végsebességét, akkor a ráható erők eredője zérus, így — lefele mutató koordinátatengely irányítást véve — a

$$0 = mg - c'v^2 \tag{3.24.1}$$

összefüggés írható fel. Ebből a végsebesség

$$v = \sqrt{\frac{mg}{c'}}. \tag{3.24.2}$$

3.25. Feladat: ** Az m tömegű testet a koordinátarendszer origójából v_0 sebességgel a vízszinteshez képest α szöggel elhajítunk a homogén nehézségi erőtérben. A testre az $\mathbf{F}_k = -c\mathbf{v}$ sebességgel arányos közegellenállás is hat, ahol c konstans arányossági tényező.)
(a) Írjuk fel a mozgásegyenletet!
(b) Határozzuk meg a sebességkomponensek időbeli változását!
(c) Határozzuk meg a test helyét, mint az idő függvényét!
(d) Határozzuk meg a pálya alakját!

Megoldás: Amennyiben az y tengely pozitív iránya felfelé mutat, a nehézségi gyorsulás vektora a $\mathbf{g} = (0, -g)$ alakban adható meg. A gyorsulás és sebesség vektorok pedig rendre $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ és $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ alakúak. A $t_0 = 0$ időpillanatban a kezdeti sebességkoponensek $v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ valamint $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$. Mivel a koordináta-rendszer origóját a hajítás helyére tesszük, a kezdeti pozíció koordinátáit jelöljék $x_0 = 0$ és $y_0 = 0$.
(a) Az elhajított testre két erő hat, az $m\mathbf{g}$ súlyerő valamint a $-c\mathbf{v}$ közegellenállási erő. A dinamika alaptörvénye (Newton II. axiómája) szerint a test mozgásegyenlete

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - c\mathbf{v}. \tag{3.25.1}$$

Írjuk fel az $\mathbf{a}$ vektor x és y komponenseire vonatkozó skaláregyenleteket. Felhasználva, hogy $a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$ és $a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$, az

$$ma_x = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -cv_x \tag{3.25.2}$$

és

$$ma_y = m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -mg - cv_y \tag{3.25.3}$$

egyenleteket kapjuk.
(b) A (3.25.2) és (3.25.3) egyenletek egymástól függetlenek (azaz nem csatolt differenciálegyenlet-rendszert írnak le), aminek köszönhetően szeparált egyenleteket kapunk a mozgás x és y vetületére. A (3.25.2) egyenletben szeparálva a változókat és idő szerint

integrálva az egyenletet:

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{\mathrm{d}v_x}{v_x} = -\frac{c}{m}\int_{t_0=0}^{t} \mathrm{d}t'. \tag{3.25.4}$$

Az integrálások elvégzése után

$$\ln\frac{v_x(t)}{v_{0x}} = -\frac{c}{m}t \tag{3.25.5}$$

adódik, ahonnan a sebesség x komponense

$$v_x(t) = v_{0x}e^{-\frac{c}{m}t}. \tag{3.25.6}$$

Hasonló módon a (3.25.3) egyenletben is szeparáljuk az integrálási változókat:

$$m\int_{v_{0y}}^{v_y} \frac{\mathrm{d}v_y}{mg+cv_y} = -\int_{t_0=0}^{t} \mathrm{d}t'. \tag{3.25.7}$$

Az integrálás elvégzésével az

$$\frac{m}{c}\ln\frac{mg+cv_y(t)}{mg+cv_{0y}} = -t, \tag{3.25.8}$$

összefüggéshez jutunk, melyből az y irányú sebességkomponens

$$v_y(t) = \frac{mg+cv_{0y}}{c}e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}. \tag{3.25.9}$$

Megjegyzés: Belátható, hogy a $c \longrightarrow 0$ határesetben a megoldások a ferde hajításra érvényes $v_x(t) = v_{0x}$ illetve $v_y(t) = v_{0y} - gt$ megoldásokba tartanak. Ennek igazolását az olvasóra bízzuk.

(c) A test helykoordánátáit a sebesség idő szerinti integrálásával számolhatjuk ki, azaz

$$x(t) = \int_{t_0=0}^{t} v_{0x}e^{-\frac{c}{m}t'}\mathrm{d}t' = \left[-\frac{m}{c}v_{0x}e^{-\frac{c}{m}t'}\right]_{t_0=0}^{t} = \frac{m}{c}v_{0x}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right) \tag{3.25.10}$$

és

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t_0=0}^{t}\left(\frac{mg+cv_{0y}}{c}e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c}\right)\mathrm{d}t' = \left[-\frac{m}{c}\frac{mg+cv_{0y}}{c}e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c}t\right]_{t_0=0}^{t} \\ &= \frac{m}{c}\frac{mg+cv_{0y}}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}t\right). \end{aligned} \tag{3.25.11}$$

Megjegyzés: Belátható, hogy a $c \longrightarrow 0$ határesetben a megoldások a ferde hajításra érvényes $x(t) = v_{0x}t$ illetve $y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ megoldásokhoz tartanak. Ezeknek igazolását az olvasóra bízzuk.

(d) A pályagörbe alakját megkapjuk, ha a (3.25.10) egyenletből kiküszöböljük a t időváltozót:

$$t = -\frac{m}{c}\ln\left(1-\frac{cx}{mv_{0x}}\right). \tag{3.25.12}$$

Ezt behelyettesítve a (3.25.11) egyenletbe

$$y(x) = \frac{mg + cv_{0y}}{cv_{0x}}x + \frac{m^2 g}{c^2}\ln\left(1 - \frac{cx}{mv_{0x}}\right) \tag{3.25.13}$$

adódik. Ezt a pályáját ballisztikus pályának nevezik. *Megjegyzés:* Belátható, hogy a $c \longrightarrow 0$ határesetben a megoldás egy parabola pálya. Másfelől a logaritmus függvény argumentumát megvizsgálva látható, hogy a

$$1 > \frac{cx}{mv_{0x}} \tag{3.25.14}$$

relációnak fenn kell állnia. Innen következik, hogy

$$x < \frac{mv_{0x}}{c}, \tag{3.25.15}$$

azaz ennél az x távolságnál soha nem megy messzebb a test.

3.26. Feladat: ** Az m tömegű testet h magasságban elejtjük. A testre az $\mathbf{F}_k = -c\mathbf{v}$ sebességgel arányos közegellenállás is hat. (A c konstans arányossági tényező.)
(a) Írjuk fel a mozgásegyenletet!
(b) Határozzuk meg a sebességének időbeli változását!
(c) Határozzuk meg a test helyét, mint az idő függvényét!

Megoldás: Amennyiben a függőleges tengely pozitív iránya felfelé mutat, a nehézségi gyorsulás a negatív irányba gyorsítja az elejtett testet, melyre két erő hat, az $m\mathbf{g}$ súlyerő valamint a $-c\mathbf{v}$ közegellenállási erő. A dinamika alaptörvénye (Newton II. axiómája) szerint a test mozgásegyenlete

$$ma = -mg - cv. \tag{3.26.1}$$

Felhasználva, hogy $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, az

$$ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - cv \tag{3.26.2}$$

egyenletet kapjuk.
(a) Szeparáljuk a (3.26.2) egyenletben az integrálási változókat, majd végezzük el az integrálás műveletét:

$$m\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{mg + cv} = -\int_{t_0=0}^{t} \mathrm{d}t'. \tag{3.26.3}$$

Az integrálás elvégzésével az

$$\frac{m}{c}\ln\frac{mg + cv(t)}{mg} = -t, \tag{3.26.4}$$

összefüggéshez jutunk, melyből a sebesség kifejezhető:

$$v(t) = \frac{mg}{c}e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{mg}{c}. \tag{3.26.5}$$

(b) A test helykoordinátáját a sebesség idő szerinti integrálásával számolhatjuk ki, azaz

$$z(t) = \int_{t_0=0}^{t} \left(\frac{mg}{c}e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c}\right) \mathrm{d}t' = \left[-\frac{m}{c}\frac{mg}{c}e^{-\frac{c}{m}t'} - \frac{mg}{c}t\right]_{t_0=0}^{t}$$

$$= \frac{m}{c}\frac{mg}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right) - \frac{mg}{c}t. \tag{3.26.6}$$

4. Feladatok munkavégzés és konzervatív erőterek tárgyköréből. Munkatétel

Munkavégzés, teljesítmény

4.1. Feladat: (HN 6B-8) Egy rúgót nyugalmi állapotból 4 J munka árán 10 cm-rel nyújthatunk meg. Mekkora munkavégzés szükséges további 10 cm-rel való megnyújtásához, ha a Hooke-törvény mindvégig érvényben marad?

Megoldás: Két megnyúlás van. Az első $\Delta l = l_1 - l_0 = 10$ cm, amelyre felírható, hogy

$$W = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2. \tag{4.1.1}$$

Innen a k rugóállandó értéke kifejezhető

$$k = \frac{2W}{(\Delta l)^2} = 800\,\mathrm{N/m}. \tag{4.1.2}$$

A további $l_2 = 10$ cm nyújtáshoz szükséges munkavégzés

$$\Delta W = \frac{1}{2}k(l_2 + \Delta l)^2 - \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = 12\,\mathrm{J}. \tag{4.1.3}$$

4.2. Feladat: (HN 6B-10) Egy rugó által kifejtett erő a Hooke-törvény helyett az $F = -kx^3$ törvény szerint változik, ahol $k = 200$ N/m^3. Mennyi munkát végzünk, míg 0,1 m-ről 0,3 m-re nyújtjuk?

Megoldás: A rugó végét $F'(x) = kx^3$ erővel kell húznunk, így a munka definíciója alapján az általunk végzett munka:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F'(x)\,dx = \int_{x_1=0,1}^{x_2=0,3} kx^3\,dx = \left[\frac{1}{4}kx^4\right]_{x_1=0,1}^{x_2=0,3} = 0,4\mathrm{J} \tag{4.2.1}$$

integrállal számolható ki.

4.3. Feladat: (HN 6B-27) * A 200 N súlyú gyerek nyugalmi helyzetben lévő, 3 m-es kötelű hintán ül. A gyerek barátja húzza oldalra, hogy a hinta kötele 36^0-os szöget alkosson a függőlegessel. Határozzuk meg mekkora munkára volt ehhez szükség! A feladatot a munka definíciójának felhasználásával oldja meg!

Megoldás: Jelölje K a kötélerőt, α a kötél függőlegessel bezárt szögét, m a gyerek tömegét. Első lépésként azt a szögfüggő erőt kell meghatározni, amellyel a barátja F erővel vízszintes irányban húzza. Mivel egyensúlyi állapotokon keresztüli mozgásról van szó az erőkre felírhatjuk, hogy a függőleges komponensekre

$$K\cos\alpha = mg, \tag{4.3.1}$$

a vízszintes komponensekre

$$K\sin\alpha = F. \tag{4.3.2}$$

Innen az F erő:

$$F = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha. \tag{4.3.3}$$

A vízszintes irányú elmozdulás két szöghöz $\alpha + \mathrm{d}\alpha$ és az α szögekhez tartozó tartozó x koordináták különbsége, azaz

$$\mathrm{d}x = l\sin(\alpha + \mathrm{d}\alpha) - l\sin\alpha = l\cos\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha, \tag{4.3.4}$$

ahol felhasználtuk, hogy kis szögekre érvényesek a

$$\cos(\mathrm{d}\alpha) = 1, \tag{4.3.5}$$

$$\sin(\mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}\alpha \tag{4.3.6}$$

közelítések. Az elemi munka kifejezése

$$\mathrm{d}W = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot l\cos\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha = mgl\sin\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha. \tag{4.3.7}$$

amellyel a teljes végzett munka:

$$W = \int_0^\alpha mgl\sin\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha = mgl(1-\cos\alpha). \tag{4.3.8}$$

4.4. Feladat: (HN 6B-39) Egy 48 km/h sebességgel egyenletesen haladó gépkocsira a légellenállás 900 N erővel hat. Mekkora teljesítménnyel dolgozik a motor a légellenállás leküzdésére?

Megoldás: A teljesítmény

$$P = \frac{dW}{dt}, \tag{4.4.1}$$

ahol a dW elemi munka

$$dW = \mathbf{F}\, d\mathbf{r}. \tag{4.4.2}$$

Ezt behelyettesítve a teljesítmény

$$P = \mathbf{F}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{v} = 12000\,\mathrm{W}. \tag{4.4.3}$$

4.5. Feladat: (HN 6C-57) Egy testet a koordinátarendszer origójából egyenes vonalban állandó $\mathbf{F} = f_1\hat{\mathbf{x}} + f_2\hat{\mathbf{y}}$ ($f_1 = 2$N; $f_2 = 4$N) erővel az $\mathbf{r} = s_1\hat{\mathbf{x}} + s_2\hat{\mathbf{y}}$ ($s_1 = 1$m; $s_2 = 5$m) helyre viszünk. (Az egyenesvonalú egyenletes mozgás fenntartásához természetesen egyéb kényszererők is fellépnek.) Határozzuk meg az $\mathbf{F}$ erő munkáját

(a) közvetlenül az $\mathbf{F}\Delta\mathbf{r}$ skaláris szorzattal,

(b) az $|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta$ szorzattal!

Megoldás:

(a) A munkát a skaláris szorzattal számolva

$$W = f_1 s_1 + f_2 s_2 = 22\,\mathrm{J} \tag{4.5.1}$$

adódik.

(b) Az erő nagysága $|\mathbf{F}| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \sqrt{20}$ N, míg az elmozdulás nagysága $|\Delta\mathbf{r}| = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} = \sqrt{26}$ m. A két vektor által bezárt szög

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{F}\Delta\mathbf{r}}{|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|} = \frac{22}{\sqrt{20}\sqrt{26}}. \tag{4.5.2}$$

A kiszámolt értékeket összeszorozva $W = |\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta = 22$ J.

4.6. Feladat: (HN 6C-58) Egy fiú a $m_0 = 3$ kg tömegű, $l_0 = 2$ m hosszúságú hajlékony láncot egyik végénél fogva úgy tartja, hogy a másik vége éppen a leér a földre.

(a) Határozzuk meg, hogy miként változik a gyerek által kifejtett erő, ha a láncot egyenletes sebességgel s távolsággal lejjebb ereszti!
(b) A $W = \sum_i \mathbf{F}_i \Delta \mathbf{s}_i$ összegzés vagy a $W = \int \mathbf{F} d\mathbf{s}$ integrál felhasználásával számítsuk ki azt a munkát, amit a gyerek végez, míg a teljes láncot a földre ereszti!

Megoldás:
(a) Jelölje $\lambda = \frac{m_0}{l_0}$ a hosszegységenkénti tömeget. Az s távolsággal lejjebb eresztett lánc azon részének tömege, amelyet még tartani kell:

$$m(s) = m_0 - \lambda s = m_0 - \frac{m_0}{l_0} s. \tag{4.6.1}$$

Az ehhez szükséges erő:

$$F(s) = \left(m_0 - \frac{m_0}{l_0} s \right) g, \tag{4.6.2}$$

amely felfele mutat.
(b) (α) A gyerek által végzett munka a görbe alatti terület kiszámolásával. Mivel az $F(s)$ erő az s távolság lineáris függvénye, így az $F(s)$ egyenes, valamint az x és az y tengely által határolt derékszögű háromszög területét kell kiszámolni. A háromszög alapja l_0, a magassága $F(s = 0) = m_0 g$, így a terület $\frac{1}{2} m_0 g l_0$. Figyelembe véve, hogy az elmozdulás a ható erővel ellentétes előjelű a végzett munka:

$$W = -\frac{1}{2} m_0 g l_0. \tag{4.6.3}$$

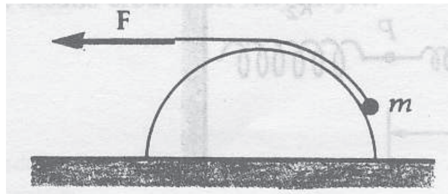
(β) A gyerek által végzett munka integrállal:

$$W = -\int_0^{l_0} F(s) ds = -\int_0^{l_0} \left(m_0 - \frac{m_0}{l_0} s \right) g ds = -\frac{1}{2} m_0 g l_0. \tag{4.6.4}$$

4.7. Feladat: (HN 6C-59) * A 18. ábrán látható súrlódásmentes félhenger aljáról a tetejére húzunk fel egy m tömegű testet a henger tetején átvetett kötél segítségével.
(a) Határozzuk meg a kötélerőt a hely függvényében!
(b) Az $\int \mathbf{F} d\mathbf{s}$ integrál segítségével határozzuk meg azt a munkát, ami a testnek a henger aljáról a tetejéig való egyenletes sebességű felhúzásához szükséges! A henger sugara R.

Megoldás:
(a) A húzás egyensúlyi állapotokon keresztül történik, ami azt eredményezi, hogy minden pillanatban $v = 0$ sebességet tételezünk fel. Jelölje φ a tömegponthoz húzott sugár és az x tengely által bezárt szöget. Az mg súlyerő mindig y irányú, az ébredő N támaszerő kifele mutató radiális irányú, a K kötélerő érintő irányú. Így a testre ható erők y komponenseire

$$0 = mg - N \sin \varphi - K \cos \varphi, \tag{4.7.1}$$



18. ábra.

x komponenseire

$$0 = K\sin\varphi - N\cos\varphi \tag{4.7.2}$$

összefüggések állnak fenn. Ezekből a kötélerő:

$$K(\varphi) = \frac{mg}{\cos\varphi(1+\mathrm{tg}^2\varphi)} = mg\cos\varphi. \tag{4.7.3}$$

(b) Az elmozdulás a henger felületén (a keresztmetszetet tekintve a kör kerületén) lehetséges, amely kis $\mathrm{d}\varphi$ szög esetén

$$ds = R\mathrm{d}\varphi. \tag{4.7.4}$$

A végzett munka a $W = \int F_s \mathrm{d}s$ definíció alapján

$$W = \int_0^{90^0} K(\varphi)R\mathrm{d}\varphi = \int_0^{90^0} mgR\cos\varphi\mathrm{d}\varphi = mgR, \tag{4.7.5}$$

ahogy az várható is volt.

4.8. Feladat: (HN 6C-73) * A 4 kg tömegű, nyugalomban lévő testet a rá ható változó erő az $x = 2t - 3t^2 + t^3$ függvény szerint mozgat. (Az x-et méterben, a t-t másodpercben mérjük.) Határozzuk meg, hogy mekkora munkát végez ez az erő a mozgás első három másodpercében!

Megoldás: A test sebessége, mint az idő függvénye:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 2 - 6t + 3t^2. \tag{4.8.1}$$

A 3. másodpercben a sebesség $v(3\mathrm{s}) = 11$ m/s. A végzett munka – figyelembe véve, hogy a test nyugalomból indult –

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = 242\,\mathrm{J}. \tag{4.8.2}$$

4.9. Feladat: (HN 6C-75) Az m tömegű test a nehézségi erő hatására szabadon esik. Mutassuk meg, hogy h távolság megtétele alatt a nehézségi erő átlagos teljesítménye: $P_{\text{átl}} = m\sqrt{g^3h/2}$!

Megoldás: Az eső test sebessége $v = gt$, kinetikus energiája

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2. \tag{4.9.1}$$

A h magasságból történő eséshez tartozó idő $t = \sqrt{2h/g}$. A teljesítmény – a behelyettesítések elvégzése után –

$$P = \frac{E}{t} = m\sqrt{\frac{g^3h}{2}}. \tag{4.9.2}$$

Ez igazolja a feladat állítását.

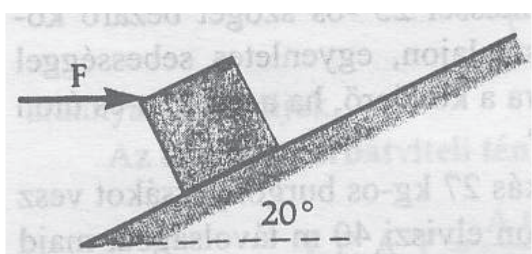
Munkatétel

4.10. Feladat: (HN 6B-23) A 19. ábra szerint 2 kg-os testet vízszintes 27 N nagyságú erővel tolunk fel egy 20^0-os lejtőn. A csúszási súrlódási együttható a lejtő és a test között 0,180.

(a) Mekkora a test gyorsulása?

(b) Határozzuk meg a kinematikai egyenletek felhasználásával a nyugalomból induló test sebességét abban a pillanatban, amikor 3 m-t tett meg a lejtőn felfelé!

(c) Válaszoljunk a (b) kérdésre a munkatétel alkalmazásával!



19. ábra.

Megoldás: Jelölések: $m = 2$ kg; $F = 27$ N; $\alpha 20^0$ és $\mu = 0,180$.

(a) A mozgásegyenletek felírásához bontsuk fel az F erőt lejtőirányú, felfele mutató ($F\cos\alpha$) és lejtőre merőlegesen lefele mutató ($F\sin\alpha$) komponensekre. A felfele mozdulást pozitív előjelűnek tekintve a lejtő irányú mozgásegyenlet

$$ma = F\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu N. \tag{4.10.1}$$

A N támaszerő a

$$0 = N - mg\cos\alpha - F\sin\alpha \tag{4.10.2}$$

egyenletből fejezhető ki. A két egyenletből a gyorsulás

$$a = \frac{F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)}{m} - g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha = 6,74\,\mathrm{m/s^2}. \tag{4.10.3}$$

(b) Az s út megtétele utáni sebesség

$$v = \sqrt{2sa} = 6,36\,\mathrm{m/s}. \tag{4.10.4}$$

(c) A testre ható lejtőirányú (felfele mutató) eredő erő

$$F' = F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha, \tag{4.10.5}$$

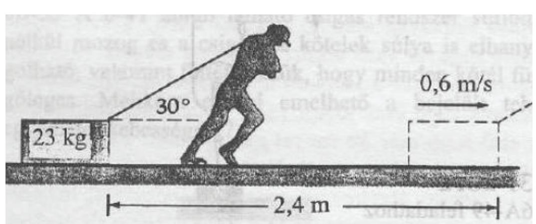
amelynek munkája változtatja meg a test mozgási energiáját

$$\frac{1}{2}mv^2 = F's = (F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha)\,s. \tag{4.10.6}$$

Innen a v sebesség

$$v = 6,36\,\mathrm{m/s}. \tag{4.10.7}$$

4.11. Feladat: (HN 6B-28) A 20. ábrán látható ember nyugalmi helyzetből indulva 2,4 m távolságra húz el egy 23 kg-os ládát az érdes ($\mu = 0,5$) padlón. A láda végsebessége 0,6 m/s. A munkatétel alkalmazásával határozzuk meg, hogy mekkora állandó erőt fejtett ki az ember?



20. ábra.

Megoldás: A testre ható erő – ez végzi a gyorsítást – vízszintes komponense:

$$F\cos\alpha - \mu N, \tag{4.11.1}$$

ahol N az asztaltól a testre ható támaszerő:

$$N = mg - F\sin\alpha. \tag{4.11.2}$$

A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W, \tag{4.11.3}$$

ahol W a testen végzett munka, v_1 a kezdeti, v_2 végsebesség. A munka kifejezése most

$$W = (F\cos\alpha - \mu N)s, \tag{4.11.4}$$

ahol az $s = 2,4$ m a megtett út. Figyelembe véve, hogy $v_1 = 0$, a fenti kifejezésekből a hatóerőre

$$F = \frac{\mu mgs + \frac{1}{2}mv_2^2}{s(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} = 104,6\mathrm{N} \tag{4.11.5}$$

adódik.

4.12. Feladat: (HN 8B-29) Egy 5 g tömegű 700 m/s sebességű golyó behatol egy rögzített fakockába és megáll benne. Tegyük fel, hogy a fakocka $8\cdot 10^3$ N nagyságú állandó erőt fejt ki a golyóra, míg az meg nem áll. Határozzuk meg
(a) mennyi idő alatt áll meg a golyó?
(b) milyen mélyen hatol be a fába?
(c) mennyi munkát végez a fakocka, amíg a golyó meg nem áll?
(d) mennyivel változik meg a golyó mozgási energiája?

Megoldás: A koordinátarendszer tengelye mutasson balról jobbra. Jelöljük az adatokat: $m = 5$ g; $v_0 = 700$ m/s (tételezzük fel, hogy a golyó balról jobbra halad) és így $F = -8\cdot 10^3$ N.
(a) Először a golyó gyorsulását számoljuk, amely

$$a = \frac{F}{m} = -1,6\cdot 10^6\,\mathrm{m/s^2}. \tag{4.12.1}$$

A megállásig eltelt idő a $v(t) = 0 = at + v_0$ összefüggésből

$$t = \frac{v_0}{-a} = 4,375\cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}. \tag{4.12.2}$$

(b) A kiszámolt adatok felhasználásával a megtett út

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0,153\,\mathrm{m}. \tag{4.12.3}$$

(c) A fakocka által végzett munka

$$W = F \cdot s = -1225\,\mathrm{J}. \tag{4.12.4}$$

(d) A golyó kinetikus energiájának megváltozása

$$\Delta E_k = W = -1225\,\mathrm{J}. \tag{4.12.5}$$

4.13. Feladat: A d vastagságú deszkába m tömegű v_0 sebességű lövedék csapódik. Mekkora lesz a másik oldalon kilépő lövedék v sebessége, ha
(a) a deszkában állandó a ható F erő,
(b) a deszkában a behatolási mélységtől függő $F(x) = cx^2$ erő fékezi? (A c konstans paraméter.)

Megoldás: A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W, \tag{4.13.1}$$

ahol W a testen végzett munka. Ami az a, esetben:

$$W = -Fd, \tag{4.13.2}$$

és a b, esetben:

$$W = -\int_0^d cx^2 dx = -\frac{1}{3}cd^3. \tag{4.13.3}$$

Ezekkel a sebességek: a,

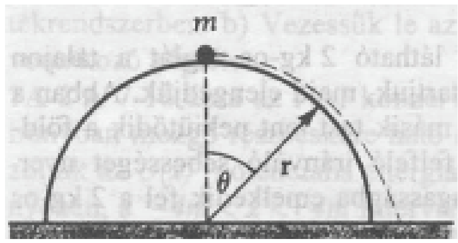
$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - Fd\right)}, \tag{4.13.4}$$

és b,

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{3}cd^3\right)}. \tag{4.13.5}$$

Munkavégzés konzervatív erőtérben. Potenciális energia

4.14. Feladat: (HN 7B-18) Egy kicsiny, m tömegű test a sima, r sugarú félgömb tetején nyugszik. A nyugalmi helyzetéből kissé kimozdítva, súrlódásmentesen lecsúszik a gömbön. Mekkora a függőlegessel bezárt szög , amikor a test elhagyja a gömb felszínét?



21. ábra.

Megoldás: A potenciális energia zérus szintje legyen a félgömb alján. Így a helyzeti energia mozgás kezdetén $E_{p_1} = mgr$, a kinetikus energia $E_{k_1} = 0$ mivel a test áll. A felülettől történő elválás pillanatában: $E_{p_2} = mgr\cos\theta$, a mozgási energia $E_{k_2} = \frac{1}{2}mv^2$. A mozgás során nincs súrlódás és közegellenállás, így a mechanikai energia megmaradó mennyiség, azaz írhatjuk:

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}. \tag{4.14.1}$$

Behelyettesítés után:

$$mgr = \frac{1}{2}mv^2 + mgr\cos\theta. \tag{4.14.2}$$

A körmozgás feltétele:

$$\frac{mv^2}{r} = mg\cos\theta - N, \tag{4.14.3}$$

ahol a jobboldal első tagja a súlyerő radiális komponense, az N a támaszerő. Az elválás pillanatában:

$$N = 0. \tag{4.14.4}$$

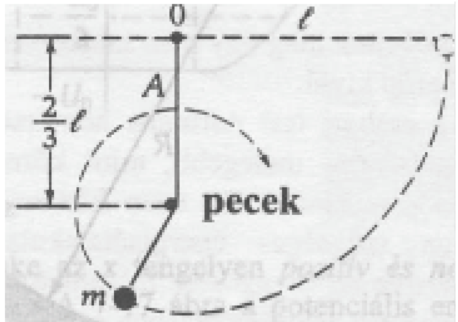
Az egyenletek megoldása:

$$\cos\theta = \frac{2}{3} \;\rightarrow\; \theta = 48^0. \tag{4.14.5}$$

4.15. Feladat: (HN 7B-21) Egy m tömegű testet l hosszúságú kötélre ingaként felfüggesztünk. A test vízszintes helyzetből indul. Az O felfüggesztési ponttól $2/3l$ távolságban kicsiny pöcköt helyeztünk el, melybe a kötél lengése során beakad. Így a test a legalsó pont elérése után egy $1/3l$ sugarú függőleges körpályára tér át. Határozzuk meg a fonalat feszítő erőt az A pontban, ami a pöcök elérése utáni legmagasabb helye a testnek!

Megoldás: A potenciális energia zérus szintje legyen az A pont magasságában. Így a mechanikai energia megmaradás tétele miatt egyszerűen

$$mg\frac{1}{3}l = \frac{1}{2}mv^2. \tag{4.15.1}$$



22. ábra.

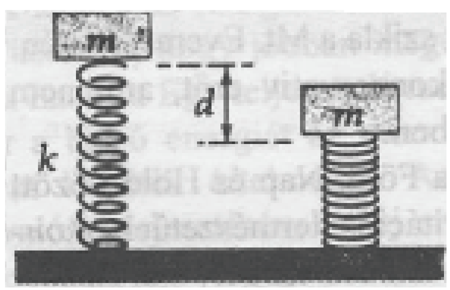
Másrészt a pecek körüli körmozgásra az A pontban az

$$m\frac{v^2}{\frac{1}{3}l} = K + mg \tag{4.15.2}$$

összefüggés írható, ahol K a kötélerő. A két egyenletből

$$K = mg. \tag{4.15.3}$$

4.16. Feladat: (HN 7A-10) Egy m tömegű tégla úgy van felerősítve, hogy a k rugóállandójú rugót éppen csak érinti. A téglát ekkor elengedjük nyugalmi helyzetéből. Határozzuk meg, hogy



23. ábra.

milyen d távolságra jut el a tégla az elengedés után!

Megoldás: Mivel a mozgás során nincs súrlódás és közegellenállás, a mechanikai energia megmarad. Azaz a kezdeti kinetikus energia E_{k_1} és potenciális energia E_{p_1} összege egyenlő a tekintett mozgás végi kinetikus E_{k_2} és potenciális energia E_{p_2} összegével:

$$E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}. \tag{4.16.1}$$

Mivel a test kezdetben és az alsó helyzetben is áll, így $E_{k_1} = 0$ és $E_{k_2} = 0$. A helyzeti energia zérus pontját a talajra helyezve $E_{p_1} = mgh$, ahol h a tégla talajtól való távolsága. Az E_{p_2} a tégla alsó helyzethez tartozó helyzeti energiájából és a rugalmas energiából áll, azaz $E_{p_2} = mg(h-d)+\frac{1}{2}kd^2$. A fenti egyenletbe helyettesítve:

$$mgh = mg(h-d)+\frac{1}{2}kd^2. \tag{4.16.2}$$

Ebből a d összenyomódás mértéke:

$$d = \frac{2mg}{k}. \tag{4.16.3}$$

(*Megjegyzés:* Természetesen ugyanez az eredmény adódik, ha pl. a felső helyzetet választjuk a potenciális energia zérus pontjának.)

4.17. Feladat: A völgy fölött h magasságban átvezető viaduktról gumiköteleken ugrálnak alá (bungee jumping). Milyen L hosszúságúnak válassza az m tömegű ugró a k direkció erejű gumikötelet, hogy a talajt éppen érintse? (Az ugró kiterjedése legyen pontszerű.)

Megoldás: Az ugró a mozgás elején és a talaj érintése pillanatában áll, így mozgási energiája mindkét esetben zérus. Így a kezdeti mgh helyzeti energia – a völgy alját zérus szintnek véve – a gumikötélben tárolódó rugalmas energiává alakul, azaz:

$$mgh = \frac{1}{2}k(h-L)^2. \tag{4.17.1}$$

Itt a $h-L$ a gumikötél megnyúlása. Az egyenlet megoldása:

$$L = h \pm \sqrt{\frac{2mgh}{k}}. \tag{4.17.2}$$

Innen a fizikailag értelmes megoldás, így a kezdeti (beállítandó) hossz:

$$L = h - \sqrt{\frac{2mgh}{k}}. \tag{4.17.3}$$

4.18. Feladat: * Az m_0 tömegű l_0 hosszúságú lánc a földön hever. A végét elkezdjük állandó v_0 sebességgel emelni. a, Mekkora erőt kell ehhez kifejteni? b, Mekkora a végzett összes munka, amikor a kötél vége éppen elhagyja a talajt?

Megoldás: a, Tekintsük a közbenső t időpontot, amikor már v_0t hossz felemelkedett és v_0 sebességű. E pillanatban az m tömegű darabnak a helyzeti energiája:

$$E_p(t) = \frac{1}{2}mgh = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{m_0}{l_0}v_0t}_{m}\, g \underbrace{v_0t}_{h} \tag{4.18.1}$$

tömegű darabra. Másrészt ennek az m tömegű darabnak a kinetikus energiája:

$$E_k(t) = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2}\frac{m_0}{l_0} v_0 t v_0^2. \tag{4.18.2}$$

A teljes energia:

$$E(t) = \frac{1}{2}\frac{m_0}{l_0} v_0^2 t^2 g + \frac{1}{2}\frac{m_0}{l_0} v_0^3 t, \tag{4.18.3}$$

amelyből a $P(t)$ teljesítmény:

$$P(t) = \frac{dE}{dt} = \frac{m_0}{l_0} v_0^2 t g + \frac{1}{2}\frac{m_0}{l_0} v_0^3. \tag{4.18.4}$$

A $P(t) = F\,v$ összefüggésből a láncra

$$F(t) = \frac{P(t)}{v_0} = \frac{m_0}{l_0} v_0 g t + \frac{1}{2}\frac{m_0}{l_0} v_0^2 \tag{4.18.5}$$

erővel kell hatni. b, A végzett munka egyszerűen kiszámolható úgy, hogy a lánc tömegközéppontja $\frac{l_0}{2}$ magasságra emelkedett, másrészt a lánc sebessége v_0. A helyzeti energiája $\frac{m_0 g l_0}{2}$, a mozgási energiája $\frac{1}{2} m_0 v_0^2$, azaz

$$W = \frac{m_0 g l_0}{2} + \frac{1}{2} m_0 v_0^2. \tag{4.18.6}$$

Megjegyzés: E munka a következőképpen is kiszámolható. A felemeléshez szükséges idő: $t_f = \frac{l_0}{v_0}$. A munka $W = \int F\,dx = \int F\,v\,dt$ alapján:

$$W = \int_0^{\frac{l_0}{v_0}} \left(\frac{m_0}{l_0} v_0 g t + \frac{1}{2}\frac{m_0}{l_0} v_0^2 \right) v_0 dt = \frac{m_0 g l_0}{2} + \frac{1}{2} m_0 v_0^2. \tag{4.18.7}$$

Energiatétel

4.19. Feladat: Egy 60 kg-os láda 4 m magasról lecsúszik egy a vízszintessel 30^0-os szöget bezáró lejtőn. Mekkora a súrlódási erő munkája ezalatt, ha a láda 5 m/s sebességet ér el?

Megoldás: Jelölések: $m = 60$ kg, $h = 4$ m, $\alpha = 30^0$ és $v = 5$ m/s. A mechanikai energia megmaradást "elrontó" disszipatív erő munkáját a következőképpen tudjuk figyelembe venni:

$$U_{p_2} + E_{k_2} = U_{p_1} + E_{k_1} + W, \tag{4.19.1}$$

ahol végső potenciális és kinetikus energiát összegét (mechanikai energia) úgy kapjuk, hogy a kezdeti potenciális és kinetikus energiához hozzáadjuk a súrlódási végzett munkát. Mivel a kezdeti mechanikai energia nagyobb mint a végső, biztosak lehetünk benne, hogy W negatív. A potenciális energia zérus szintjét a lejtő aljára a jelen esetre a következő egyenlet írható:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh + W. \tag{4.19.2}$$

Az adatok behelyettesítése után

$$W = -1650\,\mathrm{J}. \tag{4.19.3}$$

4.20. Feladat: Az α hajlásszögű, μ súrlódási együtthatójú lejtő alján felfelé lökünk v_0 sebességgel egy m tömegű testet. A test a mozgás tetőpontját elérve visszacsúszik. Mekkora lesz a sebessége a lejtő alján? A feladatot oldjuk meg a

(a) dinamikai egyenletek megoldásával és

(b) az energiatétel felhasználásával!

Megoldás:

(a) A felfele mozgásnál legyen a koordinátatengely irányítása pozitív a felfele irányban. Ekkor a test lejtőirányú mozgásegyenlete

$$ma_{fel} = -mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha, \tag{4.20.1}$$

amelyből a gyorsulás

$$a_{fel} = -g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha. \tag{4.20.2}$$

A felfele mozgás ideje a $0 = v_0 + a_{fel}t$ egyenletből

$$t_{fel} = \frac{v_0}{-a_{fel}}, \tag{4.20.3}$$

amellyel a idő alatt a megtett út

$$s = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}. \tag{4.20.4}$$

A lefele csúszásnál fordítsuk meg a koordinátatengelyt, a pozitív irányítás mutasson lefele. Ekkor a mozgásegyenlet

$$ma_{le} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha, \tag{4.20.5}$$

amelyből a gyorsulás

$$a_{le} = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha. \tag{4.20.6}$$

A lefele mozgás ideje a $v = a_{le}t$ egyenletből

$$t_{le} = \frac{v}{a_{le}}, \tag{4.20.7}$$

amely idő alatt a megtett s út

$$s = \frac{1}{2}a_{le}t^2 = \frac{v^2}{2a_{le}}. \tag{4.20.8}$$

E két egyenletből a sebesség a lejtő alján

$$v = \sqrt{2sa_{le}}. \tag{4.20.9}$$

Az s és a_{le} korábban kapott kifejezéseit behelyettesítve a sebességre a

$$v = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}} \tag{4.20.10}$$

eredmény adódik.

(b) Az energiatétel azt állítja, hogy a végső kinetikus és potenciális energia összege egyenlő a kezdeti kinetikus és potenciális energia összegével plusz a testen végzett munkával, azaz

$$U_{p2} + E_{k2} = U_{p1} + E_{k1} + W. \tag{4.20.11}$$

A felfele mozgásnál $U_{p1} = 0$; $E_{k1} = \frac{1}{2}mv_0^2$; $U_{p2} = mgs\sin\alpha$; $E_{k2} = 0$ és $W = -\mu mgs\cos\alpha$. Egy egyenletbe összeírva

$$mgs\sin\alpha = \frac{1}{2}mv_0^2 - \mu mgs\cos\alpha. \tag{4.20.12}$$

Ebből az s út

$$s = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}. \tag{4.20.13}$$

A lefele csúszásnál

$$U_{p2} + E_{k2} = U_{p1} + E_{k1} + W, \tag{4.20.14}$$

ahol $U_{p1} = mgs\sin\alpha$; $E_{k1} = 0$; $U_{p2} = 0$; $E_{k2} = \frac{1}{2}mv^2$ és $W = -\mu mgs\cos\alpha$. Egy egyenletbe írva

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgs\sin\alpha - \mu mgs\cos\alpha. \tag{4.20.15}$$

Az s utat a (4.20.13) egyenletből behelyettesítve a sebességre a fentiekkel egyező

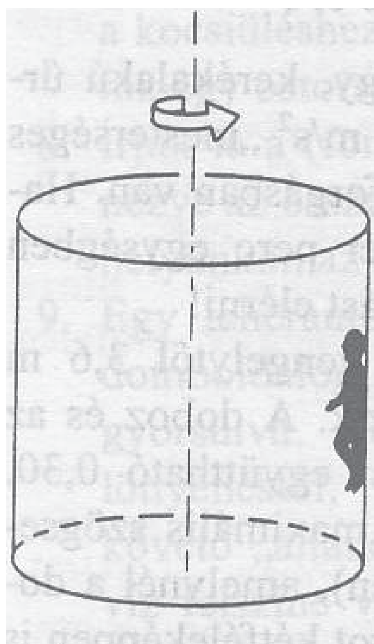
$$v = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}} \tag{4.20.16}$$

eredményt kapjuk.

5. Feladatok a gyorsuló koordináta-rendszerek tárgyköréből

Centrifugális erő

5.1. Feladat: (HN 13B-20) Egy népszerű vidámparki mutatványnál a látogatók egy függőleges tengely körül forgó henger belső falának támaszkodnak a 24. ábrának megfelelően. Ezután a padlót lesüllyesztik, és hagyják, hogy a látogatók a centrifugális erőtől a falhoz "odaszögezve" és a súrlódási erő következtében a lecsúszásztól védve a falon maradjanak. A henger R sugarának, az ω szögsebességnek és a g nehézségi gyorsulásának függvényében határozzuk meg azt a legkisebb μ nyugalmi súrlódási együtthatót, amely a lecsúszást megakadályozza. A feladatot forgó vonatkoztatási rendszerben oldjuk meg!



24. ábra.

Megoldás: A forgó vonatkoztatási rendszerben a falhoz "odaszögezett" látogatóra négy erő hat. A centrifugális erő (tehetetlenségi erő), amely radiálisan kifelé mutat és nagysága $F_{cf} = mR\omega^2$. A falon radiálisan befelé mutat az N támaszerő, amelynek nagysága pontosan $mR\omega^2$. Függőlegesen lefelé hat az mg súlyerő, ezzel ellentétesen az F_s súrlódási erő, és a kettő egymással egyenlő. Az fentieket matematikalag összefoglalva:

$$mg = F_s = \mu N = \mu mR\omega^2, \tag{5.1.1}$$

ahonnan

$$\mu = \frac{g}{R\omega^2}. \tag{5.1.2}$$

5.2. Feladat: Egy $M = 1,499 \cdot 10^{25}$ kg tömegű, $R = 10000$ km sugarú bolygó északi sarkán $k = 100$ N/m direkciós erejű rugóra $m = 1$ kg tömegű testet lógatunk. A bolygó $\omega = 10^{-4}$ 1/s szögsebességgel forog.
(a) Mekkora a rugó megnyúlása?
(b) Ezt követően a mérést az egyenlítőn megismételjük. Mennyi ekkor a rugó megnyúlása?

Megoldás:
(a) A bolygó északi sarkán végzett mérés során

$$\gamma \frac{mM}{R^2} = k\Delta x, \tag{5.2.1}$$

ahol Δx a rugó megnyúlása, amely

$$\Delta x = \gamma \frac{mM}{kR^2} = 0,1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{mm}. \tag{5.2.2}$$

(b) Az egyenlítőn figyelembe kell vennünk a centrifugális erőt, amellyel az egyenlet úgy módosul, hogy

$$\gamma \frac{mM}{R^2} - mR\omega^2 = k\Delta x'. \tag{5.2.3}$$

Innen a $\Delta x'$ megnyúlás

$$\Delta x' = \gamma \frac{mM}{kR^2} - \frac{mR\omega^2}{k} = 0,099\,\mathrm{m} = 99\,\mathrm{mm}, \tag{5.2.4}$$

azaz a rúgó megnyúlása 1 mm-rel kevesebb.

5.3. Feladat: (HN 14C-39) Az ω szögsebességgel forgó ringlispíl középpontjától r távolságra lévő helyen h magasságból egy tárgyat ejtenek a padlóra. A mozgást a ringlispíl vonatkoztatási rendszeréből vizsgálva mutassuk meg, hogy az elejtés talppontja és a becsapódási pont közötti távolság jó közelítéssel $\omega^2 rh/g$. Milyen feltételezésekkel kell élni a feladat megoldása során?

Megoldás: A tárgy

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{5.3.1}$$

idő alatt esik. A forgó vonatkoztatási rendszerben az

$$a_{cf} = r\omega^2 \tag{5.3.2}$$

centrifugális gyorsulása lesz, amely kifele mutató radiális irányú. E gyorsulással az elejtés talppontja és a becsapódási pont közötti távolság

$$\Delta s = \frac{1}{2}a_{cf}(\Delta t)^2 = \frac{\omega^2 rh}{g}. \tag{5.3.3}$$

A forgás közbeni szögelfordulás

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t. \tag{5.3.4}$$

Ha azt tekintjük, hogy a test az álló rendszerből nézve érintő irányban $r\omega$ sebességgel egyenesvonalú egyenletes mozgást végez az elejtés után, akkor az ehhez tartozó elmozdulás

$$\Delta x = r\omega\Delta t. \tag{5.3.5}$$

Az ehhez az elmozduláshoz tartozó α központi szög

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\Delta x}{r} = \omega\Delta t. \tag{5.3.6}$$

Ahhoz, hogy φ és α közelítőleg megegyezzenek egymással, az $\omega\Delta t << 1$ feltétel teljesülése szükséges.

Coriolis-erő

5.4. Feladat: (HN 14C-30) Írjuk le, hogyan tudna egy személy a forgásban lévő ringlispíl lapján járni úgy, hogy a rá ható Coriolis-erő és a centrifugális erő egymással egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú legyen! (A ringlispíl forogjon az óra járásával ellentétesen.)

Megoldás: Az ω szögsebességgel forgó ringlispíl origótól való R távolságú pontjában a személyre radiális kifele mutató $F_{cf} = mR\omega^2$ centrifugális erő hat. Ahhoz, hogy a Coriolis-erő radiális befele mutató legyen, ahhoz az óra járásával egyezően, az R sugarú kör érintője irányában kell v sebességgel haladnia. A Coriolis erő nagysága $F_{Co} = 2m\omega v$. A kettő

$$F_{cf} = mR\omega^2 = 2m\omega v = F_{Co} \tag{5.4.1}$$

egyenlőségéből a sebességre a

$$v = \frac{R\omega}{2} \tag{5.4.2}$$

adódik.

5.5. Feladat: Egy forgótárcsa szélén álló ember eldob egy testet vízszintesen a függőleges forgástengely irányába 10 m/s kezdősebességgel. A tárcsa percenként 600-at fordul. Mekkora a tárcsa vonatkoztatási rendszerében a test pályájának kezdeti görbületi sugara?

Megoldás: Jelölések: v = 10 m/s és f = 600 1/perc = 10 1/s. A tárcsa szögsebessége $\omega = 2\pi f$ = 62,8 rad/s. A forgó rendszerben a testet a Coriolis-erő téríti el, amelyhez tartozó gyorsulás nagysága

$$a_{Co} = 2\omega v. \tag{5.5.1}$$

Az indulás pillanatában körpályán mozog a test, amely esetén gyorsulás

$$a = \frac{v^2}{R}. \tag{5.5.2}$$

A kettő egyenlőségéből a görbületi sugár

$$R = \frac{v}{2\omega} = 0,159\,\mathrm{m}. \tag{5.5.3}$$

5.6. Feladat: (HN 14C-33) A mesterlövész balról jobbra haladó célpontra céloz. A célt követő puskacső a vízszintes síkban mozog. A puska szögsebessége 1,5 rad/s abban a pillanatban, amikor az 5 g tömegű lövedék 500 m/s sebességgel éppen kilép a csőből.

(a) A forgó rendszerben mekkora Coriolis-erő hat a lövedékre a cső elhagyásának pillanatában?

(b) Milyen irányú ez az erő?

Megoldás: Jelölések: $\omega = 1,5$ rad/s; $m = 5$ g és $v = 500$ m/s.

(a) A puska csöve az óra járásának megfelelően fordul el, így az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor függőlegesen lefele mutat. A Coriolis-erő a $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor és a $\mathbf{v}$ sebességvektorokkal

$$\mathbf{F} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \tag{5.6.1}$$

amelynek nagysága – figyelembe véve, hogy $\boldsymbol{\omega}$ és $\mathbf{v}$ egymásra merőlegesek

$$F = 2m\omega v = 7,5\,\mathrm{N}. \tag{5.6.2}$$

(b) Az erő iránya jobbról balra mutat.

5.7. Feladat: (HN 14C-38) A percenként tízet forgó ringlispíl szélén álló kislány 10 m/s vízszintes kezdősebességgel labdát dob a forgástengely felé. Úgy látja, hogy a pályagörbe jobbra kanyarodik.
(a) Számítsuk ki a pályagörbe kezdeti vízszintes görbületi sugarát!
(b) Amikor a labdát dobó kislány a ringlispíl közepe felé néz, jobbra vagy balra látja elmozdulni a távoli tájat?

Megoldás: Jelölések: A fordulatszám $f = 10$ 1/perc $= 1/6$ 1/s, amellyel a szögsebesség $\omega = 2\pi f = 1,047$ rad/s; $v = 10$ m/s.
(a) A labda Coriolis-gyorsulása

$$a_{Co} = 2\omega v, \tag{5.7.1}$$

amely éppen az elkanyarodás

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{5.7.2}$$

gyorsulása. Itt r a pályagörbe görbületi sugara. A két gyorsulás egyenlőségéből

$$r = \frac{v}{2\omega} = 9,55\,\mathrm{m}. \tag{5.7.3}$$

(b) Mivel a pályagörbe jobbra kanyarodik, így a ringlispíl az óra járásával ellentétes irányban forog. Az ilyen irányban forgó rendszerből nézve a táj balról jobbra látszik mozogni.

5.8. Feladat: A Föld napi forgása következtében az eső testek kelet felé elhajlanak.
(a) Mekkora az Egyenlítőre szabadon eső test keleti irányú gyorsulása?
(b) Számítsuk ki, hogy a becsapódás pillanatában mekkora a keleti irányú sebessége annak a testnek, amely $h = 100$ m magasból esik szabadon az Egyenlítőre!

Megoldás:
(a) Az Egyenlítőn szabadon eső testnek a Coriolis-erő következményeként – figyelembe véve, hogy a Föld ω szögsebessége és a leeső test v sebessége egymásra merőleges –

$$a(t) = 2\omega v = 2\omega g t \tag{5.8.1}$$

keleti irányú gyorsulása van.
(b) A t időtartamú esés során

$$v = \int_0^t a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^t 2\omega g t\,\mathrm{d}t = \omega g t^2 \tag{5.8.2}$$

keleti irányú sebességre tesz szert. Az esés ideje 4,47 s, $\omega = 7,27 \cdot 10^{-5}$ rad/s, $g = 10$ m/s^2 adatokkal számolva:

$$v_{kelet} = 1.45 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m/s}. \tag{5.8.3}$$