Függvények változási sebessége

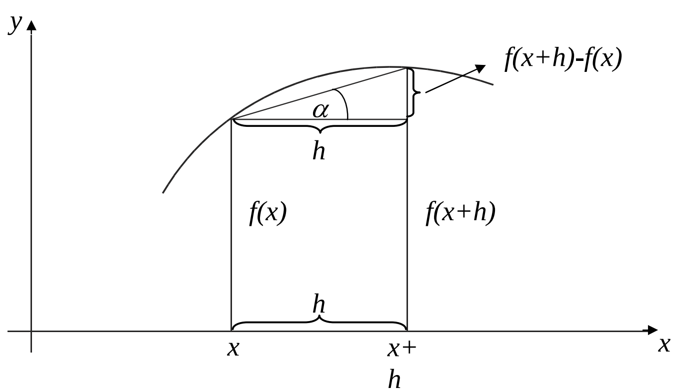
.

Legyen x az *f(x)* folytonos függvény értelmezési tartományának egy rögzített belső pontja. Vegyük tetszőleges (de „közeli”) h mellett az $x+h$ pontot, és képezzük az

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

hányadost. Ezt a hányadost az *f(x)* függvény x pontban vett **meredekségének** (differenciahányadosának) nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy a differenciahányados h-függvénye. (Itt x-et rögzítettük.) Ahogy az ábrán láthatjuk a differenciahányados a függvény görbéjének *f(x)*, és *f(x+h)* ordinátájú pontjait összekötő húr (szelő) iránytangensét jelenti. (A hányados éppen az $f(x+h)-f(x)$ és a h szakaszok hányadosa.)



A differenciahányados

Példa. Írjuk fel az $f(x)=x^2-x+3$ függvény differenciahányadosát

Megoldás. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(x+h)^2-(x+h)+3-(x^2-x+3)}{h}=2x+h-1$.

A differenciálhányados

A

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

határértéket az *f(x)* függvény x pontban vett **differenciálhányados**ának (**derivált**jának) nevezzük.

A fenti határértéket $f'(x)$-szel jelöljük, azaz

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Szokásos jelölések még az $y = f(x)$ felírásból: $\frac{dy}{dx}$, $y'(x)$, de akár röviden y'. Ez utóbbinál tudni kell, mi az argumentum.

Az f' értelmezési tartománya azokból a pontokból áll, ahol a fenti (véges) határérték létezik.

Azt a műveletet, amellyel a derivált függvényt meghatározzuk, **differenciálás**nak nevezzük.

Példa. Számítsuk ki a korábbi példában szereplő függvény differenciál-hányadosát!

Megoldás. Mivel $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x+h-1$, ezért

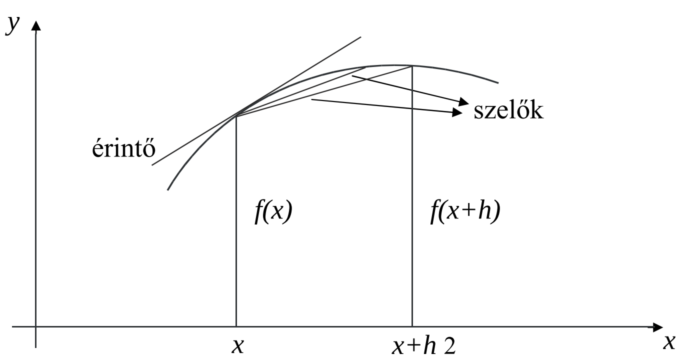
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h-1) = 2x-1.$$

A differenciálhányados geometriai jelentése

Az ábrán láthatjuk, hogy ha a *h*-val tartunk a zérushoz, akkor *x*+*h* tart *x*-hez, és a szelő ebben a „határhelyzetben" az *x*-pontbeli érintővé válik. De ha $h \to 0$, akkor a differenciahányados a differenciálhányadoshoz, azaz az érintő iránytangenséhez tart.
Ez azt jelenti, hogy valamely konkrét x_0 pontban a differenciálhányados (azaz $f'(x_0)$) az érintő iránytangensét adja. Az érintő egyenlete így

$$y(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

(Ez az x_0 ponton átmenő adott iránytangensű egyenes egyenlete.)



Példa. Adjuk meg a korábbi példában szereplő $f(x)=x^2-x+3$ függvény x=2 pontban vett érintőjének egyenletét.

Megoldás. Mivel $f'(x)=2x-1$, ezért $f'(2)=3$ és így, mivel $f(2)=5$, azt kapjuk, hogy az érintő egyenlete:

$$y-5=3(x-2),$$

vagyis a szokásos alakban:

$$y=3x-1.$$

Elemi függvények deriváltfüggvénye

Az

$$f(x)=x^n$$

függvény differenciálható és

$$f'(x)=nx^{n-1},$$

azaz

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

Tehát pozitív egész kitevőjű hatványfüggvényt úgy differenciálhatunk, hogy a kitevőt 1-gyel csökkentjük és az eredeti kitevővel szorzunk.

Bizonyítás. A definíció szerint

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=$$

a binomális tételt alkalmazva

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\ldots+nxh^{n-1}+h^n\right]-x^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\ldots+nxh^{n-1}+h^n}{h}.$$

Egyszerűsítsünk h-val; azt kapjuk, hogy

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+\ldots+nxh^{n-2}+h^{n-1}\right].$$

Az első kivételével minden tagban szerepel a h tényezőként, így ezek nullához tartanak, ha $h \to 0$. Ebből következik, hogy

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

A szinusz és koszinusz függvények deriváltja:

$$\sin'(x) = \frac{d \sin x}{dx} = \cos x\,; \qquad \cos'(x) = \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x\,.$$

Bizonyítás. A szinusz függvényre:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right].$$

Tudjuk, hogy

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1\,.$$

Másrészt, használjuk fel az

$$1 - \cos h = 2 \sin^2 \frac{h}{2}$$

azonosságot, végezzük el az alábbi átalakításokat:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{-2\sin^2 \frac{h}{2}}{h} \right) = \lim_{h\to 0} \left(-\sin \frac{h}{2} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right).$$

Mivel $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$, és $\lim\limits_{h\to 0} \sin \dfrac{h}{2} = 0$, azt kapjuk, hogy

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0\,.$$

Így azt kapjuk, hogy

$$\frac{d \sin x}{dx} = \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x\,.$$

A koszinusz függvény deriváltjának meghatározása:

$$\frac{d\cos x}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0}\cos x\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h} = \cos x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = -\sin x\,.$$

Az $f(x) = c$ konstans függvény deriváltja az azonosan 0 függvény, azaz

$$(c)' = 0\,.$$

Bizonyítás. $f'(x) = (c)' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = 0.$

Differenciálási szabályok – függvények összegének, szorzatának és hányadosának deriváltja

Legyenek f és g differenciálható függvények, akkor $f+g$ is differenciálható itt, és

$$(f+g)' = f'+g'$$

Legyenek f és g differenciálható függvények, akkor fg is differenciálható itt, és

$$(fg)' = f'g + fg'$$

egyenlőség adódik.

Legyenek f és g differenciálhat függvények, ahol $g(x)\neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is differenciálható itt, és

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}.$$