Fizika M1, 3. előadás, 2017/09/18

I. I A hőmérséklet növelésével nő a gerjentett állapot betöltési valószínűsége

- hőmérséklet növelése $\longrightarrow$ rendezetlenség növelése

  pl: szilárd $\rightarrow$ folyadék átalakulás

- termikus egyensúly leírása a QM-ban: feltevések:

① tfh. a rendszernek N energiasajátállapota (esá) van. Pl: p^+ m.m.: $N = 2$; $\hat{H}\Psi_n = E_n \Psi_n$ $(n = 0, 1)$

1 Tesla z-irányú B-térben: $\hat{H} = -\mu_p B_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_0 = -\mu_p B_0 \approx -88\,\mathrm{neV} \quad \text{(alapállapot)}$$

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \mu_p B_0 \approx +88\,\mathrm{neV} \quad \text{(gerjentett állapot)}$$

($E_1 - E_0$: "Zeeman-felhasadás")

② A rendszer valamelyik energiasajátállapotban van, de hogy melyikben, az véletlenszerű.

③ Az n-ik esá betöltési valószínűsége: (Boltzmann-elv)

$$\Pi_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}, \quad \underbrace{Z = \sum_{n'=0}^{N-1} e^{-\beta E_{n'}}}_{\text{"állapotösszeg"}}$$

Boltzmann-állandó (k_B), höm. (T)

$$k_B \approx 1{,}38 \times 10^{-23} \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2 K}} \approx 86 \frac{\mu\mathrm{eV}}{\mathrm{K}}$$

megj: (i) $k_B \cdot T$ "termikus energiaskála"

vagy "termikus fluktuációk energiaskálája"

szobahőmérsékleten: $T \approx 300\,K \to k_B T \approx 86 \frac{\mu eV}{K} \cdot 300\,K \approx 26\,meV$

(ii) $\sum_{n=0}^{N-1} \Pi_n = 1 \to$ valószínűség ✓

példa: p^+ 1 Tesla B-térben, szobahőmérsékleten

$$\underline{\underline{\Pi_0}} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_0} = \frac{1}{e^{\frac{\mu_p B_0}{k_B T}} + e^{-\frac{\mu_p B_0}{k_B T}}} \cdot e^{\frac{\mu_p B_0}{k_B T}} \approx \underline{\underline{0.5000017}}$$

$$\underline{\underline{\Pi_1}} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_1} = \frac{1}{e^{\frac{\mu_p B_0}{k_B T}} + e^{-\frac{\mu_p B_0}{k_B T}}} e^{-\frac{\mu_p B_0}{k_B T}} \approx \underline{\underline{0.4999983}}$$

$k_B T \; \cancel{86\,\mu eV}^{\approx 26\,meV} \gg E_1 - E_0 \approx 176\,neV$

→ termikus fluktuációk erősebbek a Zeeman-felhasadásnál

ezért $\Pi_0 \approx \Pi_1$.

(4) Fizikai mennyiség termikus átlaga

$$\overline{\langle \hat{m}_z \rangle} = \sum_{n=0}^{N-1} \Pi_n \langle \hat{m}_z \rangle_{\psi_n}$$

példa: p^+ 1 Tesla térben, szobahőmérsékleten

$$\overline{\langle \hat{m}_z \rangle} = \Pi_0 \underbrace{\langle \hat{m}_z \rangle_{\psi_0}}_{\mu_p} + \Pi_1 \underbrace{\langle \hat{m}_z \rangle_{\psi_1}}_{-\mu_p} = \mu_p (\Pi_0 - \Pi_1) \approx \underline{\underline{\approx 3{,}4 \times 10^{-6} \mu_p}}$$

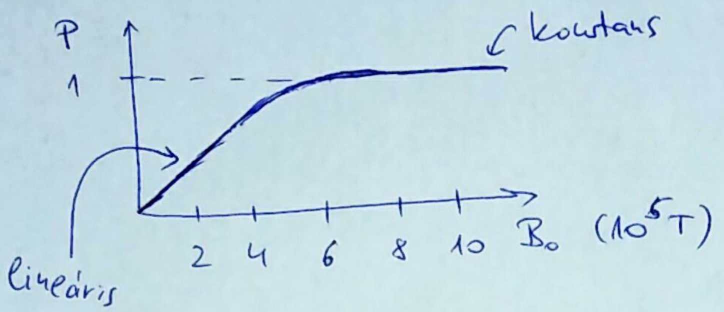
$$\overline{\langle \hat{m}_x \rangle} = \Pi_0 \underbrace{\langle \hat{m}_x \rangle_{\psi_0}}_{0} + \Pi_1 \underbrace{\langle \hat{m}_x \rangle_{\psi_1}}_{0} = 0$$

hasonlóan $\overline{\langle \hat{m}_y \rangle} = 0$

<u>elnevezés</u>: "termikus polarizáció"

$$p = \frac{\overline{\langle \hat{m}_z \rangle}}{\mu_p}, \quad \text{itt} \quad \underline{\underline{p \cong 3{,}4 \times 10^{-6}}}$$

p a B_0 függvényében, T=300K:



$$p = \tanh\left(\frac{\mu_p B_0}{k_B T}\right)$$

↑

(HF: bizonyítsd!)

• MRI: T=0K
B=1T

$$\underbrace{\uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow}_{\approx 10^{27} \text{ darab } p^+} \xRightarrow{\text{Rabi-pulzus}} \rightarrow\ \rightarrow\ \rightarrow\ \rightarrow\ \rightarrow$$

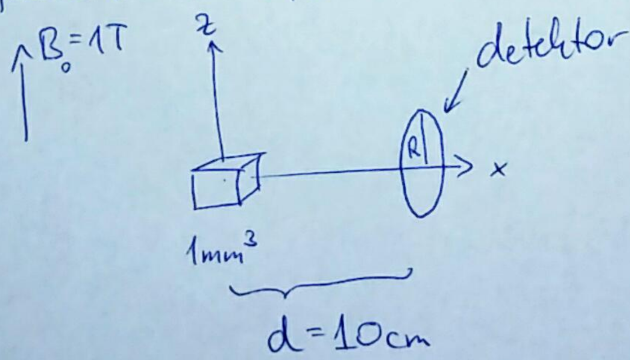
⇓

Larmor-precesszió xy síkban

T=300K $\quad \uparrow\ \uparrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \Longrightarrow \rightarrow\ \rightarrow\ \leftarrow\ \leftarrow\ \leftarrow$

↳ termikus polarizáció kicsi ⟶ detektorban indukált feszültség kicsi

• feladat: F-I/37 $\qquad$ R=5cm



(b) minta m.m-ának termikus átlagának abszolútértéke?

$$m_{össz} = n \cdot \mu_p \cdot p$$

n: H-atommagok száma $\approx 6{,}7 \times 10^{16}$

p: termikus polarizáció $\approx 3{,}4 \times 10^{-6}$

(c) $\underline{m}_{össz}(t) = ?$ a Larmor-precesszió során?

$$\underline{m}_{össz}(t) = m_{össz} \begin{pmatrix} \cos(2\pi f_L t) \\ \sin(2\pi f_L t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_L = \frac{2\mu_p B_0}{h} \approx 42{,}6\,\mathrm{MHz}$$

(d) indukált feszültség?

$$U_{ind}(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{\circ} \underline{B}_{ind}(t)\cdot \underbrace{d\underline{F}}_{dF\,\underline{e}_x} \overset{\text{becslés}}{\approx} -\frac{d}{dt}\underline{B}_{ind}(\underline{r}_k, t)\cdot \underline{e}_x \cdot \underbrace{F}_{R^2\pi}$$

$$\underline{B}_{ind}(\underline{r}_k, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\,\underline{r}_k(\underline{m}_{össz}(t)\cdot\underline{r}_k)}{r_k^5} - \frac{\underline{m}_{össz}(t)}{r_k^3}\right]$$

$$\underline{e}_x \cdot \underline{B}_{ind}(\underline{r}_k, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2\,m_{össz,x}(t)}{d^3} = \frac{\mu_0}{2\pi d^3} m_{össz}\cos(2\pi f_L t)$$

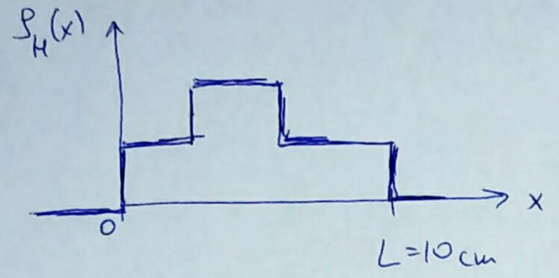
Ebből

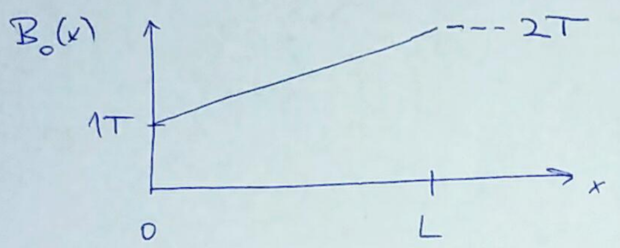
$$\underline{\underline{U(t)}} = \frac{\mu_0}{2\pi d^3}\cdot n\mu_p P \cdot 2\pi f_L \cdot \sin(2\pi f_L t)\cdot R^2\pi =$$

$$= \underline{\underline{\sin(2\pi f_L t)\cdot \underbrace{\mu_0 n \mu_p P f_L R^2 \pi}_{\approx\, \underline{\underline{1{,}35\,\mathrm{pV}}}}}} \quad (\mathrm{pV} = 10^{-12}\,\mathrm{V})$$

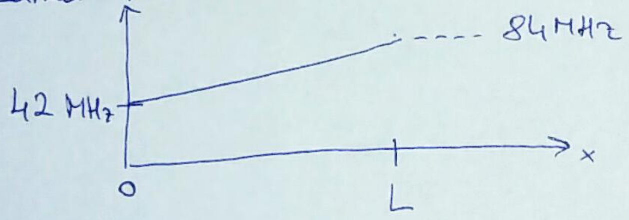
I.E Mágnesestér-gradiens teszi lehetővé a képalkotást

- feladat: 1D objektumban H-atommagok sűrűségének ($\rho_H(x)$) feltérképezése

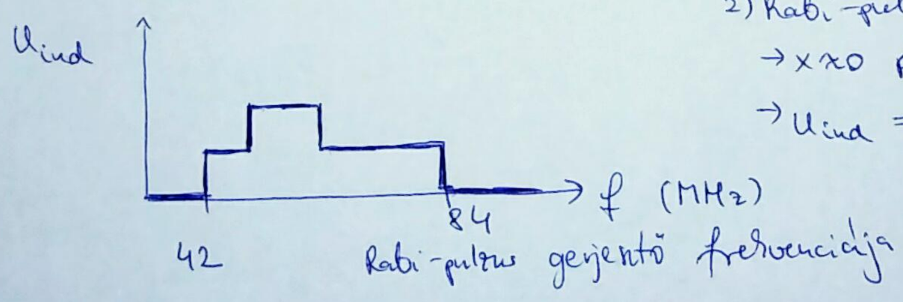




Larmor-frekvencia



indukált feszültség



mérés:

1) Rabi-pulzus f = 40MHz gerj. frekvenciával → semmi hatás → $U_{ind} = 0$
2) Rabi-pulzus f = 42MHz-cel → $x \approx 0$ p^+-ok Larmor-precesszálnak → $U_{ind} = \text{const} \cdot \rho(x=0)$
3) Rabi-pulzus f = 44MHz-cel → $x \approx 0.5$cm p^+-ok Larmor-precesszálnak → → $U_{ind} = \text{const} \cdot \rho(x = 0{,}5\text{cm})$
4) ...

$$U_{ind}(f) \sim \rho_H(x)$$

Indukált feszültség leképezi a H-magok térbeli sűrűségét.