Kézirat a „Bevezetés a modern fizika fejezeteibe” c. tárgyhoz

írta: Márkus Ferenc
(BME Fizika Tanszék)

(utolsó módosítás: 2012. szeptember 18.)

1. szakasz

Rugalmas hullámok

A rugalmas hullámok tanulmányozása előtt szükséges röviden áttekintenünk a kontinuumok kis deformációk esetén érvényes általános mozgását. A **Helmholtz-féle kinematikai alaptétel**: a deformálható test elegendően kicsiny térfogatának általános helyzetváltozása összetehető egy transzlációból, egy rotációból és három egymásra merőleges irányban való megnyúlásból, ill. összehúzódásból (dilatációból, ill. kontrakcióból).

A tétel bizonyításához induljunk ki a következőből. A rugalmas közeg kiszemelt $P_0(0,0,0)$ pontja kis környezetének P(x,y,z) pontja végezze az $\boldsymbol{s}=(\xi,\eta,\zeta)$ elmozdulást. A P_0 pont környezetében az elmozdulás vektor komponenseit Taylor-sorba fejthetjük:

$$\xi = \xi_0 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_0 z$$

$$\eta = \eta_0 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)_0 z$$

$$\zeta = \zeta_0 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)_0 z$$

Az első sorban a – $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial x}y$ és $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial \zeta}{\partial x}z$ –, a másodikban a – $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial y}x$ és $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial \zeta}{\partial y}z$ –, a harmadikban – $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial \xi}{\partial z}x$ és $\pm\frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial z}y$ – zérusösszegű kifejezéspárok bővítésével, valamint a zárójelek lábánál lévő $_0$ index elhagyásával az elmozdulások az alábbi csoportosítással átírhatók a

$$\xi = \xi_0 + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) z\right] + \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) z\right]$$

$$\eta = \eta_0 + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right)x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)z\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\right)x + \frac{\partial\eta}{\partial y}y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)z\right]$$

$$\zeta = \zeta_0 + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial z}\right)x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right)y\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right)x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial z}\right)y + \frac{\partial\zeta}{\partial z}z\right]$$

alakba. A zárójelezés kiemeli, hogy az elmozdulás három összetevőre bontható. Az

$$\boldsymbol{s}_{transz} = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$$

vektor komponensei a transzlációs mozgás x, y és z irányba vett elmozdulásait írják le. A fenti egyenletekben álló első szögletes zárójelbeli összefüggésekben megjelenő kifejezések rendre a három térbeli irányhoz tartozó

$$\delta\varphi_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right), \quad \delta\varphi_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right), \quad \delta\varphi_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right)$$

szögelfordulásokat adják meg. Ezek zárt alakban úgy is írhatók, hogy

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2} rot\, \boldsymbol{s}.$$

A vektorszorzás használatával ellenőrizhető, hogy a formulák első zárójeles kifejezései az rotációval kapcsolatosak:

$$\boldsymbol{s}_{rot} = [\delta\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{r}] = \delta\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{r}.$$

Ha ezt az elmozdulást elosztjuk a hozzá tartozó rövid $\boldsymbol{\delta t}$ időtartammal, akkor a kinematikából ismert $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ sebesség kifejezésre jutunk.

A második szögletes zárójelben álló kifejezések a teljes elmozdulás deformációból származtatható részei:

$$\xi_{def} = \varepsilon_{xx}x + \varepsilon_{xy}y + \varepsilon_{xz}z$$

$$\eta_{def} = \varepsilon_{yx}x + \varepsilon_{yy}y + \varepsilon_{yz}z$$

$$\zeta_{def} = \varepsilon_{zx}x + \varepsilon_{zy}y + \varepsilon_{zz}z,$$

ahol az itt bevezetett mennyiségek rendre:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial\xi}{\partial x}; \qquad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial\eta}{\partial y}; \qquad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial\zeta}{\partial z}; \qquad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right).$$

A mennyiségekből képezhető a deformációs tenzor (nyúlási vagy dilatációs tenzor), amely látható módon mindig szimmetrikus:

$$\hat{\boldsymbol{E}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Így a deformációhoz tartozó elmozdulás

$$\boldsymbol{s}_{deform} = \hat{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{r}.$$

Ezzel a Helmholtz-féle kinematikai tételt be is bizonyítottuk.

A kontinuumok mozgásegyenlete

A kontinuumok mozgásegyenletének leszármaztatásához Newton II. axiómáját terjesztjük ki. Az így kapott egyenletet a kontinuumok Cauchy-féle mozgásegyenletének nevezik. Ennek integrális alakja

$$\int_V \varrho \boldsymbol{a} dV = \int_A \hat{T}\, d\boldsymbol{A} + \int_{\boldsymbol{V}} \varrho \boldsymbol{f} dV,$$

ahol $\boldsymbol{a}$ a gyorsulás, $\hat{T}$ a (szimmetrikus) feszültségtenzor

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

a felületi erőkhöz (húzó és nyíró erők), míg az $\boldsymbol{f}$ tömegegységre ható erő a térfogati erőkhöz tartozik. Az egyenletet úgy kell olvasni, hogy a ρdV tömegelem „m-szer $\boldsymbol{a}$-ja" a $\varrho \boldsymbol{a} dV$ kifejezés, amely a tömegelemre ható $\hat{T} d\boldsymbol{A}$ <u>felületi erők</u> és a $\varrho \boldsymbol{f} dV$ <u>térfogati erők</u> együttes következménye. Ezt követi a teljes térfogatra és a térfogatot körülvevő felületre való integrálás. A felületi integrált a Gauss-tétel értelmében térfogati integrállá alakítva, majd az integrálást „elhagyva” a mozgásegyenlet differenciális alakjához jutunk

$$\varrho \boldsymbol{a} = div\hat{T} + \varrho \boldsymbol{f}.$$

A feszültségtenzor és a deformációtenzor közti összefüggés: az általános Hooke-féle törvény

A rugalmasságtani feladatok megoldásához meg kell mondani, hogy mi a kapcsolat az $\hat{E}$ deformációtenzor és a $\hat{T}$ feszültégtenzor között, azaz mi a kapcsolat az elmozdulás és az erőhatás között? Ez lényegében a konstitutív (anyag-)egyenlet megkeresését jelenti, csak a különbözőt térbeli irányultságok miatt bonyolultabb kapcsolat várható. Ha homogén izotróp testek vizsgálatára szorítkozunk (és most itt főleg az izotrópia a lényeges), akkor főtengelyrendszerben – ebben a rendszerben eltűnnek a vegyes indexű tenzori kifejezések, az azonos indexek helyére egy index írható – a feszültségek és elmozdulások kapcsolatai az alábbi módon fogalmazhatók meg:

$$\sigma_x = a\varepsilon_x + b\varepsilon_y + c\varepsilon_z$$

$$\sigma_y = a\varepsilon_y + b\varepsilon_z + c\varepsilon_x$$

$$\sigma_z = a\varepsilon_z + b\varepsilon_x + c\varepsilon_y,$$

ahol az a, b és c paraméterek kapcsolják össze a különböző fizikai mennyiségeket. Az izotrópia miatt $b = c$ (az első index-szel szemben a másik kettő egyenrangú), így pl.

$$\sigma_x = (a-b)\varepsilon_x + b(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Itt szokás az a és b együtthatók helyett a $2\mu = a - b$ és $\lambda_L = b$ jelöléseket használni. Az így bevezetett állandók közös összefoglaló neve: Lamè-állandók. A három egyenletre összefoglalva:

$$\sigma_i = 2\mu\varepsilon_i + \lambda_L(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z). \quad (i = x, y, z)$$

A főtengelyrendszerről áttérve – kihasználva, hogy a feszültségtenzor és a deformációtenzor szimmetrikus – kapjuk:

$$\sigma_{xx} = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda_L\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right) = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda_L\Theta$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda_L\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right) = 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda_L\Theta$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda_L\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right) = 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda_L\Theta$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2\mu\varepsilon_{xy}\,,\ \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2\mu\varepsilon_{yz}\,,\ \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2\mu\varepsilon_{xz}\,.$$

A fentieket egy zárt formulában összefoglalva írhatjuk:

$$\hat{T} = 2\mu\widehat{\boldsymbol{E}} + \lambda_L\theta.$$

A rugalmas test mozgásegyenletei

Szilárd testek esetén kis $\boldsymbol{s}$ elmozdulásokat feltételezve a $\varrho\boldsymbol{a}$ kifejezés

$$\varrho\boldsymbol{a} = \varrho\frac{\partial^2\boldsymbol{s}}{\partial t^2}$$

lesz. A következő lépésben a feszültségtenzor komponenseit az elmozdulás vektor komponenseivel fejezzük ki:

$$\sigma_{xx} = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda_L\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right) = 2\mu\frac{\partial\xi}{\partial x} + \lambda_L\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda_L\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right) = 2\mu\frac{\partial\eta}{\partial y} + \lambda_L\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda_L\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right) = 2\mu\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \lambda_L\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = 2\mu\varepsilon_{xy} = \mu\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2\mu\varepsilon_{xz} = \mu\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right).$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 2\mu\varepsilon_{yz} = \mu\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)$$

Az x irányú elmozduláshoz tartozó mozgásegyenlet ezt követően úgy írható, hogy

$$\varrho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}+\varrho f_x$$

Behelyettesítés után:

$$\varrho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\mu\Delta\xi+(\mu+\lambda_L)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)+\varrho f_x.$$

Hasonlóan számolhatók ki az y és z irányú elmozdulásokhoz tartozó mozgásegyenlet:

$$\varrho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=\mu\Delta\eta+(\mu+\lambda_L)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)+\varrho f_y$$

$$\varrho\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}=\mu\Delta\zeta+(\mu+\lambda_L)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)+\varrho f_z.$$

Itt a rövidítés végett célszerű bevezetni a $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Laplace-operátort. Az eredményeket egy zárt formulába összefoglalva írhatjuk. Ezt az egyenletet a rugalmas testek mozgásegyenletének nevezik:

$$\varrho\frac{\partial^2\boldsymbol{s}}{\partial t^2}=\mu\Delta\boldsymbol{s}+(\mu+\lambda_L)grad\ div\ \boldsymbol{s}+\varrho\boldsymbol{f}.$$

Gyakorlati okokból (a mérhetőség miatt) célszerűbb a Lamé-állandók helyett az E Young-modulus és a ν_P Poisson-szám használata. A paraméterek közötti kapcsolatok az alábbiak szerint fejezhetők ki:

$$E=\frac{\mu(2\mu+3\lambda_L)}{\mu+\lambda_L}\qquad \nu_P=\frac{\lambda_L}{2(\lambda_L+\mu)}.$$

Síkhullámok végtelen kiterjedésű, szilárd izotróp közegekben

Tételezzük fel, hogy nem hatnak tömegerők (f = 0) és a deformációból eredő jelterjedés x tengely irányú. Ekkor a $\frac{\partial}{\partial y}$ és $\frac{\partial}{\partial z}$ parciális deriváltak zérusok, így a fenti mozgásegyenletek az alábbi alakokra egyszerűsödnek:

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=(2\mu+\lambda_L)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

$$\varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

Vezessük be a

$$c_1^2 = \frac{2\mu + \lambda_L}{\varrho}$$

és

$$c_2^2 = \frac{\mu}{\varrho}$$

jelölést. Ezekkel mindkét esetre felírhatjuk a

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

egydimenziós hullámegyenletet. Ennek általános megoldása

$$\psi(x,t) = f(t - \frac{x}{c})$$

illetve

$$\psi(x,t) = f(t + \frac{x}{c})$$

alakokban írhatók fel, ahol *f* az argumentumok tetszőleges függvénye! A megoldások fizikai jelentése a következő. A t_1 időben az x_1 helyen keltünk egy zavart: $f(t_1 - \frac{x_1}{c})$. Ez a zavar megjelenik az x_2 helyen $t' = \frac{x_2 - x_1}{c}$ idővel később, tehát $t_2 = t_1 + t'$. Ekkor

$$f\left(t_2 - \frac{x_2}{c}\right) = f\left(t_1 + \frac{x_2 - x_1}{c} - \frac{x_2}{c}\right) = f\left(t_1 - \frac{x_1}{c}\right),$$

ami egy +x irányban terjedő zavar. A másik megoldás a –x irányban terjedő zavarhoz tartozik. A hullámfelületek síkok.

A harmonikus vagy szinuszos síkhullám egyenlete:

$$\psi(x,t) = A \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \delta\right],$$

amelyik az időben és a térben is periodikus folyamat. A szögletes zárójelbeli kifejezés neve fázis. Az A az amplitúdó, az ω a körfrekvencia, a δ a kezdőfázis. Két hullámhegy távolsága λ és fenn áll a $2\pi = \omega\frac{\lambda}{c}$, amiből a $\lambda = \frac{c}{\nu}$ vagy a $c = \nu\lambda$ összefüggések állapíthatók meg.

Ekkor a már látható, hogy a korábban kiszámolt „c" mennyiségek a különböző módon terjedő hullámok terjedési sebességét jelenti. Longitudinális hullámok esetében

$$c_{long} = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda_L}{\varrho}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu_P)}{\varrho(1+\nu_P)(1-2\nu_P)}},$$

míg transzverzális hullámokra

$$c_{transzv} = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} = \sqrt{\frac{E}{2\varrho(1+\nu_P)}}.$$

Földrengés-hullámok tanulmányozásából a földkéregre $\nu_P = 0{,}29$. Hosszú vékony rúd esetére, ahol a haránt irányú kontrakció elhanyagolható → $\nu_P = 0$, akkor

$$c_{long} = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}.$$

Gömbhullámok

Gömbszimmetrikus esetre – szimmetria okokból az (r, θ, φ) koordináták közül csak az r-től való függés marad meg – az szorítkozva a Laplace-operátor alakja

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi),$$

amivel a hullámegyenlet alakja

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)$$

lesz. Ennek az egyenletnek egyaránt megoldásai a

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r} f(t - \frac{r}{c})$$

és a

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r} f\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

függvények. Ezeket nevezik gömbhullám megoldásnak. Jól látszik, hogy a középponttól való távolsággal a fizikai mennyiség értéke az *r* távolsággal fordított arányban csökken. A hullám intenzitása meghatározása szempontjából ennek a ténynek nagyon fontos szerepe lesz a későbbiekben.

A húr rezgései

A nyugalomban lévő q keresztmetszetű húr *F* erővel feszített két pontja: A(*x*,0,0) és B(*x*+d*x*,0,0). Ha az $\overrightarrow{\mathrm{AA'}}$ elmozdulás (ξ, η, ζ), akkor $\overrightarrow{\mathrm{BB'}}$ komponensei $(\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx, \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx, \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx)$. Az A' és B' pontok koordinátái

$$\mathrm{A}': x + \xi, \eta, \zeta \qquad \mathrm{B}': x + dx + \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx, \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx, \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx.$$

Az A'B'=*ds* ívelem közelítőleg a Pitagorasz-tétellel a következő módon számolható

$$ds^2 = \left(dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} dx\right)^2 \approx dx^2 \left(1 + 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)$$

A másodrendűen kicsiny mennyiségeket elhanyagolva és gyökvonást elvégezve a

$$ds \approx \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx$$

kifejezést kapjuk. A relatív megnyúlás tehát egyszerűen megadható

$$\frac{ds - dx}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Az F feszítő erőn kívül hat még a megnyúlásból származó erő is. Így az *A*' helyen a -x irányban ható erő a Hooke-törvény szellemében (a relatív deformáció a mechanikai feszültséggel arányos, és az arányossági tényező a Young-modulus)

$$F' = Eq\frac{\partial\xi}{\partial x},$$

míg a *B*’ helyen a x irányban

$$F'' = Eq\frac{\partial\xi}{\partial x} + Eq\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx$$

erő hat. Ezzel a $\varrho q dx$ tömegre vonatkozó mozgásegyenlet

$$\varrho q dx\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = F'' - F' = Eq\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx,$$

amelyből az egyszerűsítések után a

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\varrho}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

hullámegyenlet adódik. Ez a kompresszióhoz tartozó longitudinális hullám. Ez láthatóan húr esetén ugyanúgy megjelenik, mint ahogy azt az általános megoldásban már tapasztaltuk. A nyújtásból származó transzverzális komponensek a haránt irányú y és z kitérésekhez tartoznak. A részletes számolást mellőzve e két esetre a

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\varrho}\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\varrho}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$$

hullámegyenletek érvényesek, ahol a σ feszültség $\sigma = \frac{F}{q}$. Innen a kétféle hullám terjedési sebessége egyszerűen leolvasható:

$$c_{long} = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$$

és

$$c_{transzv} = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}}.$$

Hullámok szuperpozíciója, interferencia, állóhullámok

A tapasztalat szerint Két hullám találkozásakor a hullámok összeadódnak. Ezt a tényt lineáris szuperpozíciónak nevezik és elvként megfogalmazva úgy hangzik: Lineáris rendszerekre megfogalmazható általános elv, amely a hullámok esetén azt mondja ki, hogy egy adott pontban a kölcsönható hullámok kitéréseinek algebrai összege eredményezi az eredő hullám kitérését. Pl. az y_1 és y_2 harmonikus hullámok esetére, ha

$$y_1 = A_1 \sin(\omega_1 t - k_1 x_0 + \delta_1)$$

és

$$y_2 = A_2 \sin(\omega_2 t - k_2 x_0 + \delta_2),$$

akkor az eredő hullám az

$$y = y_1 + y_2.$$

Ez az alapja az interferencia jelenségének, amely definíció szerint olyan hullámtani jelenség, amely akkor következik be, ha két különböző forrású koherens hullám találkozik. A találkozó rezgések fázisától függően a hullámok szuperpozíciójának eredménye lehet erősítés vagy gyengítés, esetleg teljes kioltás attól függően, hogy a hullámok azonos vagy ellentétes fázisban találkoznak.
Az előző definícióban egy másik fontos fogalom jelent meg: a koherencia, amely hullámok közötti viszonyt jellemzi. Két azonos frekvenciájú hullám akkor mondható koherensnek (összetartozónak), ha fáziskülönbségük egy adott helyen időben állandó. Ha két koherens hullám találkozásáról beszélünk, akkor a hullámok olyanok, amelyek fáziskülönbsége állandó. Következésképp csak az azonos frekvenciájú hullámok képesek az interferenciára.
Az interferencia jelenségére az elektrodinamikában még újra visszatérünk és az hullámok elhajlása kapcsán további következtetéseket teszünk. Később a kvantumelméletben látni fogjuk, hogy e jelenség és fogalom milyen látványos csavarral jelenik meg az anyaghullámok vonatkozásában.
Most azonban azt szeretnénk megérteni, mi történik akkor, ha egymással szemben haladó hullámok találkoznak. Ilyen fordulhat elő közeg határon történő visszaverődésnél. Ekkor ún. állóhullámok alakulhatnak ki. Az állóhullám definíciója: egymással szemben haladó egyenlő amplitúdójú, frekvenciájú és polaritású hullámok interferenciája esetén fellépő jelenség. A kialakult állóhullám két alapvető jellegzetessége, hogy egyrészt a rezgő test különböző pontjai nem egymás után, hanem egyszerre végzik rezgésüket, másrészt bizonyos pontok nyugalomban vannak (ezek a csomópontok) – illetve pl. az elektromágneses hullámok esetén a csomópontokban zérus az elektromágneses tér –, mások pedig maximális kitéréssel végzik rezgésüket (ezek a duzzadási helyek).

Fourier-soros vagy Bernoulli-féle megoldás

Ezeket követően térjük át arra a problémára, amikor is egy az x tengelyen a $(0, l)$ intervallumon elhelyezkedő l hosszúságú húron állóhullámok alakulnak ki. Az érdekesség az lehet, hogy a határfeltételek miként módosítják a szabadon terjedő hullámmegoldást, azaz az oda-vissza szaladó hullámokon kialakuló állóhullámok milyenek. A leíró egyenlet a hullámegyenlet

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\,.$$

Keressük a megoldást olyan szorzat alakban, hogy az egyik függvény (*U*) csak a hely, a másik (*V*) csak az idő függvénye

$$\psi(x,t) = U(x)V(t)$$

legyen. Behelyettesítve ezt a hullámegyenletbe az

$$\frac{U''}{U} = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{V}}{V}$$

egyenlet származtatható, ahol a vessző az *x* szerinti, a pont a *t* szerinti differenciálást jelenti. Mindjárt látható a szorzat formában feltételezett megoldás hozadéka, a két függő változó (*U* és *V*) szeparálható. A két oldal akkor lehet bármely *x* és *t* értékre egyenlő, ha ugyanazzal a konstanssal egyenlők. Válasszuk a konstanst $-k^2$-nek, így

$$U'' = -k^2U$$

és

$$\ddot{V} = -k^2c^2V.$$

Az első egyenlet megoldása

$$U(x) = A\,sin\,kx + B\cos kx\,.$$

Az állóhullámokra vonatkozó határfeltételek: *U*(*0*)=*U*(*l*)=*0*, amelyből a *B*=0 mellett a

$$k = k_n = n\frac{\pi}{l}$$

következik. Ezt felhasználva *V*-re vonatkozó megoldás

$$V(t) = C\sin kct + D\,cos\,kct,$$

ahol a $k = k_n$ helyettesítés valamint a hullámszám, frekvencia és terjedési sebesség közötti kapcsolat figyelembe vételi után a

$$k_nct = 2\pi\nu_nt$$

írható. A k_n alakját beírva kapjuk, hogy a húron kialakuló lehetséges frekvencia-értékek

$$\nu_n = n\frac{c}{2l}\,,$$

vagy a lehetséges hullámhossz-értékek

$$\lambda_n = \frac{c}{\nu_n} = \frac{2l}{n}.$$

Azaz nem lehetnek akármilyenek, sőt egy rend szerinti diszkrét értékeket vehetnek fel. Szokás úgy is hangsúlyozni, hogy a húron csak a fél hullámhossz egész számú többszörösei jelenhetnek meg

$$l = n\frac{\lambda_n}{2}.$$

Ez a jelenség világosan mutatja, hogy a „diszkrét fizikai mennyiség viselkedés" megjelenése már mechanikai problémákban is jelentkezik. Éppen ezért semmi meglepő nem lesz abban, ha később az elektrodinamikában és a kvantumelméletben is találkozunk hasonló megoldásokkal! Végül a rezgő húr tetszőleges pontjának határfeltételekkel illesztett időbeli megoldása

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n sin\frac{n\pi}{l}x\cos 2\pi\nu_n\, t + b_n sin\frac{n\pi}{l}x\, sin\, 2\pi\nu_n\, t\right),$$

ahol az a_n és b_n együtthatók a rezgés amplitúdóját határozzák meg.