1. Gyakorlat – órai és házi feladatok

Műveletek vektorokkal

<u>Órai 1</u>. Adottak az alábbi kétdimenziós vektorok:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a, Ábrázoljuk a két vektort!
b, Határozzuk meg és ábrázoljuk az $2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ vektort!
c, Mekkora a vektorok normája (nagysága)?
d, Mekkora szöget zár be a két vektor?

2. Adottak az alábbi háromdimenziós vektorok:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a, Ábrázoljuk a két vektort!
b, Határozzuk meg és ábrázoljuk az $4\boldsymbol{v}_1 - 3\boldsymbol{v}_2$ vektort!
c, Mekkora a vektorok normája (nagysága)?
d, Mekkora szöget zár be a két vektor?

<u>Órai 3</u>. Számítsa ki az **ab** skaláris szorzatot, ha $|\mathbf{a}| = 7,\ |\mathbf{b}| = 4$, a két vektor által közrezárt szög pedig 120°. Mennyi a skaláris szorzat értéke, ha a közrezárt szög 90°.

<u>Órai 4</u>. Számítsa ki $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ értékét, ha $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = 4\sqrt{2}$, a két vektor által közrezárt szög pedig 45°.

5. Mekkora $|\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}|$ értéke, ha $|\mathbf{a}| = 5,\ |\mathbf{b}| = 2,\ |\mathbf{c}| = 8$ és a vektorok páronként merőlegesek egymásra?

6. Legyen $\mathbf{a} = (2,5,-1),\ \mathbf{b} = (0,2,1),\ \mathbf{c} = (-3,1,4)$. Számítsa ki az alábbi mennyiségeket:
$12\mathbf{a},\ |\mathbf{a}|,\ \mathbf{a} + 5\mathbf{b},\ \mathbf{ab},\ \mathbf{a} \times \mathbf{b},\ (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c},\ \mathbf{abc}$.

<u>Órai 7</u>. Írja fel az $\mathbf{a}^0$ egységvektort, ha $\mathbf{a}=\left(-1,0,\sqrt{3}\right)$. Mekkora szögeket zár közre az $\mathbf{a}$ vektor a koordinátatengelyekkel?

8. Számítsa ki az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét, ha $\mathbf{a}=(2,5,-1)$, $\mathbf{b}=(0,2,1)$.

9. Számítsa ki az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített hasáb térfogatát, ha $\mathbf{a}=(2,5,-1)$, $\mathbf{b}=(0,2,1)$, $\mathbf{c}=(-3,1,4)$.

10. Mekkora szöget zár közre az $\mathbf{a}=\left(\sqrt{2},-1,1\right)$ és $\mathbf{b}=\left(1,0,-\sqrt{2}\right)$ vektor? Mekkora a b és $\mathbf{c}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\sqrt{2}\mathbf{k}$ vektorok által közrezárt ψ szög?

11. Határozza meg z értékét úgy, hogy az $\mathbf{a}=(5,2,4)$, $\mathbf{b}=(3,7,z)$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra.

Függvények, függvények érintője – változási sebesség

<u>Órai 12</u>. Ábrázoljuk az $x(t) = c_1t + c_2$ függvényt és határozzuk meg a t-beli meredekségét!

<u>Órai 13</u>. Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + x + 1$ függvényt és határozzuk meg a x-beli meredekségét! /A meredekséget a „ Δ-s” módszerrel tegyük!/

14. Ábrázoljuk az $f(z) = 4z^3 - 1$ függvényt és határozzuk meg a z-beli meredekségét! /A meredekséget a „ Δ-s” módszerrel tegyük!/

<u>Órai 15</u>. Határozzuk meg az $y(x) = x\sin x$ függvény x-beli meredekségét! /A meredekséget a „ Δ-s” módszerrel tegyük!/

16. Határozzuk meg az $y(t) = A\sin^2 \omega t$ függvény t-beli meredekségét! /A meredekséget a „ Δ-s” módszerrel tegyük!/

Függvénygörbe alatti terület

<u>Órai 17</u>. Számítsuk ki az $y(x) = 2x + 1$ egyenes alatti területet a $2 \leq x \leq 3$ intervallumban! (A trapézmódszert használjuk!)

18. Számítsuk ki az $y(x) = x^2 + 1$ görbe alatti területet a $2 \leq x \leq 4$ intervallumban! (A trapézmódszert használjuk!)

19. Számítsuk ki az $y(x) = 2x^2 + x$ görbe alatti területet a $0 \leq x \leq 1$ intervallumban! (A trapézmódszert használjuk!)

MEGOLDÁSOK

1.a, Ábra.

b, $2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = 2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$

c, $\boldsymbol{a}_1^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \quad \rightarrow \quad |\boldsymbol{a}_1| = a_1 = \sqrt{13}$

$\boldsymbol{a}_2^2 = (-1)^2 + (-1)^2 = 2 \quad \rightarrow \quad |\boldsymbol{a}_2| = a_2 = \sqrt{2}$

d, Mivel $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = |\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2| \cos\alpha$, így $\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|} = \frac{-2-3}{\sqrt{13}\sqrt{2}} = \frac{-5}{\sqrt{26}} \rightarrow \alpha = 168{,}7°$

2. a, Ábra.

b, $4v_1 - 3v_2 = 4\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\5\\-7\end{bmatrix}$

c, $\boldsymbol{v}_1^2 = 1^2 + 2^2 + (-1)^2 = 6 \quad \rightarrow \quad |\boldsymbol{v}_1| = v_1 = \sqrt{6}$

$\boldsymbol{v}_2^2 = 0^2 + 1^2 + 1^2 = 2 \quad \rightarrow \quad |\boldsymbol{v}_2| = v_2 = \sqrt{2}$

d, Mivel $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = |\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2| \cos\alpha$, így $\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|} = \frac{0+2-1}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \rightarrow \alpha = 73{,}2°$

3. $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\varphi = 7 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = -14$. Ha $\varphi = 90^\circ$, akkor $\mathbf{a\,b} = 0$.

4. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin\varphi = 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = 16\sqrt{2}$.

5. $|\mathbf{a\,b\,c}|$ értéke a három vektor által kifeszített hasáb térfogatával egyenlő. Mivel a vektorok páronként merőlegesek, ezért $|\mathbf{a\,b\,c}| = 5 \cdot 2 \cdot 8 = 80$.

6. $12\mathbf{a} = 12(2{,}5{,}-1) = (24{,}60{,}-12)$

$|\mathbf{a}| = \sqrt{4 + 25 + 1} = \sqrt{30}$;

$\mathbf{a} + 5\mathbf{b} = (2{,}5{,}-1) + 5(0{,}2{,}1) = (2{,}15{,}4)$;

$\mathbf{a\,b} = (2{,}5{,}-1)(0{,}2{,}1) = 0 + 10 - 1 = 9$;

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 5 & -1\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=7\mathbf{i}-2\mathbf{j}+4\mathbf{k}=(7,-2,4);$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c}=(2,7,0)(-3,1,4)=-6+7+0=1;$$

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}=\begin{vmatrix}2 & 5 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ -3 & 1 & 4\end{vmatrix}=2\cdot 7-5\cdot 3-1\cdot 6=-7.$$

7. $\mathbf{a}^0=\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\dfrac{(-1,0,\sqrt{3})}{\sqrt{1+0+3}}=\left(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Innen látható, hogy $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Tehát $\alpha=120^\circ$, $\beta=90^\circ$, $\gamma=30^\circ$.

8. $T=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\sqrt{49+4+16}=\sqrt{69}$.

9. $V=|\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}|=|-7|=7$.

10. $\cos\varphi=\dfrac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=0$, ezért $\varphi=90^\circ$. $\cos\psi=\dfrac{3}{\sqrt{3}\sqrt{7}}$, $\psi=49^\circ 10'$.

11. $\mathbf{a}\,\mathbf{b}=15+14+4z=0$, ahonnan $z=-\dfrac{29}{4}$.

12. Ábra. Mindenütt c_1 a meredekség.

13.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)+1-(2x^2+x+1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x^2+4x\Delta x+2(\Delta x)^2+x+\Delta x+1-2x^2-x-1}{\Delta x}=4x+1$$

14.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{4(z+\Delta z)^3-1-(4z^3-1)}{\Delta z}$$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{4z^3+12z^2\Delta z+12z(\Delta z)^2+4(\Delta z)^3-1-(4z^3-1)}{\Delta z}=12z^2$$

15.

$$y'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)\sin(x+\Delta x) - x\sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)\,(\sin x\cos\Delta x + \cos x\sin\Delta x) - \ \ x\sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\sin x\cos\Delta x + x\cos x\sin\Delta x + \ \Delta x\sin x\cos\Delta x + \Delta x\cos x\sin\Delta x - \ \ x\sin x}{\Delta x}$$

$$\cos\Delta x \sim 1$$
$$\sin\Delta x \ \sim \Delta x$$

Ezekkel

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\sin x + x\cos x\,\Delta x + \ \Delta x\sin x + \Delta x\cos x\,\Delta x - \ \ x\sin x}{\Delta x} = \ \sin x + x\cos x$$

16.

$$y'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A\sin^2 \omega(t+\Delta t) - A\sin^2 \omega t}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(\sin\omega t\ \cos\omega\Delta t\ +\ \cos\omega t\ \sin\omega\Delta t)^2 - A\sin^2\omega t}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(\sin^2\omega t\ \cos^2\omega\Delta t + 2\sin\omega t\ \cos\omega\Delta t\ \cos\omega t\ \sin\omega\Delta t\ + \cos^2\omega t\ \sin^2\omega\Delta t) - A\sin^2\omega t}{\Delta t}$$

$$\cos\omega\Delta t \sim 1$$

$$\sin\omega\Delta t\ \sim \omega\Delta t$$

Ezekkel

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(\sin^2\omega t + 2\sin\omega t\ \cos\omega t\ \omega\Delta t\ + \cos^2\omega t\ (\omega\Delta t)^2) - A\sin^2\omega t}{\Delta t} = 2A\omega\sin\omega t\ \cos\omega t$$

17. Ha $x_2 = 3 \rightarrow a = y_2 = 7$
$x_1 = 2 \rightarrow c = y_1 = 5$
$m = x_2 - x_1 = 1$

A trapéz területe:

$$T = \frac{a+c}{2} m = 6$$

A görbe alatti terület számolási technikáját fejlesztendő osszuk a $2 \leq x \leq 3$ intervallumot n egyenlő részre, és rendre számoljuk ki a téglalapok területét a baloldali intervallumértékekkel (integrál alsó közelítő összeg):

$$T_1 = \left[2\left(2 + 0\frac{1}{n}\right) + 1\right]\frac{1}{n} = \frac{4}{n} + 2\ \cdot 0\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$$

$$T_2 = \left[2\left(2 + 1\frac{1}{n}\right) + 1\right]\frac{1}{n} = \frac{4}{n} + 2\ \cdot 1\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$$

$$T_3 = \left[2\left(2 + 2\frac{1}{n}\right) + 1\right]\frac{1}{n} = \frac{4}{n} + 2\ \cdot 2\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$$

$$T_n = \left[2\left(2 + (n-1)\frac{1}{n}\right) + 1\right]\frac{1}{n} = \frac{4}{n} + 2\ \cdot (n-1)\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$$

Az n téglalap területe összeadva és $n\ \rightarrow \infty$ esetet véve:

$$T = n\frac{4}{n} + 2\ \frac{0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)}{n^2} + n\frac{1}{n} = 4 + 2\frac{(n-1)n}{2n^2} + 1 = 4 + 1 + 1 = 6$$

18. Osszuk a $2 \leq x \leq 4$ intervallumot n egyenlő részre, és rendre számoljuk ki a téglalapok területét a jobboldali intervallumértékekkel (integrál felső közelítő összeg):

$$T_1 = \left[\left(2 + 1\frac{2}{n}\right)^2 + 1\right]\frac{2}{n} = \left[4 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{n} + 1^2\frac{4}{n^2} + 1\right]\frac{2}{n}$$

$$T_2 = \left[\left(2 + 2\frac{2}{n}\right)^2 + 1\right]\frac{2}{n} = \left[4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{n} + 2^2\frac{4}{n^2} + 1\right]\frac{2}{n}$$

$$T_n = \left[\left(2 + n\frac{2}{n}\right)^2 + 1\right]\frac{2}{n} = \left[4 + 2 \cdot 2 \cdot n \cdot \frac{2}{n} + n^2\frac{4}{n^2} + 1\right]\frac{2}{n}$$

Az n téglalap területe összeadva és $n \to \infty$ esetet véve:

$$T = 4\frac{2}{n}n + 2 \cdot 2 \cdot (1 + 2 + \cdots + n)\frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n} + (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)\frac{4}{n^2}\frac{2}{n} + \frac{2}{n}n$$

$$= 8 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{n} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\frac{4}{n^2}\frac{2}{n} + 2 = \frac{62}{3}$$

19. A fenti módszert alkalmazva:

$$T = \frac{7}{6}$$