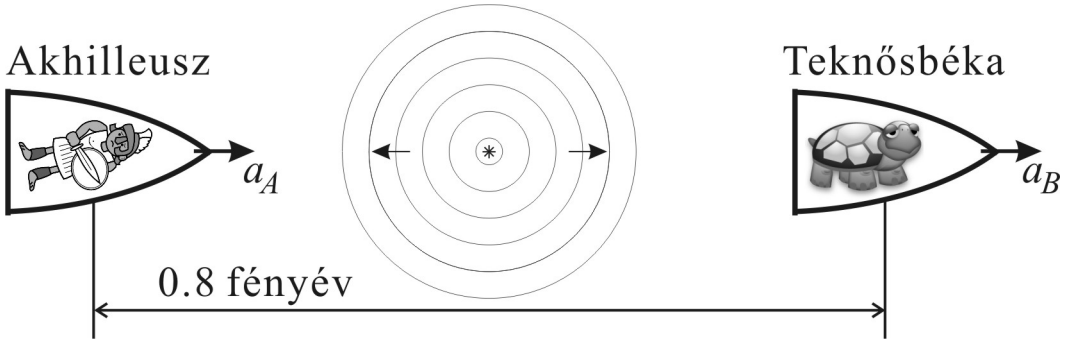
RELATIVISZTIKUS FOGÓCSKA

<u>Három meglepő eredménnyel járó gondolatkísérlet</u>

<u>1.</u> Üldözéses versenyhez készülődik a világűrben Akhilleusz és egy teknősbéka. Elhelyezkednek egymástól 0.8 fényév távolságra szabadon lebegő űrhajójukban, ahogy az 1. ábra mutatja. A félúton levő versenybíró fényimpulzussal adja meg a jelet az indulásra. A teknősbéka jobbra indul, Akhilleusznak pedig az a feladata, hogy utolérje.

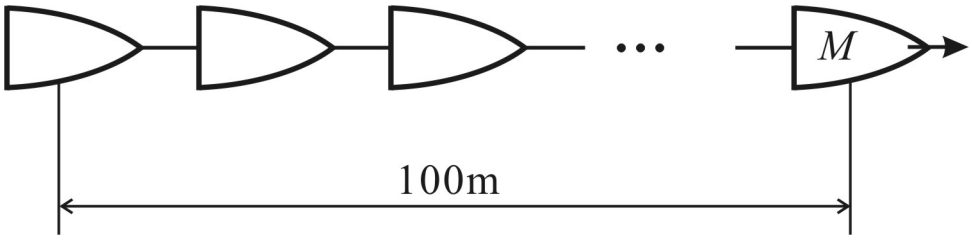


1.ábra

A teknősbéka nem ambíciózus, inkább a kényelmet választja. Pontosan földi körülményeket akar teremteni a fedélzeten, ezért állandó $a_B = g = 10\text{m/s}^2$ (saját)gyorsulásra állítja az űrhajóját. Akhilleuszban erősebb a versenyszellem, nagyobb, a_A ($> a_B$) gyorsulással iramodik a teknős után, és – hiába bizonygat Zénón mást – hamarosan utol is éri.

A verseny visszavágóján megint az 1. ábra szerint helyezkednek el. Ismét egyszerre kapják meg az indítójelet, de a teknősbéka most *kicsit* jobban rákapcsol. Ismét állandó (saját)gyorsulásra állítja űrhajóját, de most $a_B = 1.5g = 15\text{m/s}^2$ számértékűre. *Ezzel a verseny el is dőlt. Akhilleusznak, akárhogyan igyekszik is, elvi esélye sincs, hogy utolérje a teknőst.* Hogyan lehetséges ez?

<u>2.</u> Galaktikus távolságokra – gumiszalagokkal összekapcsolt – robotűrhajókból álló konvoj szállítja a teherrakományokat, a 2. ábra szerinti elrendezésben. Ezeket a robotűrhajókat úgy tervezték, hogy tetszőlegesen nagy gyorsulást kibírnak, és motorjuk képes is tetszőlegesen nagy gyorsulású mozgásra bírni őket (*gondolat*kísérlet!). Egyetlen korlátozó tényező van: a konvoj első tagja, a 2. ábrán *M*-mel jelölt „mozdony"-űrhajó olyan érzékeny vezérlőegységet szállít, amely „csupán" $10^{15}\ \text{m/s}^2$ gyorsulást bír ki. A konvoj hossza 100 méter. Az egyes robotűrhajók mozgását úgy hangolják össze, hogy az összekapcsolásukhoz használt gumiszalagok útközben még éppen ne feszüljenek meg.



2.ábra

A Galaktikus Szállítóvállalat diszpécsere két meglepő tényt jegyez fel:
(1) Ha az *M* űrhajó a benne levő vezérlőegység által még épp kibírható 10^{15} m/s^2 gyorsulással indul, akkor a robotűrhajók közötti gumiszalagok *elkerülhetetlenül* megnyúlnak.
(2) 100 helyett *90 méteres konvojt alkalmazva már nincsen gond: megoldható, hogy a gumiszalagok lazák maradjanak.* Hogyan lehetséges ez?

3. Egy szállítóvállalat pilótái azt a feladatot kapják, hogy egy törékeny anyagból készült „fényévrudat" (ami olyan, mint a méterrúd, csak a hossza 1 fényév) a Tejútrendszerből egy másik galaxisba szállítsák. A fényévrúd mentén sűrűn űrhajókat helyeznek el, amelyekhez a rudat rögzítik. Az űrhajókba pilóták ülnek, és várják az indulást. A megbeszélt indulási időpontban egy előzetesen betáplált program szerint az összes űrhajó állandó gyorsulással mozgásba lendül. Az űrhajók mozgása gondosan úgy van összehangolva, hogy szállítás közben a törékeny fényévrúdban se húzó-, se nyomófeszültség ne ébredjen.
A fényévrúd speciális festékkel van bevonva: ez induláskor még fehér színű, de az idő múlásával megszürkül, majd teljesen befeketedik.

3.ábra

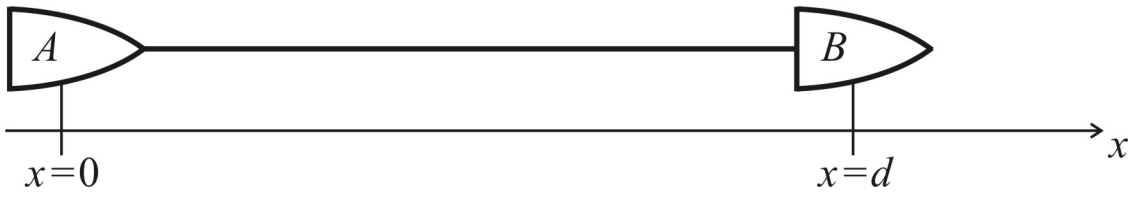
Az űrhajók pilótái – akik oldalra kinézve ellenőrzik a hozzájuk képest álló fényévrúd hozzájuk közel eső darabkájának állapotát – érdekes jelenségre lesznek figyelmesek. Mindegyikük azt tapasztalja, hogy a fényévrúd *nem egyenletesen szürkül*. Minden fényévrúd-darab menetirány szerinti hátulja világosabb, mint az eleje (ahogy a 3. ábra mutatja), ami azt jelenti, hogy a fényévrúd egyes darabjai – és így a pilóták – *nem azonos ütemben öregednek*. Hogyan lehetséges ez?

A Dewan-Beran gondolatkísérlet

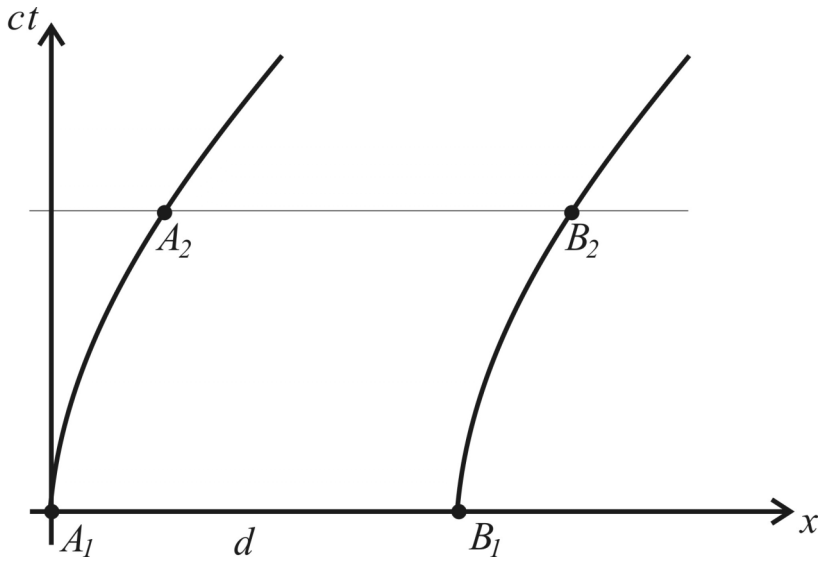
Mindhárom fenti példa tág értelemben az ún. Dewan-Beran gondolatkísérlethez [1] (közismertebb, bár kevésbé jogos nevén a „Bell-féle rakétaparadoxon“-hoz) kapcsolódik.

A Dewan-Beran gondolatkísérlet így hangzik:

Két teljesen azonos űrhajót d hosszúságú vékony cérnával kötünk össze. Az űrhajók kezdetben állnak a K inerciarendszerben, ahogy a 4. ábra mutatja. Egyszerre elindulnak (az ábrán jobbra), és teljesen azonos mozgással felgyorsulnak v végsebességre.
A „teljesen azonos mozgás“ azt jelenti, hogy a gyorsulási szakaszaik pontosan ugyanakkora sebességnövekményekből állnak, és ezekre a sebességnövekményekre – akár a K inerciarendszer koordinátaidejét, *akár az űrhajósok karóráján mutatott sajátidőt nézzük* – mindig ugyanazokban az időpontokban tesznek szert. A két űrhajó világvonalát a K inerciarendszerbeli Minkowski diagramon (5. ábra) ábrázolva az „azonos mozgások“ fogalma még könnyebben érthető: a világvonalak azonos alakú görbék, egymásnak pusztán az x-tengely mentén eltolt másai (és kezdeti meredekségük végtelen).



4.ábra

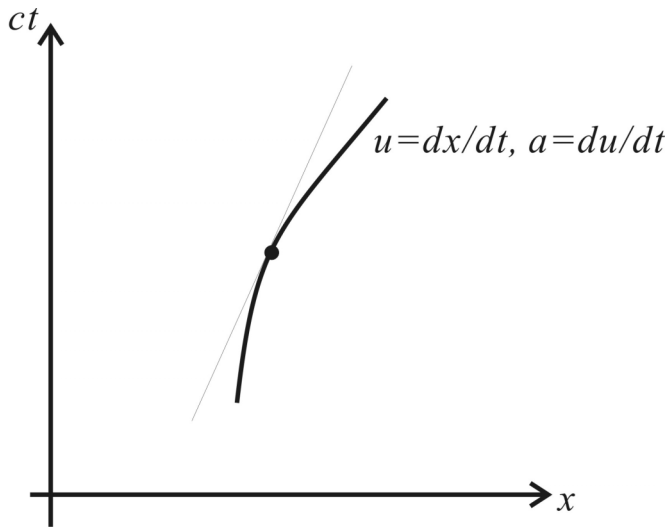


5.ábra

Mi történik a cérnával? A cérna két vége pontosan *ugyanazt a mozgást* végzi. Azt várnánk tehát, hogy a cérna egésze – anélkül hogy mechanikai feszültség ébredne benne – háborítatlanul mozog jobbra. Azonban ez lehetetlen. Az egyre gyorsabban mozgó cérna hossza ugyanis csak a K inerciarendszerből nézve marad állandó (a 5. ábrán: pl. $A_1B_1 = A_2B_2 = d$). Ez viszont – a hosszkontrakciót és a cérna egyre gyorsuló mozgását figyelembe véve – azt kell hogy jelentse, hogy *a cérna sajáthossza folyamatosan nő*. Ez természetesen mechanikai feszültségek létrejöttével is jár, tehát a cérna előbb-utóbb *elszakad*.

A 5. ábra Minkowski diagramja egyszerű, azonnal átlátható módon írja le a jelenséget, amely azonban így is bántóan ellentmond az intuíciónknak, hiszen a következő mondat igazságát vagyunk kénytelenek megemészteni: „Ha egy éppen csak megfeszített cérna két végét – a cérna hossza mentén – *pontosan ugyanolyan módon* gyorsítjuk, a cérna előbb-utóbb menthetetlenül elszakad."

A Dewan-Beran gondolatkísérlet által bemutatott jelenségnek nem dinamikai okai vannak. A cérna elszakadását a hosszkontrakció tisztán *téridőgeometriai* effektusa okozza, aminek a newtoni mechanikában nyoma sincs. A gondolatkísérlet arra hívja fel a figyelmet, hogy a hosszkontrakció nem csupán a mozgási hossz mérésének módszeréből adódó „illúzió", hanem olyan effektus, amelynek nagyon is *valódi (fizikai) következményei lehetnek*.



6. ábra

Mielőtt a cikk elején szerepelt gondolatkísérletek meglepő eredményeinek részletes magyarázatába kezdenék, teszek egy olyan feltevést, amely lényegesen egyszerűsíteni fogja a matematikai részleteket: mostantól olyan mozgásokat fogok tekinteni, amelyekben az adott tömegpont *sajátgyorsulása állandó*. Az első kérdés: milyen görbe

írja le az ilyen részecskék világvonalát egy K nyugvó laboratóriumi inerciarendszer (x,ct) Minkowski diagramján (ld. 6. ábra)?

<u>Állandó sajátgyorsulással mozgó tömegpont</u>

A sajátgyorsulás állandóságát az

$$a' = \frac{du'}{dt'} = const. \tag{1}$$

egyenlet fejezi ki, ahol a' a gyorsulás, u' a sebesség és t' az idő. Minden vesszős mennyiség a tömegpont *pillanatnyi nyugalmi rendszerében* értendő (abban a K' inerciarendszerben, amely olyan v sebességgel mozog a K-hoz képest, hogy O' origója az adott időpillanat kis környezetében éppen együtt mozog a tömegponttal).

A K és K' közötti Lorentz-féle sebességtranszformációs formula:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}. \tag{2}$$

(Annak az eseménynek a szűk környezetében tehát, amelyre az (1) egyenletet felírtuk, $u = v$, és $u' = 0$.)

Az (1) egyenletben szereplő deriválást az összetett függvény deriválási szabályával felírva:

$$a' = const. = \frac{du'}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)^2} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{3}$$

ahol az első tényezőt a (2) egyenlet u szerinti deriválásából kaptuk, a harmadikat pedig az időtágulási tényezőből. A (3) egyenletet átrendezve, az $u = v$ összefüggés felhasználásával a *gyorsulásdeficitet* kifejező alábbi differenciálegyenlethez jutunk:

$$\frac{du}{dt} = a' \cdot \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}. \tag{4}$$

(A gyorsulásdeficit elnevezés abból ered, hogy – mint a (4) egyenlet mutatja – a tömegpont K vonatkoztatási rendszerben mért gyorsulása *kisebb*, mint a newtoni fizika alapján várt a'.) Az egyenlet közvetlen integrálással kapható megoldása ($u(t = 0) = 0$ kezdőfeltétel mellett, azaz nyugalomból induló tömegpont esetén):

$$u\left(=\frac{dx}{dt}\right)=\frac{a't}{\sqrt{1+\frac{a'^2t^2}{c^2}}} \tag{5}$$

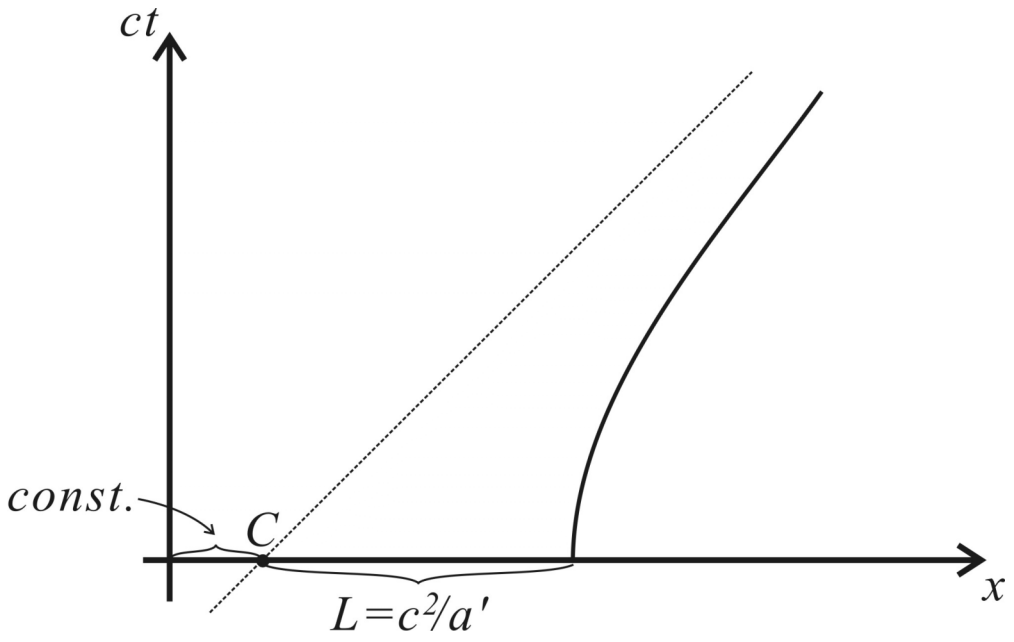
(5)-ből újbóli integrálással megkapható a világvonal alakját leíró $x(t)$ függvény:

$$x=\frac{c^2\sqrt{1+\frac{a'^2t^2}{c^2}}}{a'}+const. \tag{6}$$

Átrendezés után:

$$\frac{(x-const.)^2}{\left(c^2/a'\right)^2}-\frac{c^2t^2}{\left(c^2/a'\right)^2}=1, \tag{7}$$

a világvonal alakja tehát hiperbola. A 7. ábra a (7) egyenlettel felírt hiperbolát (ill. annak pozitív a' sajátgyorsuláshoz tartozó ágát) ábrázolja.



7. ábra

<u>Utolérési limit – az 1. gondolatkísérlet magyarázata</u>

A (7) egyenlet alapján könnyű belátni, hogy a hiperbola aszimptotája – mint a 7. ábra is mutatja – annak a fénysugárnak a világvonala, amely átmegy a C eseményen (az ábrán a

C pont a hiperbola ún. középpontja). Más megfogalmazásban az aszimptota nem más, mint a *C* eseménynél jelen levő objektumok *jövőbeli fénykúpjának* jobb oldali „ága“. A *C*-nél jelen levő objektumok tehát – bár kezdetben véges távolságra voltak a tömegpontunktól – *soha nem találkozhatnak* vele, hiszen a világvonaluk – akármennyire is (legfeljebb 45°-kal) dől a *ct*-tengelyhez képest – soha nem metszheti a (7) hiperbolát.

A (7) egyenlet nevezőiben szereplő, hossz-dimenziójú $L = \frac{c^2}{a'}$ kifejezés ennek megfelelően fontos fizikai jelentéssel bír: egyfajta *utolérési limitnek* tekinthető. Ha egy üldöző űrhajó a $t = 0$ pillanatban *legalább L távolságra* helyezkedett el az álló tömegponttól a negatív *x*-tengely mentén, akkor a tömegpont mozgását leíró hiperbola mindvégig kívül marad az üldöző űrhajó $t = 0$-beli fénykúpján, azon a tartományon, ahová az üldöző *valaha is* eljuthat.

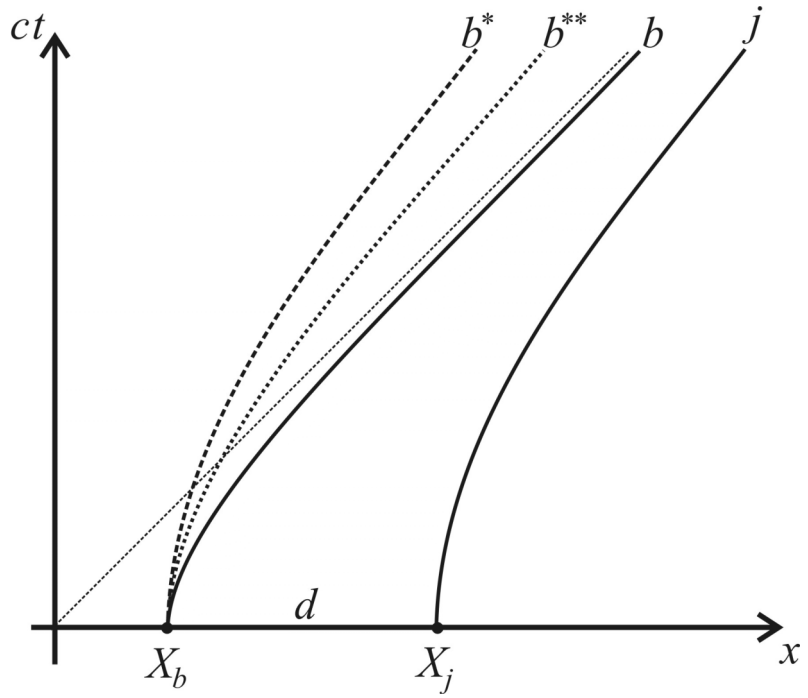
A jelenség szépségét az adja, hogy az űrhajók *véges távolságból* vesznek üldözőbe egy *véges sajátgyorsulással* mozgó tárgyat, és akármilyen gyorsulással is erednek a nyomába, eleve esélytelenek. Ezzel a cikk elején szereplő 1. gondolatkísérlet meglepő eredménye is érthetővé válik. A számadatok ellenőrzését az olvasóra bízom. (Az a tény, hogy a tömegpont világvonala kívül marad a C-ből kiinduló *fénykúpon*, természetesen azt is jelenti, hogy még az üldöző űrhajókból kibocsátott *fényjelek sem* tudják a tömegpontot soha utolérni. Az 1. gondolatkísérletben tehát ha a teknősbéka $a_B = 1.5g$ értékűre állítja a gyorsulását, akkor nemcsak a versenyt sikerül megnyernie, de akkor sem lesz semmi baja, ha a frusztrált Akhilleusz esetleg lézerfegyverrel lő utána.)

A gyorsulás felső korlátja

Mozgassuk a Dewan-Beran kísérlet cérnájának jobb oldali végét állandó a'_j sajátgyorsulással jobbra. Világvonalát a 8. ábra *j* jelű hiperbolája mutatja, amelynek az egyenlete:

$$\frac{x^2}{\left(c^2/a'_j\right)^2} - \frac{c^2t^2}{\left(c^2/a'_j\right)^2} = 1. \qquad (8)$$

Mint látható, az egyszerűség kedvéért a hiperbolát vízszintes irányban úgy pozícionáltam, hogy az aszimptotája átmenjen az origón. Ez a (7) egyenletben a *const.* = 0 választásnak felel meg, vagyis annak, hogy a 7. ábra *C* eseményét (a hiperbola középpontját) az origóba helyeztem.



8. ábra

Mekkora gyorsulással kell mozgatnunk a bal oldali véget, hogy a cérna mindvégig éppen megfeszített maradjon, de ne szakadjon el?

A 8. ábra szaggatottan jelzett *b** világvonala, amely a *j* világvonal eltolt mása, tehát szintén a'_j gyorsulású mozgást ír le, biztosan nem jó: a cérna az ilyen mozgás során *elszakad* (sajáthossza *nő*), ezt láttuk már a 5. ábrával kapcsolatban. Hogy a cérna ne szakadjon el, a bal oldali végének *nem elég* olyan sajátgyorsulással mozogni, mint a jobb oldali végének, hanem *szaporábban* kell a jobb oldali vég után igyekeznie. Ilyen lehetséges mozgásokat mutatnak pl. a 8. ábrán a *b*** és *b* jelű világvonalak. Melyik lesz az ilyen mozgások közül a megfelelő?

Próbáljuk ki azt az a'_b állandó sajátgyorsulású mozgást, amelynek az egyenlete

$$\frac{x^2}{\left(c^2/a'_b\right)^2} - \frac{c^2t^2}{\left(c^2/a'_b\right)^2} = 1. \qquad (9)$$

Ez éppen a 8. ábra *b*-vel jelölt hiperbolája. A (9) egyenletet a (7) egyenlettel összevetve látható ugyanis, hogy ennek az esetnek a különlegessége ismét a *const.* = 0 választás, amely biztosítja, hogy a *j* jelű hiperboláéval *azonos az aszimptotája*. Ez, valamint az a követelmény, hogy a két hiperbola kezdeti távolsága az *x*-tengely mentén legyen *d* (a cérna kezdeti hossza), egyértelműen meghatározza a'_b értékét:

$$X_j - X_b\left(= \frac{c^2}{a'_j} - \frac{c^2}{a'_b}\right) = d, \tag{10}$$

amiből

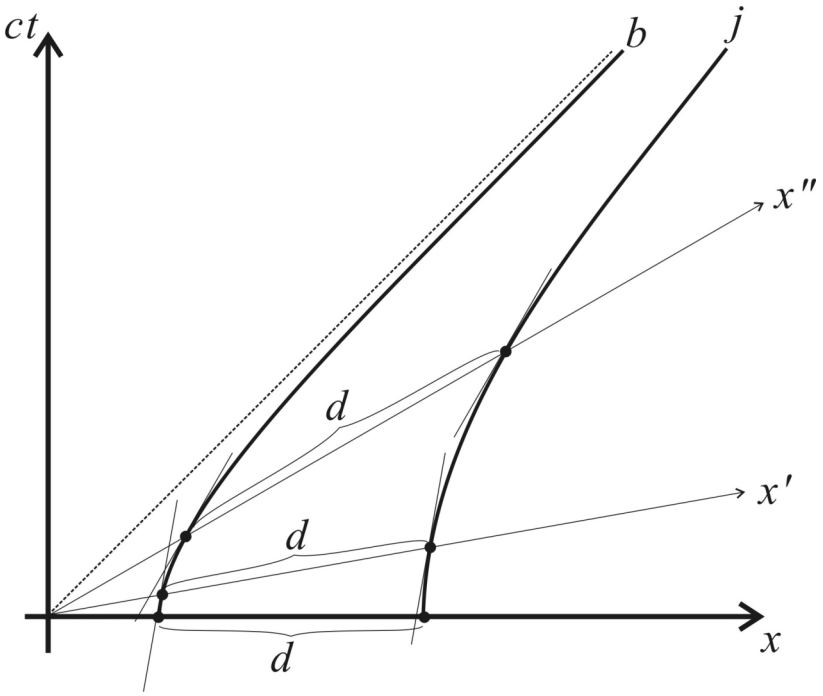
$$a'_b = a'_j \frac{1}{1 - \frac{d \cdot a'_j}{c^2}}. \tag{11}$$

Állítás: ha a bal oldali vég a (11) képletnek megfelelően gyorsul – azaz a *b* jelű világvonalon mozog –, akkor a cérna *sajáthossza* (és így megfeszítettségi állapota) *mindvégig változatlan marad*. Ez az alábbi gondolatmenettel látható be:

A *b* jelű hiperbola nem más, mint a különböző jobbra mozgó *K'*, *K''*, stb. inerciarendszerek *x'*, *x''*, stb. tengelyeinek kalibrálására szolgáló ún. *„kalibrációs hiperbola"*: ez metszené ki a *x'*, *x''*, stb. tengelyekből azt az osztást, ahová a c^2/a'_b hosszértéket fel kell mérni. (A (9) hiperbolának ez a tulajdonsága – amelynek analógiája az Euklideszi síkon az (*x*,*y*) derékszögű koordinátarendszerhez képest elforgatott (*x'*,*y'*) tengelyek kalibrálására szolgáló kalibrációs *kör* – a Minkowski-koordinátákban felírt téridőintervallum invarianciájából, az $x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2 = ... = const$. összefüggésből következik). A *b* világvonalat követő részecske tehát mozgása során mindvégig ugyanakkora, c^2/a'_b „téridőintervallumnyira" van az origó-eseménytől. Ez azt is jelenti, hogy a részecske *pillanatnyi nyugalmi inerciarendszereiből* végigkövetve a mozgást (egy-egy ilyen inerciarendszerben a részecske világvonala a lokális időtengely irányába mutat) a részecske mindig az adott inerciarendszer *x*-tengelyének c^2/a'_b osztású pontjában tartózkodik, és *éppen nyugalomban van*. Hasonló módon, a *j* világvonalú részecske is mindvégig ugyanakkora, c^2/a'_j „téridőintervallumnyira" van az origó-eseménytől, tehát ő is *minden* jobbra mozgó inerciarendszer *x*-tengelyének ugyanazon jelzésű pontjában (a c^2/a'_j pontban) tartózkodik – és éppen nyugalomban van! –, amikor az adott inerciarendszer órái 0-t mutatnak. (Az ilyenkor szokásos módon feltettem, hogy az összes inerciarendszer origója a kezdő időpillanatban egybeesik.) Ez viszont azt jelenti, hogy *abban az inerciarendszerben, amelyben a bal oldali cérnavég éppen áll, a jobb oldali cérnavég is éppen áll.* Ilyen értelemben a két cérnavég közötti távolság – ami ez esetben a cérna *sajáthossza*, hiszen abban a rendszerben mért hossz, amelyben a cérna végei állnak – *nem változik*. A cérna nem szakad el, mindvégig ugyanabban a megfeszítettségi állapotban marad.
Azt a tényt, hogy az egyik cérnavég pillanatnyi nyugalmi inerciarendszerében a másik cérnavég is mindig éppen áll, a 9. ábra illusztrálja. Az ábrán látható – és analitikusan is könnyen megmutatható –, hogy a két hiperbola *meredeksége*, azaz a két cérnavég *sebessége* minden olyan eseménypárban megegyezik, amelyek egy-egy adott

inerciarendszer x-tengelye mentén a kezdő időpillanatban egyidejűleg történnek. A két cérnavég tehát *egymáshoz képest* nem mozog. Érdemes ezt összevetni a b^* és j jelű hiperbolák viselkedésével: abban az esetben is kijelenthető, hogy „minden pillanatban megegyezik a két cérnavég sebessége“, de ott a „minden pillanatban“ szó a végig nyugvó laboratóriumi inerciarendszer egyidejű pillanatait jelenti.

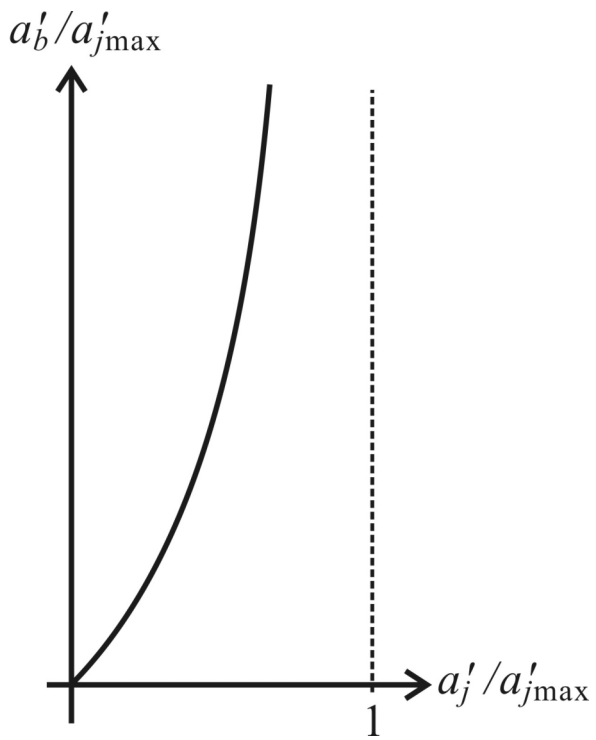
A 8. ábra b és j jelű hiperboláival – (8) és (9) egyenletek – tehát megtaláltuk tehát azt a mozgáspárt, amelyet a cérna bal és jobb oldali végének követnie kell, hogy a cérna mindvégig éppen megfeszített legyen, de ne szakadjon el. (Természetesen a cérna közbülső pontjainak is a megfelelő, egymástól eltérő gyorsulású mozgást kell végezniük. Világvonaluk a 8. ábrán olyan, b és j között elhelyezkedő hiperbolasereget adna, amelyeknek a középpontja az origóban van, és közös aszimptotájuk a 45°-os egyenes.) A fenti számolás – bár korrekt – azzal a zavarba ejtő következménnyel jár tehát, hogy a cérna *állandó* sajáthosszának biztosításához a bal oldali végnek *jobban* (nagyobb gyorsítóteljesítménnyel) kell igyekeznie, mint a jobb oldali végnek. Ami még zavarbaejtőbb: a jobb oldali cérnavég adott gyorsulású mozgása mellett *minél hosszabb a cérna, annál nagyobb gyorsulással kell a bal oldali végének igyekeznie, hogy a szakadást elkerülje*. Felmerül tehát a kérdés: a cérna hosszát növelve nem jutunk-e el előbb-utóbb valamilyen elvi korláthoz, vagyis olyan cérnahosszhoz, amikor a bal oldali cérnavégnek *semmilyen* mozgása nem tudja a szakadást megakadályozni? Vagy: adott cérnahosszúság mellett *a jobb oldali vég sajátgyorsulását* növelve nem jutunk-e el előbb-utóbb valamilyen elvi korláthoz, vagyis olyan sajátgyorsuláshoz, amikor a bal oldali végnek *semmilyen* mozgása nem tudja a cérna szakadását megakadályozni?



9. ábra

A választ (de igen, *vannak* ilyen elvi korlátok!) a (11) összefüggésből kiindulva kaphatjuk meg. Sejthető, hogy a képlet jobb oldalán szereplő, gyorsulás dimenziójú $\frac{c^2}{d}$ mennyiségnek fontos fizikai tartalma lesz. Vezessük be rá az $a'_{j\max}$ jelölést (mindjárt kiderül, miért) és a segítségével normáljuk az a'_b és a'_j gyorsulásokat. A (11)-ből így az alábbi dimenziótlan egyenletre jutunk:

$$\frac{a'_b}{a'_{j\max}} = \frac{a'_j}{a'_{j\max}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a'_j}{a'_{j\max}}}, \tag{12}$$



10. ábra

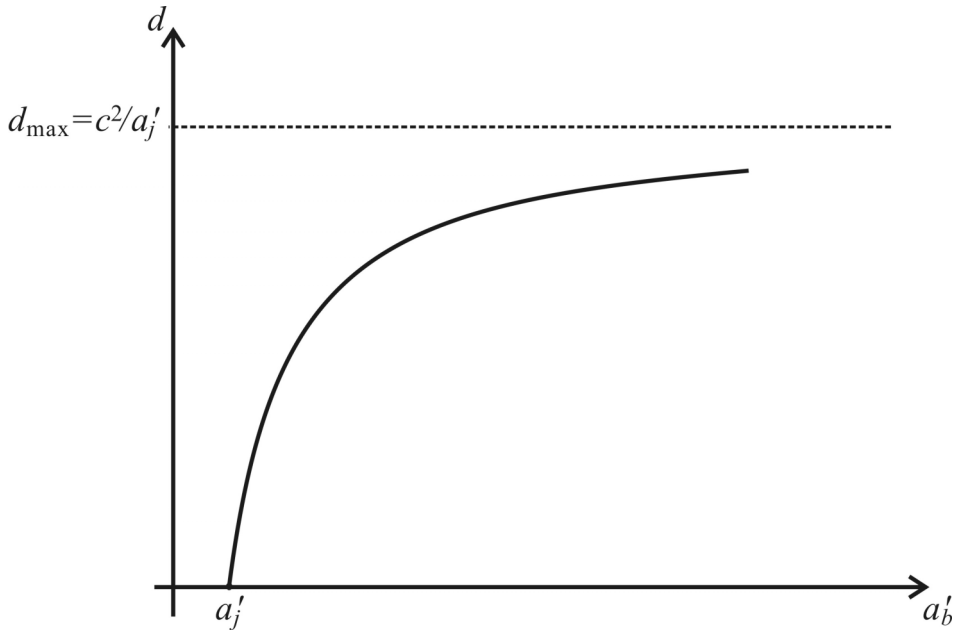
A bal oldali cérnavég (dimenziótlanná normált) gyorsulását a jobb oldali cérnavég (dimenziótlanná normált) gyorsulásának függvényében a 10. ábra mutatja. A (12) egyenletből és a 10. ábrából világossá válik az $a'_{j\max}$ konstans jelentése: ahogy a jobb oldali cérnavég gyorsulása megközelíti $a'_{j\max}$-ot, a bal oldali cérnavég gyorsulásának végtelenhez kell tartania, hogy a cérna azonos megfeszítettségi állapotban maradhasson. Az

$$a'_{j\max} = \frac{c^2}{d} \tag{13}$$

tehát azt a *kritikus sajátgyorsulást* adja meg, amelyet nem érhet el egy adott *d* hosszúságú, jobb felé mozgó objektum jobb oldali végének mozgása, ha azt akarjuk, hogy az objektum (ténylegesen, fizikailag) ne nyúljon meg (vagy szakadjon el). Ha a jobb oldali vég $a'_{j\max}$-ot elérő vagy meghaladó sajátgyorsulással mozog, akkor a bal oldali végnek még *végtelen sajátgyorsulás sem elég* ahhoz, hogy „lépést tartson" vele (hogy az objektum sajáthosszát változatlan értéken tartsa).

A nyugalmi hossz felső korlátja – a 2. gondolatkísérlet magyarázata

Rövid kitérő a *nyugalmi hossz* fogalmáról és arról, mit értettünk eddig a *sajáthossz* fogalma alatt: Az olvasónak feltűnhetett, hogy a cikkben eddig kizárólag a „sajáthossz" kifejezést használtam az elterjedtebb „nyugalmi hossz" helyett. Szigorúan véve csak akkor van értelme ugyanis egy adott tárgy (esetünkben pl. a cérna) nyugalmi hosszáról beszélni, ha a tárgy pontjai *egymáshoz képest* nyugalomban vannak (másképp megfogalmazva: ha mindig létezik olyan inerciarendszer, amelyben a cérna összes pontja éppen áll). Ha a cérna végei pl. a 8. ábra *b** és *j* jelű görbéi szerint mozognak, akkor ez nem teljesül (ezért is szakad el a cérna), tehát a nyugalmi hossz fogalma ilyenkor nem értelmezhető. A „sajáthossz" elnevezésre való áttérés önmagában a fogalmi nehézséget természetesen nem oldaná meg, mégis a sajáthossz *definíciója* értelmesen kiterjeszthető az olyan esetekre is, mint a 8. ábra *b** és *j* jelű görbéi. Az új definíció szerint pl. sajáthossz alatt érthetjük mindig azt a cérnahosszt, amelyet *a jobb oldali cérnavég pillanatnyi nyugalmi inerciarendszerében mérünk*. Ebben az inerciarendszerben a jobb oldali cérnavég áll, a bal oldali pedig akár éppen távolodhat is tőle (ekkor a cérna egyre jobban megfeszül), vagy közeledhet hozzá (és a cérna meglazul). Ez a kibővített definíció természetesen magában foglalja a nyugalmi hossz fogalmát is (amikor az értelmezhető).



11. ábra

A kritikus sajátgyorsulásra vonatkozó számoláshoz hasonló módon, a (11) egyenletből kapható meg egy objektum *nyugalmi hosszára vonatkozó elvi felső limit*. Az egyenletből *d*-t kifejezve, mint a'_b függvényét, a

$$d\left(a'_b\right) = c^2\left(\frac{1}{a'_j} - \frac{1}{a'_b}\right) \tag{14}$$

összefüggéshez jutunk. (Itt tehát a jobb oldali cérnavég a'_j sajátgyorsulását adott konstans értékűnek feltételezzük.) A függvény menetét a 11. ábra mutatja. Az ábráról leolvasható, hogy a bal oldali vég adott gyorsulása mellett mekkora konstans *d* sajáthosszúsággal rendelkezhet a cérna. Ahogy a bal oldali cérnavég sajátgyorsulása végtelenhez közelít, a még éppen állandó megfeszítettségi állapotban tartható cérna sajáthossza véges értékhez, $\frac{c^2}{a'_j}$-hez tart.

Ilyenkor, amikor a a sajáthossz konstans, jogos a *nyugalmi hossz* megnevezés, hiszen mindig található olyan inerciarendszer, amelyben a teljes cérna éppen áll. A

$$d_{max} = \frac{c^2}{a'_j} \tag{15}$$

tehát a *nyugalmi hosszra vonatkozó felső korlátot* adja meg. Csak ennél kisebb nyugalmi hosszal rendelkezhet egy olyan, jobb felé mozgó objektum, amelynek a jobb oldali vége

adott a'_j sajátgyorsulással mozog [2]. Ha az objektum kezdeti hossza $d_{\max}$-ot eléri vagy annál nagyobb, akkor – a jobb oldali vég a'_j gyorsulású mozgása esetén – a bal oldali végnek még *végtelen sajátgyorsulás sem elég* ahhoz, hogy az objektum sajáthosszát változatlan értéken tartsa. Ezzel a cikk elején említett 2. gondolatkísérlet eredménye is érthetővé válik. (A számadatok ellenőrzését ismét az olvasóra bízom.)

Első hallásra nagyon meglepő, hogy egyáltalán *létezik* ilyenfajta felső korlát egy objektum nyugalmi hosszára. Megnyugtatásul még egy érv: ha nem létezne ez a felső korlát, akkor az alábbi, ún. Warnick-paradoxonra [2] jutnánk:

Warnick-paradoxon: egy L hosszúságú űrhajó nyugalomból mozgásba lendül. Az űrhajó orra állandó gyorsulással – x_o távolságon, t_o idő alatt – akkora sebességre gyorsul, hogy az űrhajó mozgási hossza a Lorentz-kontrakció révén mondjuk a éppen felére csökken. A laboratóriumi rendszerből mérve az űrhajó *hátuljának* tehát összesen $x_o + \frac{L}{2}$ távolságot kellett megtennie t_o idő alatt. Az űrhajó végének $\langle v \rangle = \left(x_o + \frac{L}{2} \right) \Big/ t_o$ *átlagsebessége* – mivel az űrhajó L hosszát nem korlátozza semmi – *tetszőlegesen nagy lehet*, pl. a fénysebességet is meghaladhatja. (Ez – mint ismert – súlyos logikai ellentmondásokhoz vezetne, pl. ilyen űrhajók hátulján ülve időutazást tehetnénk a múltba, és meggátolhatnánk saját születésünket.)

A Warnick-paradoxon megoldása a fentiek szerint világos: az űrhajó hosszára igenis *létezik* felső korlát, *L nem lehet* tetszőlegesen nagy. (Természetesen azt semmi sem gátolja meg, hogy az űrhajót a gyárban tetszőlegesen hosszúra építsék; arról van csak szó, hogy nem érdemes bizonyos űrhajóhossznál nagyobbat építeni, mert a hátulja nem fogja tudni követni az elejét – nem technológiai, hanem téridő-geometriai okokból! –, és az űrhajó szétszakad.)

Nem egyenletes öregedés – a 3. gondolatkísérlet magyarázata

Az állandó sajáthosszúságú cérna bal oldali és jobb oldali vége eltérő alakú világvonalat követ (ld. 9. ábra), és ez azt sejteti, hogy a cérna két vége *eltérő ütemben öregedik*. Az alábbi részletes számolás megerősíti ezt a sejtést.

Mint láttuk, egy a' sajátgyorsulással mozgó tömegpont világvonala az

$$\frac{x^2}{\left(c^2 / a' \right)^2} - \frac{c^2 t^2}{\left(c^2 / a' \right)^2} = 1 \qquad (16)$$

hiperbola. A sík téridő jól ismert

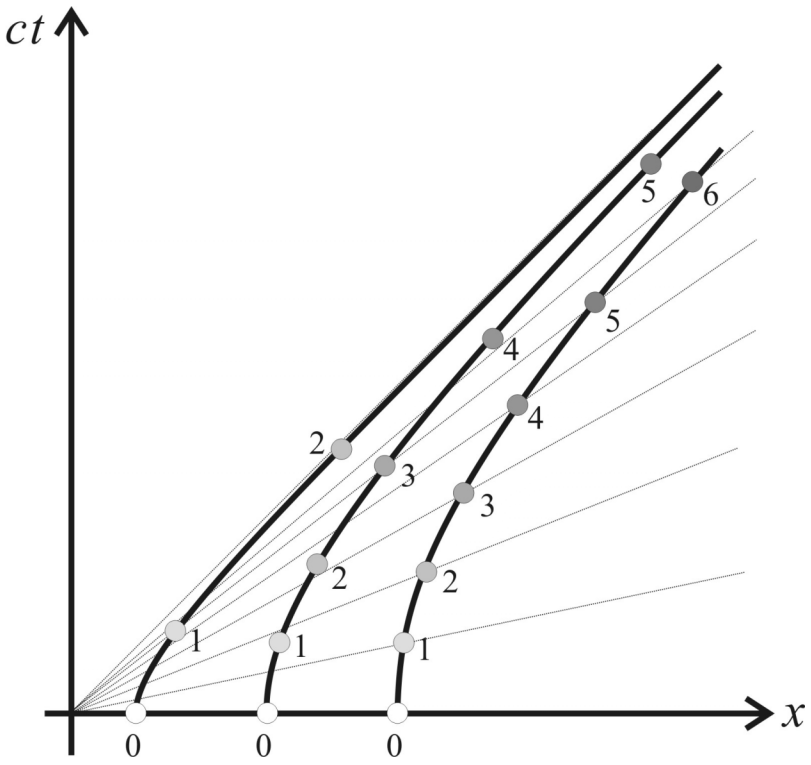
$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{dx^2}{c^2} \tag{17}$$

metrikus egyenlete ugyanakkor általánosan megadja, hogy két esemény között – amelyek (Minkowski-koordinátákban kifejezve) kis *dt* időbeli és *dx* térbeli távolságra történnek – mekkora $d\tau$ sajátidő telik el, azaz mekkora időtartamot mér a két esemény között egy olyan megfigyelő, aki mindkét eseménynél jelen volt.
A (16) és (17) egyenletekből könnyen levezethető a *t* koordinátaidő és az *x* térbeli koordináta τ sajátidőtől való függése a (16) világvonal mentén:

$$t = \frac{c}{a'}\sinh\left(\frac{a'}{c}\tau\right), \tag{18}$$

$$x = \frac{c^2}{a'}\cosh\left(\frac{a'}{c}\tau\right) \tag{19}$$

A 12. ábra egy rúd három pontjának – pl. a cikk elején szerepelt 3. gondolatkísérletben a fényévrudat szállító űrhajók közül háromnak – a világvonalát ábrázolja, miközben a rúd nyugalmi hossza állandó marad. A világvonalakon a (18) és (19) összefüggéseknek megfelelően jelöltem be, és számoztam meg az egyes űrhajósok karóráján mutatott egyenlő időközöket. Az ábrán az egyes pontok szürkeárnyalatai az adott fényévrúd-darabka aktuális színét is jelzik (mindegyik azonos (sajátidő-)ütemben változik fehérről feketére). A 12. ábrából érthetővé válik a 3. gondolatkísérlet eredménye. Az űrhajósok öregedése „balról jobbra gyorsul“: az űrhajók egy adott pillanatnyi nyugalmi inerciarendszerében mindig a bal oldali űrhajós órája mutatja a legkevesebbet (ő a legfiatalabb, a hozzá közel eső rúddarab a legvilágosabb), és a jobb oldali űrhajós órája mutatja a legtöbbet (ő a legidősebb, a hozzá közel eső rúddarab a legsötétebb).



12. ábra

<u>Közeledés? Távolodás?</u>

A 8. ábra három lehetséges mozgást is felvázol a bal oldali cérnavég számára. Mindhárom felvázolt mozgás álló helyzetből indul – csakúgy, mint a jobb oldali cérnavégé –, de a gyorsulásuk eltérő. Kérdés: *közeledik-e* a bal oldali cérnavég a jobb oldalihoz, ha a *b*** világvonalat követi?
A végig nyugvó, laboratóriumi inerciarendszer megfigyelője számára – ennek a nézőpontját mutatja a 8. ábra – úgy tűnik, a *b*** és *j* cérnavégek egyértelműen *közelednek* egymáshoz. Ezt – amellett, hogy „az ábrából látszik“ – két, *mérésen alapuló* érvvel is alá tudja támasztani:
(1) Ahogy a *t* idő telik, a cérnavégek közötti távolság (az ábrán a két görbe között vízszintesen mért távolság) *t* függvényében *monoton csökken*.
(2) A bal oldali cérnavég minden *t* időpillanatban *gyorsabban* mozog a jobb oldali vég felé, mint amilyen sebességgel a jobb oldali vég távolodik tőle, világosnak tűnik tehát, hogy *egymás felé közelednek*.

Láttuk ugyanakkor, hogy a cérna *sajáthossza* akkor változatlan, ha a végek a *b* és *j* világvonalakat követik. Kicsit körülményesebb megfogalmazásban: a jobb oldali cérnavég mindig a pillanatnyi nyugvó inerciarendszereiben méri magától a bal oldali cérnavég távolságát, és ezek a távolságmérések akkor szolgáltatnak állandó értéket, ha a bal oldali vég a *b* világvonalon halad. Ha a bal oldali vég ehelyett a lomhább *b***

világvonalat követi, akkor a cérnavégek távolsága a jobb oldali vég τ sajátidejének függvényében *monoton nő*, azaz a cérnavégek egyre *távolodnak*.

Hogyan lehetséges, hogy két tömegpont *folyamatosan közeledik* is egymáshoz, meg *folyamatosan távolodik* is egymástól (nézőponttól függően)? Lehet-e mindkét állítás helyes? Esetleg tudjuk-e úgy *definiálni* a közeledés/távolodás fogalmát, hogy megszűnjön ez az értelmezésbeli kettősség?

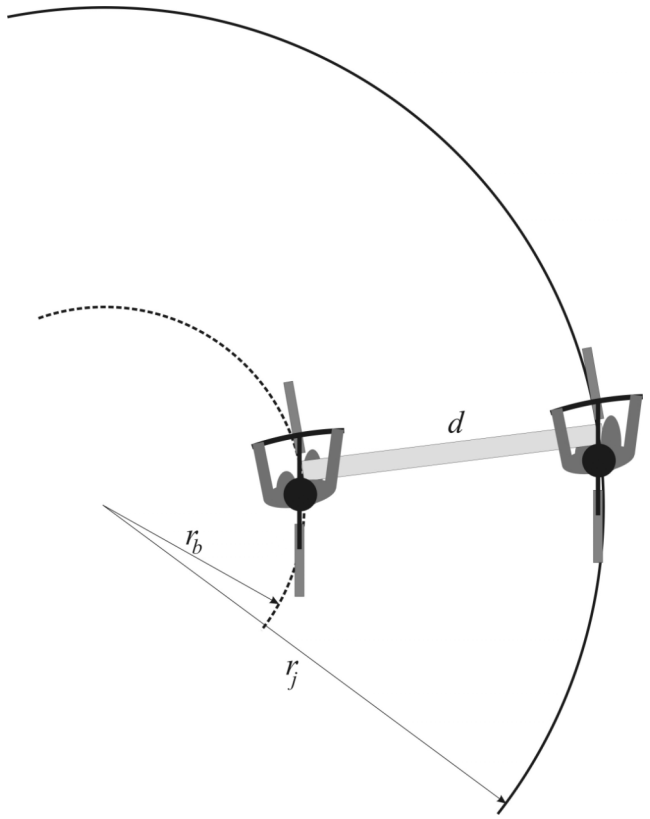
Vannak ehhez hasonló jelenségek a relativitáselméletben, ilyen pl. két esemény sorrendje. Ha az események elég messze vannak egymástól térben, és elég közel időben (azaz ha ún. térszerű intervallum választja el őket), akkor sorrendjük nem invariáns; előfordul, hogy különböző inerciarendszerek eltérő választ adnak a két esemény sorrendjét firtató kérdésre.

Legitim megoldás, ha a közeledés-távolodás fogalmát is a relativitáselmélet *nem invariáns* fogalmai közé soroljuk. Nem kell azonban feltétlenül elsietnünk ezt a következtetést, legalábbis abban az egyszerű esetben – mint amilyenek a föntiek is –, amikor a közeledés/távolodás „monoton" (pl. egyik mozgás sem oszcilláló).

Először is: *van*, ami a közeledéssel-távolodással kapcsolatban abszolút értelemben eldönthető. Ha például a két tömegpont mozgását ábrázoló világvonalak *metszik egymást* (vagyis a tömegpontok összeütköznek), akkor *nem lehet igaza* annak, aki azt állítja, hogy a tömegpontok folyamatosan távolodnak egymástól. A 8. ábra ugyan nem ilyen esetet mutat (ott a b^{**} és j világvonalak nem metszik egymást, csak – a nyugvó inerciarendszer szerint – aszimptotikusan tartanak egymáshoz), de ott is van egy segítségünk: maga a cérna. A két tömegpontot ugyanis mindig összeköthetjük – legalább képzeletben – egy olyan cérnával (vagy rúddal), amelynek a hosszát úgy választjuk meg, hogy a kezdő időpillanatban – amikor mind a két tömegpont állt a nyugvó inerciarendszerben – éppen megfeszüljön (rúd esetén se nyomó-, se húzófeszültség ne ébredjen benne). Ezek után a közeledést, ill. távolodást így *definiálhatjuk*: a két tömegpont *közeledik* egymáshoz, ha a cérna *meglazul* (ha a rúdban nyomó feszültség ébred), és *távolodik*, ha a cérna megfeszül, majd *elszakad* (ha a rúd megfeszül, majd széttörik). Ennek a definíciónak előnye, hogy nem igényel globális nézőpontot; nem kell, hogy a két távoli tömegpont mozgását egyszerre nyomon kövessük (hiszen az eredeti bonyodalom éppen az „egyszerre" szó abszolút módon értelmezhetetlen jellegéből származott), hanem csak lokális megfigyelésre van szükség: a cérna/rúd egy darabkájának a viselkedését kell megfigyelni. Ilyen módon a közeledés/távolodás fogalma valóban *invariánssá* válik: abban nincsen vita a különböző megfigyelők között, hogy a cérna elszakadt-e vagy sem. A fenti definíciót használva a 8. ábra nyugvó megfigyelője is kénytelen azt a következtetést levonni, hogy a b^{**} és a j világvonalakon haladó tömegpontok *távolodnak* egymástól, hiszen a két tömegpontot összekötő cérna viselkedéséből *számára is* ez következik.

<u>Analógia az euklideszi geometriából</u>

Sokszor segít a relativitáselmélet meglepő jelenségeinek megértésében, ha az intuíciónk számára sokkal ismerősebb terepre vonulunk, és megpróbáljuk megkeresni a jelenség analógiáját az *euklideszi síkon*.



13. ábra

A nyugalmi hossz és a sajátgyorsulás fent levezetett – és szemléletünk számára meglepő – elvi korlátjára a következő euklideszi analógia kínálkozik:

Sík terepen egy kerékpár r_j sugarú ($G_j = \frac{1}{r_j}$ görbületű) körpályán gurul. A kerékpár pályáját a 13. ábra szemlélteti. A kerékpáros a pályára *merőlegesen* balra kinyújt egy *d* hosszúságú rudat. Egy másik kerékpárosnak az a feladata, hogy tartsa a rúd másik végét, úgy, hogy a rúd orientációja mindig az első kerékpáros pályájára merőleges maradjon. Az is követelmény, hogy a két kerékpáros azonos irányba nézzen.
(1) Legfeljebb mekkora lehet a rúd *d* hossza, ha adott az első kerékpár pályájának G_j görbülete?
(2) Legfeljebb mekkora lehet a G_j görbület, ha adott a rúd *d* hossza?
(3) Az első kerékpár adott hosszúságú körívet fut be. A második kerékpár pályája ezzel megegyező hosszúságú lesz-e?
Válaszok:

(1) A 13. ábrán látszik, hogy a rúd hossza kisebb kell hogy legyen a $d_{\max} = r_j = \frac{1}{G_j}$ felső korlátnál. Ha *d* elérné ezt a korlátot, akkor a második kerékpár végtelen kicsi sugarú (végtelen nagy görbületű) körön lenne kénytelen megfordulni.
(2) Ugyanezen okok miatt, adott *d* hosszúságú rúd mellett r_j nagyobb kell hogy legyen *d*-nél, azaz a görbület kisebb kell hogy legyen $G_{\max} = \frac{1}{d}$-nél.

(3) Nem, a második kerékpár pályája rövidebb az elsőénél (ld. 13. ábra).

[Ismételjük el a fenti mondatok megfelelőit a cikkben tárgyalt relativisztikus jelenség leírása: Sík téridőben egy űrhajó a_j sajátgyorsulással jobbra indul. Az űrhajóhoz rögzítjük egy *d* hosszúságú rúd jobb oldali végét. (A rúd hosszát az űrhajós, aki pillanatnyi nyugalmi inerciarendszerének időtengelye mentén mozog, ennek az inerciarendszernek az *x*-tengelye mentén, az időtengelyre "merőlegesen" méri.) Egy másik űrhajónak az a feladata, hogy tartsa a rúd bal oldali végét, de közben a rúdban se húzó-, se nyomófeszültség ne ébredjen. A két űrhajó természetesen a téridőnek „azonos irányába néz" – a múltból a jövő felé.
(1) Legfeljebb mekkora lehet a rúd *d* hossza, ha adott a jobb oldali űrhajó a_j sajátgyorsulása?
(2) Legfeljebb mekkora lehet az a_j sajátgyorsulás, ha adott a rúd *d* hossza?
(3) A jobb oldali űrhajós órája adott eltelt időtartamot regisztrál. A bal oldali űrhajós órája ezzel megegyező időtartamot regisztrál-e?
Válaszok:
(1) A cikk (15)-ös összefüggése alapján a rúd hossza kisebb kell hogy legyen a $d_{\max} = \frac{c^2}{a_j}$ felső korlátnál. Ha *d* elérné ezt a korlátot, akkor a bal oldali űrhajó végtelen sajátgyorsulással sem tudná megakadályozni, hogy a rúdban húzófeszültség ébredjen.
(2) A (13) összefüggés szerint adott *d* hosszúságú rúd mellett a sajátgyorsulás kisebb kell hogy legyen $a_{\max} = \frac{c^2}{d}$-nél.

(3) Nem, a két űrhajós eltérő időtartamokat érzékel (ld. a 12. ábrát és a hozzá tartozó szöveget).]

Záró megjegyzés

A 2. gondolatkísérlet tárgyalásakor, valamint magában a Dewan-Beran gondolatkísérletben – a szerzőkhöz hasonlóan – hallgatólagosan figyelmen kívül hagytam a cérna vagy rúd *belső állapotváltozásait* (pl. a gyorsulási szakaszok alatt történő rugalmas vagy rugalmatlan alakváltozásokat, a mechanikai hullámok kialakulását, stb.). Csak ennek az egyszerűsítő és erősen idealizáló feltevésnek az elfogadásával állíthatjuk, hogy a bal oldali vég és a jobb oldali vég egymáshoz képesti nyugalmi helyzete egyben a

nyugalmi hossz változatlanságát is jelenti, hiszen egy tárgy nyugalmi hossza függ a tárgy belső állapotától.

Hivatkozások:

[1] E. Dewan, M. Beran, „Note on stress effects due to relativistic contraction“, *Am. J. Phys.* **27**, 517 (1959).

[2] E. F. Taylor, A. P. French, „Limitation on proper length in special relativity“, *Am. J. Phys.* **51**, 889 (1983).