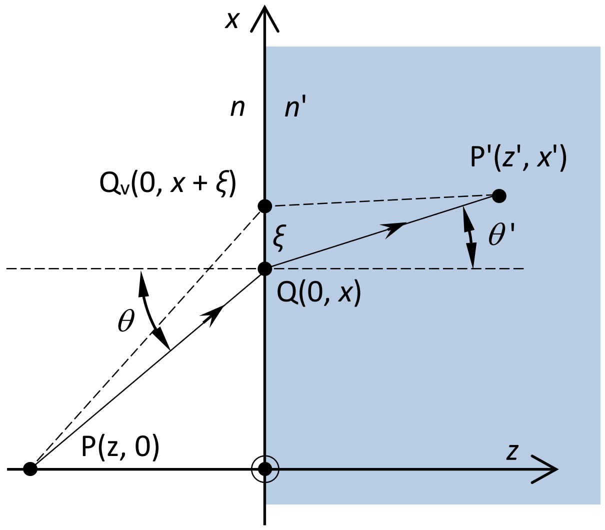
1. GYAKORLAT

Dr. Erdei Gábor, 2019-09-12

Fermat-elv működésének demonstrációja: törési törvény

Tudjuk, hogy homogén közegben egyenes vonal mentén terjed a fény, ezért csak ilyen lehetséges pályákat vizsgálunk. Q-val azt a pontot jelöljük, ahol a fénysugár valójában metszi a felületet.



$$OPL(\mathrm{PQ_vP'}) = n\sqrt{(x+\xi)^2+z^2} + n'\sqrt{(x'-x-\xi)^2+z'^2} \tag{1}$$

$$\frac{dOPL}{d\xi} = \frac{n}{2}\frac{2(x+\xi)}{\sqrt{(x+\xi)^2+z^2}} - \frac{n\prime}{2}\frac{2(x'-x-\xi)}{\sqrt{(x'-x-\xi)^2+z\prime^2}} = 0 \tag{2}$$

Ha $\xi = 0$

$$\frac{nx}{\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{n\prime(x'-x)}{\sqrt{(x'-x)^2+z\prime^2}} \tag{3}$$

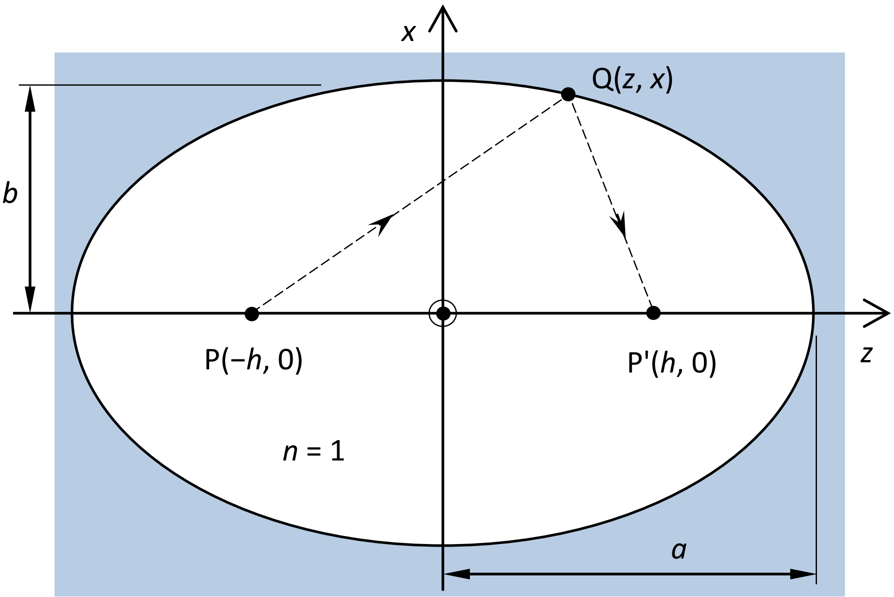
Trigonometriai összefüggések alapján:

$$\sin(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} \quad \text{és} \quad \sin(\theta') = \frac{x'-x}{\sqrt{(x'-x)^2+z\prime^2}} \tag{4}$$

Ezeket beírva (3)-ba:

$$n \cdot \sin(\theta) = n' \cdot \sin(\theta')\ . \tag{5}$$

Fermat-elv alkalmazása: leképezés ellipszoidtükörrel



A Fermat-elv értelmében az *OPL* egyenlő minden PQP' út mentén:

$$OPL(\mathrm{PQP}') = n\sqrt{(z+\mathrm{h})^2 + x^2} + n\sqrt{(h-z)^2 + x^2} \ , \tag{6}$$

ahol legyen n = 1. Mivel minden út egyenlő, *OPL* értékét könnyen meghatározhatjuk a z-tengely mentén haladó fényterjedéssel:

$$OPL = (a+h) + (a-h) = 2a \ , \tag{7}$$

Vagyis (6)-ból ez lesz:

$$\sqrt{(z+h)^2 + x^2} + \sqrt{(h-z)^2 + x^2} = 2a \ , \tag{8}$$

Az x-tengelyen lévő Q pont esetén:

$$OPL = 2\sqrt{h^2 + b^2} = 2a \quad \to \quad b^2 = a^2 - h^2 \tag{9}$$

(8)-at átrendezve és négyzetreemelve:

$$(h-z)^2 + x^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(z+h)^2 + x^2} + ((z+h)^2 + x^2) \ , \tag{10}$$

$$a^2 + hz = a\sqrt{(z+h)^2 + x^2} \ , \tag{11}$$

$$a^4 + 2a^2hz + h^2z^2 = a^2(z+h)^2 + a^2x^2 \ , \tag{12}$$

$$a^4 + 2a^2hz + h^2z^2 = a^2z^2 + 2a^2hz + a^2h^2 + a^2x^2 \ , \tag{13}$$

$$a^4 + h^2z^2 = a^2z^2 + a^2h^2 + a^2x^2 \ , \tag{14}$$

$$a^2 + \frac{h^2z^2}{a^2} = z^2 + h^2 + x^2 \ , \tag{15}$$

Átrendezve és csoportosítva a tagokat:

$$a^2 - h^2 = z^2\frac{a^2-h^2}{a^2} + x^2 \ , \tag{16}$$

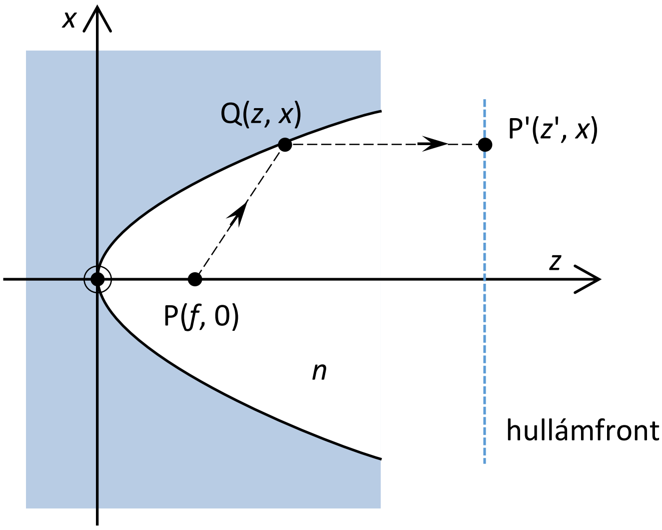
(9) alapján valóban egy ellipszis egyenletét kapjuk:

$$b^2 = z^2\frac{b^2}{a^2} + x^2 \ , \tag{17}$$

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \ . \tag{18}$$

Fermat-elv alkalmazása: leképezés paraboloidtükörrel

A QP' szakasz párhuzamos a z-tengellyel (optikai tengely).



$$OPL(\mathrm{PQP'}) = n\sqrt{(z-f)^2 + x^2} + n(z'-z) \ , \tag{19}$$

Az egyszerűség kedvéért legyen *z'* = *f* és *n* = 1. Ekkor

$$OPL = \sqrt{(z-f)^2 + x^2} + (f-z) \ , \tag{20}$$

Ha a z-tengely mentén vizsgáljuk a fénysugarat:

$$OPL = 2f \ , \tag{21}$$

Mivel minden optikai úthossz egyforma:

$$\sqrt{(z-f)^2 + x^2} + (f-z) = 2f \ , \tag{22}$$

$$(z-f)^2 + x^2 = (f+z)^2 \ , \tag{23}$$

$$z^2 - 2zf + f^2 + x^2 = f^2 + 2fz + z^2 \ , \tag{24}$$

$$x^2 = 4fz \ , \tag{25}$$

$$z = \frac{x^2}{4f} \ . \tag{26}$$

Gömbtükör paraxiális közelítésben

Origón áthaladó, *R* sugarú gömb felülete az *x*-*z* síkban:

$$x^2 + (z-R)^2 = R^2 \tag{27}$$

Paraxiális közelítésben, azaz ha *x* << *R*:

$$z = R \pm \sqrt{R^2 - x^2} = R - R\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \approx R - R\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2\right) \tag{28}$$

R előjele akkor pozitív, amikor a középpontja pozitív irányban van eltolva a *z*-tengely mentén.

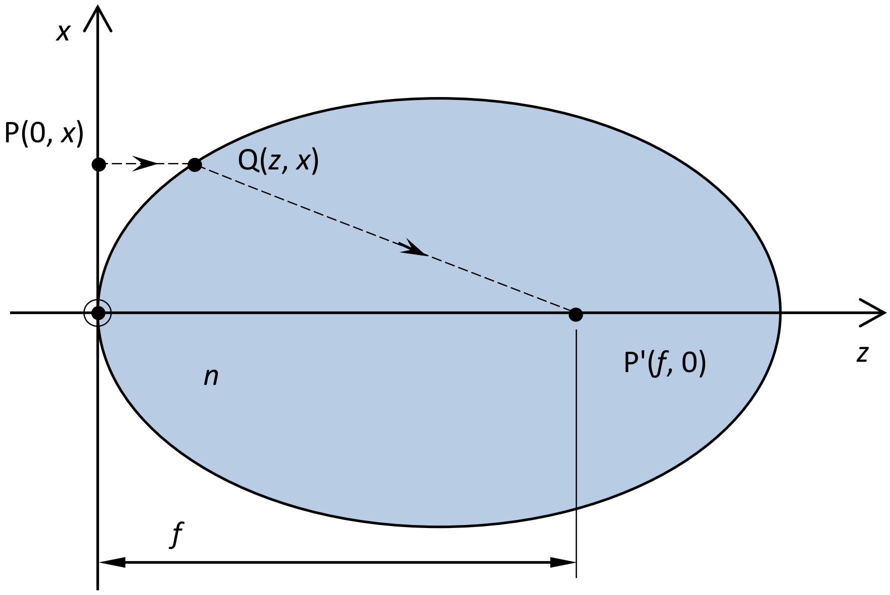
$$z \approx \frac{x^2}{2R} \tag{29}$$

Ezt összevetve (26)-al:

$$f = \frac{R}{2} . \tag{30}$$

Fermat-elv alkalmazása: leképezés ellipszoidlencsével

A PQ szakasz párhuzamos a z-tengellyel (optikai tengely).



Vizsgáljuk meg az optikai úthosszat az *x*-*y* síkban elhelyezkedő síkhullámfronthoz képes:

$$OPL(\mathrm{PQP'}) = z + n\sqrt{x^2 + (f-z)^2}\ . \tag{31}$$

Az optikai tengelyen:

$$OPL(\mathrm{PQP'}) = nf\ . \tag{32}$$

A Fermat-elv alapján minden PQP' optikai úthossz egyenlő:

$$z + n\sqrt{x^2 + (f-z)^2} = nf\ . \tag{33}$$

$$n^2(x^2 + (f-z)^2) = (nf-z)^2\ . \tag{34}$$

$$n^2x^2 + n^2f^2 - n^2 2fz + n^2z^2 = n^2f^2 - 2nfz + z^2\ . \tag{35}$$

$$n^2x^2 = (1-n^2)z^2 + 2nfz(n-1)\ . \tag{36}$$

$$n^2x^2 = (1-n^2)z^2 - 2nfz(1-n)\ . \tag{37}$$

A jobb oldalt teljes négyzetté alakítva:

$$n^2x^2 = (1-n^2)\left(z - \frac{nf(1-n)}{1-n^2}\right)^2 - \frac{n^2f^2(1-n)^2}{1-n^2}\ . \tag{38}$$

$$n^2x^2 = (1-n^2)\left(z - \frac{nf}{1+n}\right)^2 - \frac{n^2f^2(1-n)}{1+n}\ . \tag{39}$$

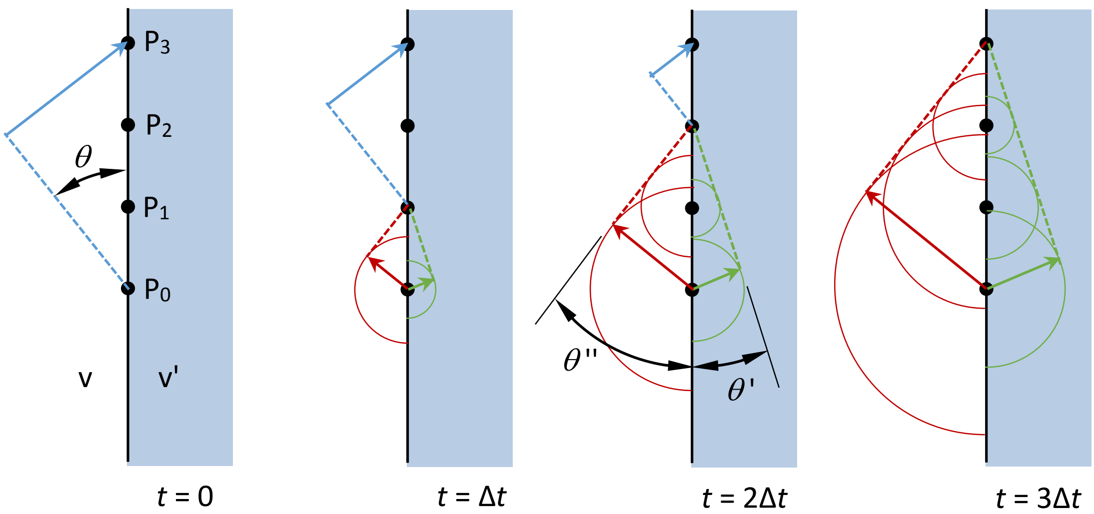
$$\frac{n^2x^2}{1-n^2} = \left(z - \frac{nf}{1+n}\right)^2 - \frac{n^2f^2}{(1+n)^2}\ . \tag{40}$$

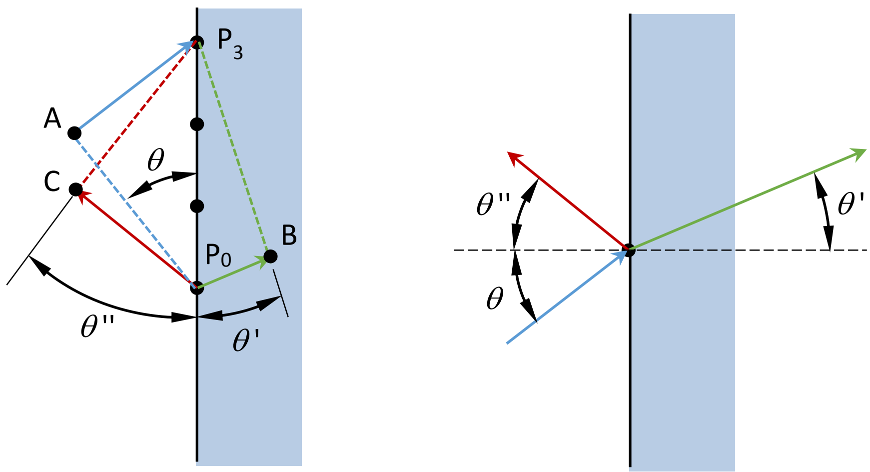
$$\frac{n^2x^2}{n^2-1} + \left(z - \frac{nf}{1+n}\right)^2 = \frac{n^2f^2}{(1+n)^2}\ . \tag{41}$$

Mindkét oldalt elosztva a jobb oldallal egy ellipszis egyenletét kapjuk:

$$\frac{x^2}{\frac{n-1}{n+1}f^2} + \frac{\left(z - \frac{nf}{1+n}\right)^2}{\frac{n^2f^2}{(1+n)^2}} = 1\ . \tag{42}$$

Huygens-elv alkalmazása: fénytörés és tükrözés törvényei





$$\mathrm{v}' < \mathrm{v} \quad ; \quad \overline{\mathrm{AP_3}} = \mathrm{v} \cdot 3\Delta t \quad ; \quad \overline{\mathrm{P_0B}} = \mathrm{v}' \cdot 3\Delta t \quad ; \quad \overline{\mathrm{P_0C}} = \mathrm{v} \cdot 3\Delta t \tag{43}$$

$$\sin(\theta) = \frac{\overline{\mathrm{AP_3}}}{\overline{\mathrm{P_0P_3}}} \quad ; \quad \sin(\theta') = \frac{\overline{\mathrm{P_0B}}}{\overline{\mathrm{P_0P_3}}} \quad ; \quad \sin(\theta'') = \frac{\overline{\mathrm{P_0C}}}{\overline{\mathrm{P_0P_3}}} \tag{44}$$

$$\frac{\sin(\theta)}{\mathrm{v}\cdot 3\Delta t} = \frac{1}{\overline{\mathrm{P_0P_3}}} \quad ; \quad \frac{\sin(\theta')}{\mathrm{v}'\cdot 3\Delta t} = \frac{1}{\overline{\mathrm{P_0P_3}}} \quad ; \quad \frac{\sin(\theta'')}{\mathrm{v}\cdot 3\Delta t} = \frac{1}{\overline{\mathrm{P_0P_3}}} \tag{45}$$

$$\sin(\theta) = \sin(\theta'') \quad ; \quad \frac{\sin(\theta)}{\mathrm{v}} = \frac{\sin(\theta')}{\mathrm{v}'} \tag{46}$$

Ha bevezetjük az $n = c/\mathrm{v}$ és $n' = c/\mathrm{v}'$ törésmutatókat:

$$\theta = \theta'' \quad ; \quad n \cdot \sin(\theta) = n' \cdot \sin(\theta')\,. \tag{47}$$