Fizika M1, 2. ea, 2018/09/10

(I/D) Stacionárius állapotok a kvantummechanikában

① klasszikus mechanika: stacionárius állapot = egyensúly

pl. gödör alján nyugalomban levő labda

kvantummechanika: stacionárius állapot mást jelent

② emlékeztető: egy $\underline{\underline{M}}$ mátrixnak a $\underline{v}$ vektor sajátvektora a λ sajátértékkel, ha $\underline{\underline{M}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v}$

pl: $\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ennek sajátvektora $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, +1 sajátértékkel

és sajátvektora $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ is, −1 sajátértékkel

③ időfüggetlen Schrödinger-egyenlet

az (időfüggetlen) Hamilton-operátor sajátértékegyenlete

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

energiasajátállapot

energiasajátérték

④ egydimenziós példa: harmonikus oszcillátor: $E = \frac{p^2}{2m} + \underbrace{\frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2}_{\text{potenciális energia}}$

k rugóállandó

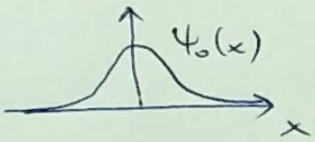
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x)$$

keressük azokat az (E, ψ) párokat, melyek megoldják ezt

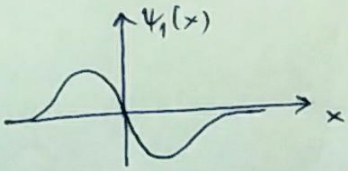
a megoldások:

$\left(L = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}\right)$

$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \qquad \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}\,\pi^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2L^2}}$



$E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega_0 \qquad \psi_1(x) = \ldots$



⋮

$E_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad \psi_n(x) = \ldots$

ψ_0: "alapállapot", $\psi_1, \psi_2, \ldots$: "gerjesztett állapotok"

(5) <u>áll</u>: ha $\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$, akkor $\psi(t) := e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}\psi_n$

megoldja az időfüggő Schrödinger-egyenletet

<u>biz</u>: $\frac{\hbar}{i}\dot{\psi}(t) + \hat{H}\psi(t) = \frac{\hbar}{i}\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right)\psi_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} + e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} E_n\psi_n =$

$$= \overbrace{(-E_n + E_n)}^{=0} e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}\psi_n = 0$$

(6) <u>áll</u>: a fenti $\psi(t) = e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}\psi_n$ állapot <u>stacionárius</u>, azaz bármely fizikai mennyiség várhatóértéke ebben az állapotban időben állandó.

pl: $\langle\psi(t)|\hat{x}\psi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{+iE_n t/\hbar}\psi_n^*(x)\, x\, \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi_n^*(x)\, x\, \psi_n(x) = \langle\psi_n|\hat{x}\psi_n\rangle$, ami tényleg időfüggetlen.

(7) <u>elnevezés</u>: "spektrum", "energiaspektrum": az energiasajátértékek halmaza, $\{E_0, E_1, E_2, \dots\}$

pl. a harmonikus oszcillátor energiaspektruma $\{\hbar\omega_0(n+\frac{1}{2}) \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$