

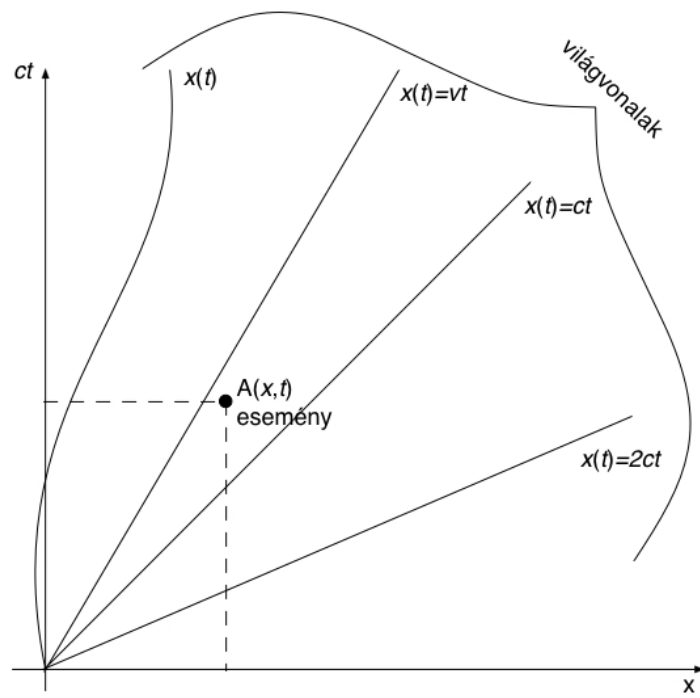
**A speciális relativitáselmélet  
geometriai bemutatása, Sander Bais  
„Very Special Relativity“ c. könyve  
alapján**

Bokor Nándor, BME, 2013.

Posztulátumok:

1. A fénysebességet minden inerciarendszerben minden irányban  $c$ -nek mérjük.
2. A fizika törvényei minden inerciarendszerben ugyanazok.

1. ábra: Az *esemény* és a *világvonal* fogalma.



1. ábra

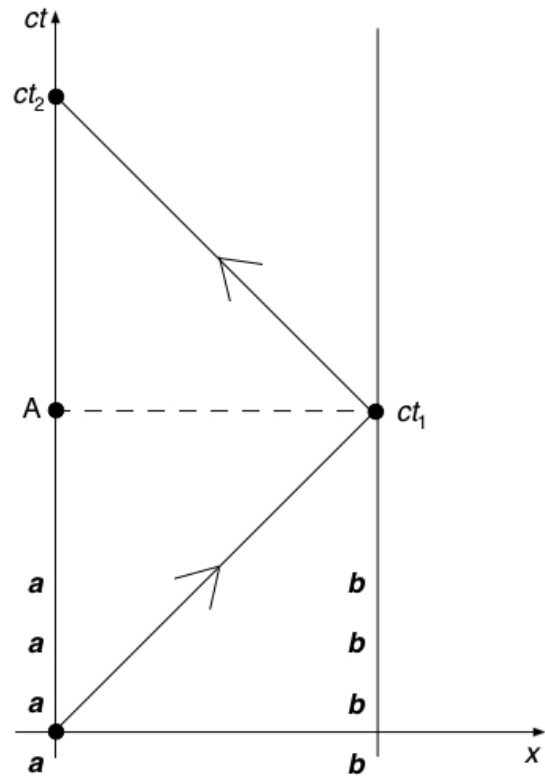
2. ábra: Órák kalibrációja a K vonatkoztatási rendszerben.

Egymáshoz képest nyugvó illetők (**a** és **b**) egymáshoz kalibrálják az órájukat.

Amikor **a** megkapja a fényjelet, az órája  $t_2$ -t mutat. Ezt az értéket elküldi **b**-nek, hogy az úgy korrigálhassa a saját órája állását, hogy (visszamenőleg) a  $t_1$  éppen  $t_2$  fele legyen.

Ez azt is jelenti, hogy **a** világvonalán az A esemény időpontja  $\frac{t_2}{2} = t_1$

$\Rightarrow$  a szaggatott vonal az *egyidejűséget* jelöli ki.



2. ábra

3. ábra: Órák kalibrálása a  $K'$  vonatkoztatási rendszerben.

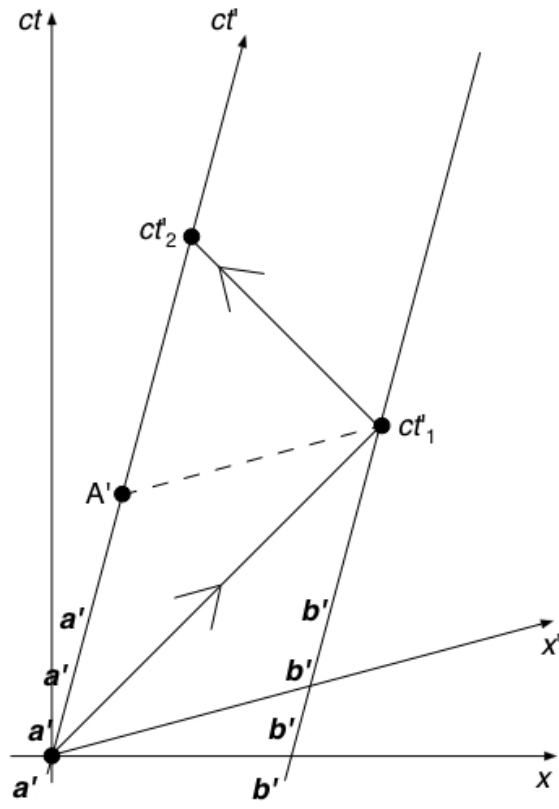
Ugyanez a kalibrálás egy olyan  $K'$  rendszerben, amely  $K$ -hoz képest mozog.  
(Itt  $a'$  és  $b'$  a két, órával rendelkező ember.)

Az  $a'$  által kibocsátott fényjel is  $45^\circ$ -os egyenes az ábrán!

A gondolatmenet ugyanaz, mint az előbb  $\Rightarrow$   $a'$  világvonalán az  $A'$  esemény ideje  $\frac{t'_2}{2} = t'_1 \Rightarrow$  az egyidejűség vonalát  $a'$  és  $b'$  számára a ferde szaggatott vonal jelzi.

A „vesszősek“ az egyidejűség vonala mentén mérnek távolságot (a vesszőtlenek is, a saját egyidejűségi vonalaik mentén)  $\Rightarrow$  az  $x'$ -tengely a szaggatott vonallal lesz párhuzamos!

**AZ EGYIDEJŰSÉG RELATÍV.**



3. ábra

4. ábra: Mi a helyzet a *newtoni* kinematikában? Galilei-transzformáció.

Az *idő* abszolút (csak egyféle egyidejűségi vonalak vannak az ábrán, a vízszintes szaggatott vonalak).  $\Rightarrow$  a fénysebesség viszont így relatív.

$\mathbf{a}$  által kibocsátott fényjel sebessége:  $c \left( = \frac{x}{t} \right)$

$\mathbf{a}'$  szerint:

$$c' = \frac{x - \Delta x}{t} = c - \frac{\Delta x}{t} = c - v,$$

ahol  $v$ :  $\mathbf{a}'$  sebessége.

.....

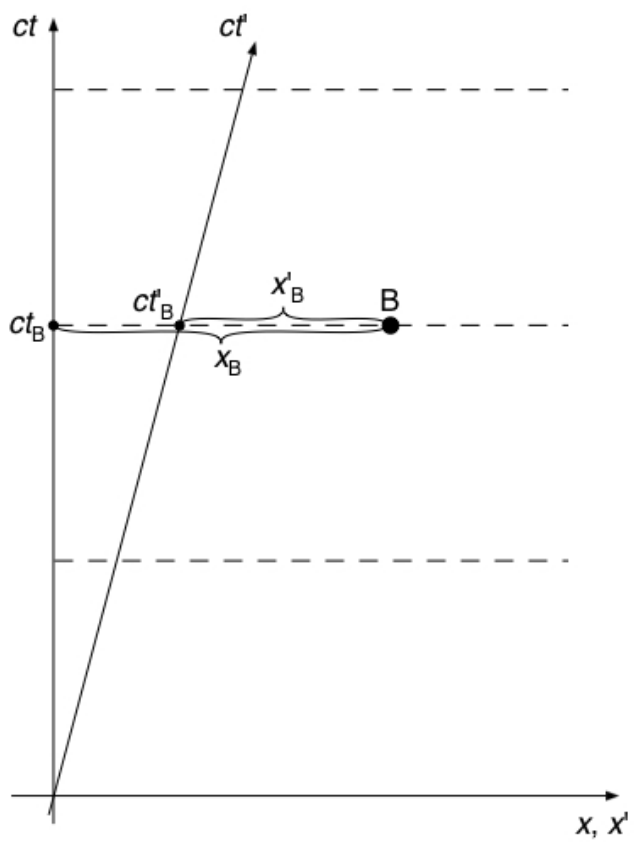
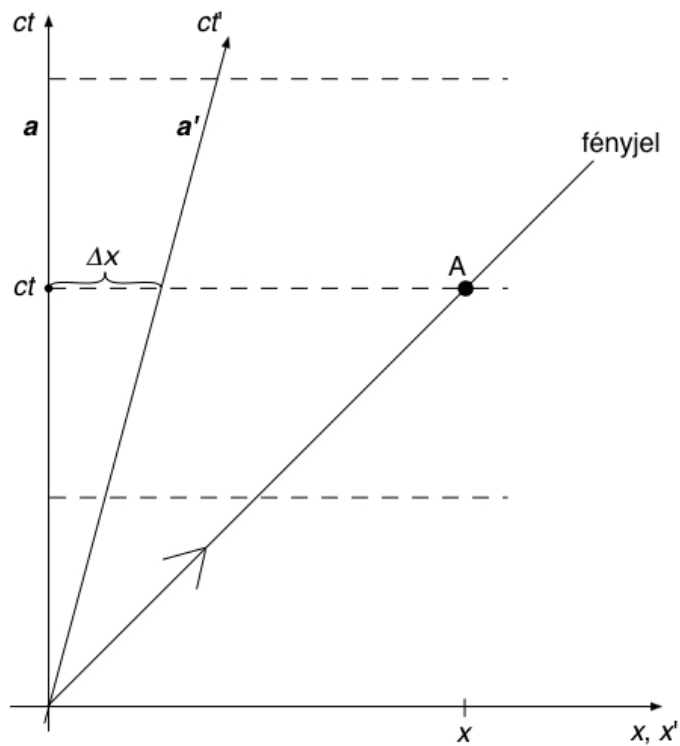
Galilei-transzformáció (pl. a B eseményre, ld. alsó ábra):

$$x'_B = x_B - \Delta x_B = x_B - vt_B$$

$$t'_B = t_B$$

.....





4. ábra

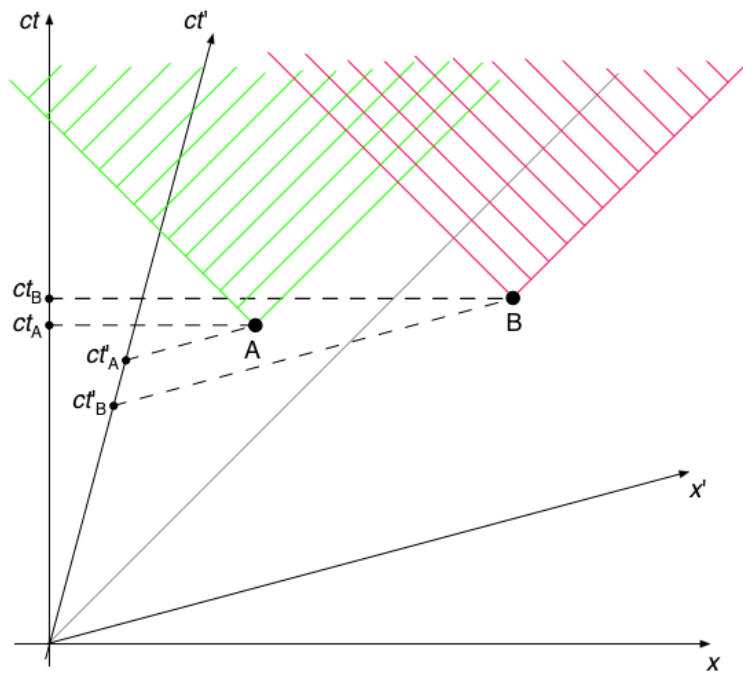
5. ábra: Vissza Einsteinhez. Események sorrendje.

Az események sorrendje lehet különböző K-ban és K'-ben:

$$t_A < t_B, \text{ de } t'_A > t'_B$$

A jelenség magyarázata, hogy a „vesszősek“ és a „vesszőtlenek“ más-más módon jelzik az egyidejűséget az ábrán (ennek pedig a fénysebesség abszolút volta az oka).

De: A és B között nem lehet *ok-okozat* kapcsolat. Az A és B által befolyásolható események a zöld, ill. piros tartományon belül fekszenek (ezek az ún. jövőbeli fénykúpok); látható, hogy A és B egymás fénykúpján (befolyási tartományán) *kívül* fekszenek.



5. ábra

6. ábra: Sebességtranszformáció.

$$u = \frac{x_D}{t_D} = \langle \text{a zöld háromszögek hasonlósága miatt} \rangle =$$

$$\Rightarrow = \frac{|x'_A| + x'_D}{t'_A} \quad (1)$$

$$\Rightarrow = \frac{ct'_A - ct'_D}{|x'_A|} \cdot c \quad (2)$$

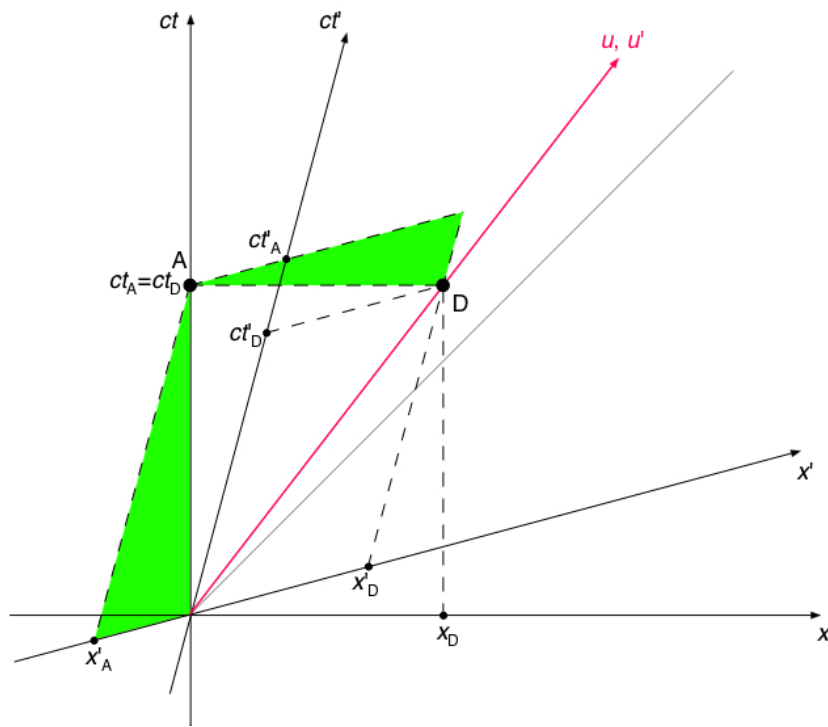
$$(1) \Rightarrow x'_D = ut'_A - |x'_A|$$

$$(2) \Rightarrow t'_D = t'_A - u \cdot \frac{|x'_A|}{c^2}$$

A két utolsó egyenletet egymással osztva:

$$u' = \frac{x'_D}{t'_D} = \frac{ut'_A - |x'_A|}{t'_A - u \frac{|x'_A|}{c^2}} = \frac{u - \frac{|x'_A|}{t'_A}}{1 - \frac{u}{c^2} \frac{|x'_A|}{t'_A}} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

Megjegyzés: a vesszős tengelyek kalibrálását még nem végeztük el (a vesszőtlenekhez képest), de ez még nem okozott gondot, mert minden aránypárban (pl.  $\frac{x_D}{t_D}$ , (1), (2)) a számláló és a nevező mindig ugyanabban a rendszerben van kalibrálva (vagy mindkettő a vesszősben, vagy mindkettő a vesszőtlenben).



6. ábra

7. ábra: Inverz sebességtranszformáció.

(A sebességtranszformáció inverze természetesen algebrailag is kijön, ha magát az előző sebességtranszformációs egyenletet  $u$ -ra megoldjuk.)

$$u' = \frac{x'_D}{t'_D} = \langle \text{a zöld háromszögek hasonlósága miatt} \rangle =$$

$$\Rightarrow = \frac{x_D - x_A}{t_A} \quad (1)$$

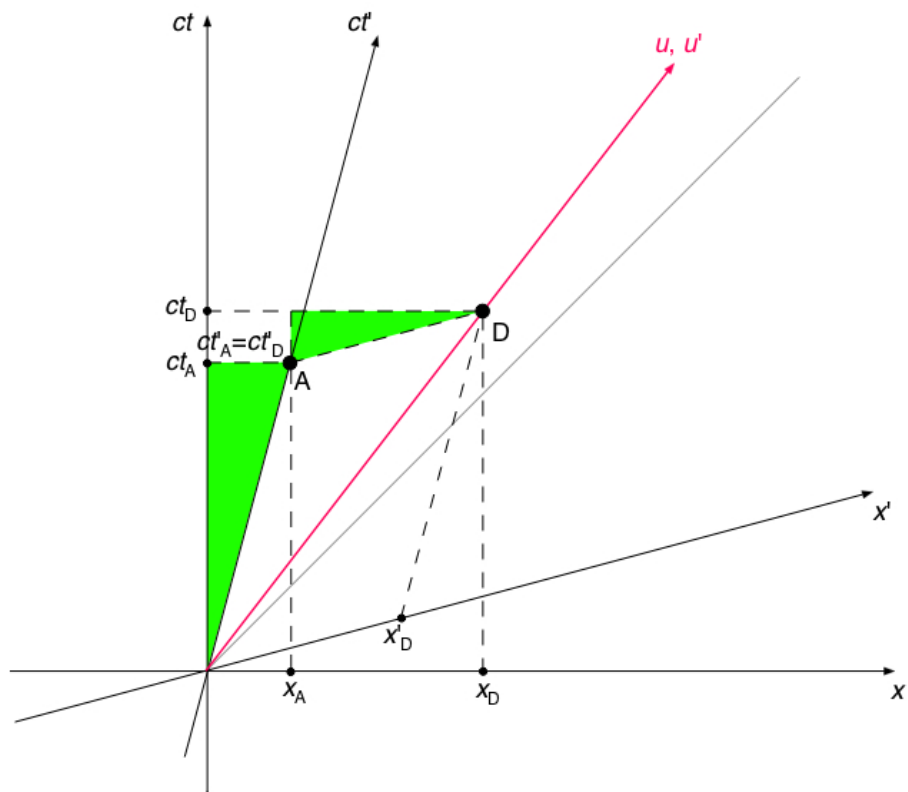
$$\Rightarrow = \frac{ct_D - ct_A}{x_A} \cdot c \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow x_D = u' t_A + x_A$$

$$(2) \Rightarrow t_D = t_A + u' \cdot \frac{x_A}{c^2}$$

A két utolsó egyenletet egymással osztva:

$$u = \frac{x_D}{t_D} = \frac{u' t_A + x_A}{t_A + u' \frac{x_A}{c^2}} = \frac{u' + \frac{x_A}{t_A}}{1 + \frac{u' x_A}{c^2 t_A}} = \frac{u' + v}{1 + \frac{u' v}{c^2}}$$



7. ábra

## 8. ábra: Idődilatáció.

$t'_A$ : O és A között eltelt „sajátidő” (végig  $\mathbf{a}'$  méri, a saját órájával).

$t_A$ : O és A között  $\mathbf{a}$  általt mért idő. Ő ehhez a méréshez felhasználja az egyidejűségi vonalat (praktikusan: lekérdezi a  $\mathbf{b}$  karóráján mutatott értéket).

$t_B$ : O és B közötti „sajátidő” (végig  $\mathbf{a}$  órája méri).

$t'_B$ : O és B között  $\mathbf{a}'$  általt mért idő. Ő ehhez a méréshez felhasználja az egyidejűségi vonalat (praktikusan: lekérdezi a  $\mathbf{d}'$  karóráján mutatott értéket).

A szimmetria miatt:

$$t_A = \gamma \cdot t'_A \quad \text{és} \quad t'_B = \gamma \cdot t_B,$$

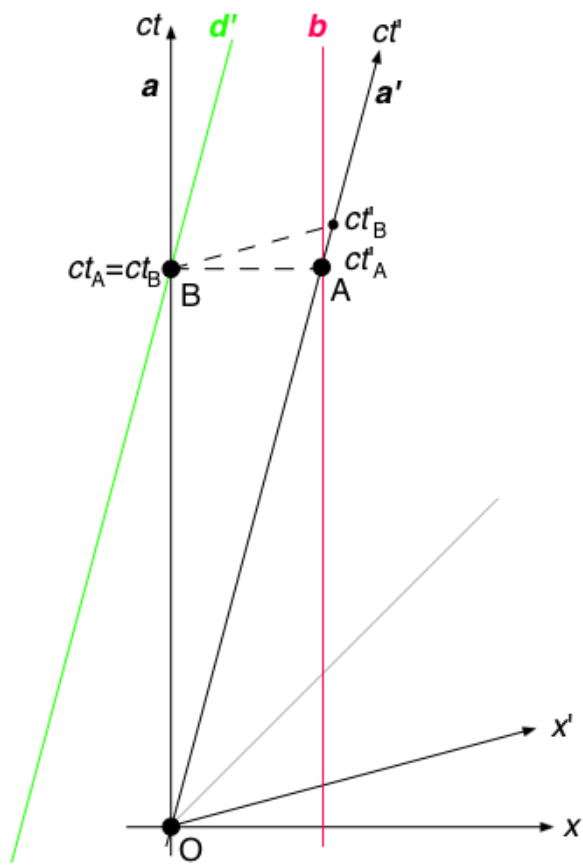
ahol a két  $\gamma$  ugyanaz.

$$\Rightarrow t'_B = \gamma \cdot t_B = \gamma \cdot t_A = \gamma^2 t'_A, \quad \text{tehát } \gamma > 1.$$

A sajátidő mindig a legrövidebb időtartam két esemény között. Ha bárki más méri az időtartamot, ennél hosszabbat fog mérni.

## IDŐDILATÁCIÓ.





8. ábra

9. ábra: Idődilatáció (folyt.)

A zöld és a piros háromszög hasonlósága miatt:

$$v \left( = \frac{x_A}{t_A} \right) = \frac{ct'_B - ct'_A}{|x'_B|} \cdot c$$

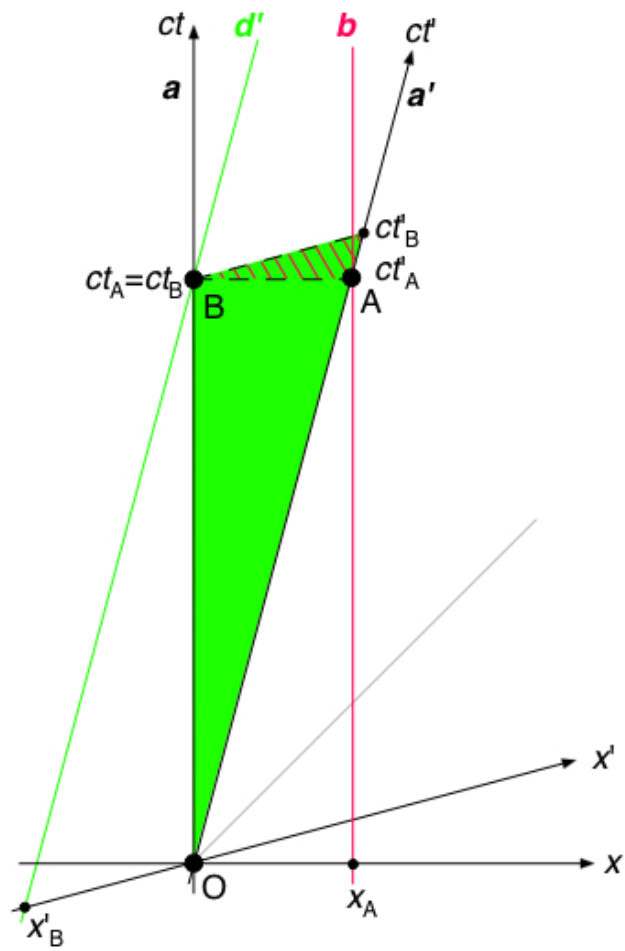
Az előző oldal alapján:  $t'_A = \frac{1}{\gamma^2} t'_B$

$$\Rightarrow v = \frac{c^2 t'_B \left( 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right)}{|x'_B|} = \frac{c^2 \left( 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right)}{v} \quad (\text{mert } \frac{|x'_B|}{t'_B} = v)$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ez az idődilatócióban szereplő faktor.



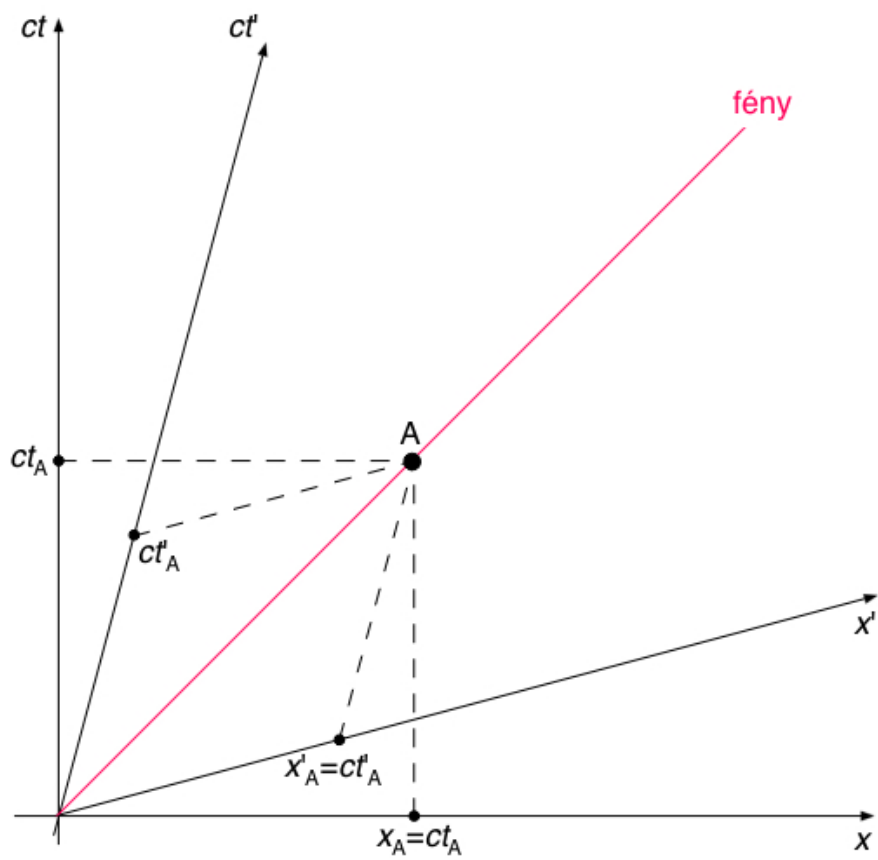
9. ábra

10. ábra: A kalibrálásról.

A  $ct$ - és  $x$ -tengelyek kalibrálása (azaz az 1 méteres osztások távolsága az ábrán) ugyanaz kell hogy legyen, csak így lehet  $45^\circ$ -os egyenes a fény világvonala.

Ugyanezen okból a  $ct'$ - és  $x'$ -tengelyek kalibrálása is ugyanaz kell hogy legyen (az 1 méteres osztások távolsága az ábra  $ct'$ - és  $x'$ -tengelyein ugyanakkora kell hogy legyen).

(A vesszős és vesszőtlen tengelyek *egymáshoz* való kalibrálásáról itt még nincs szó!)



10. ábra

11. ábra: Hosszkontrakció: K-ban mozgó, K'-ben álló rúd hossza.

A kalibrációról előbb írottak miatt:

Ugyanaz a viszony  $x'_E$  és  $x_E$  között, mint  $t'_B$  és  $t_B$  között.

8. ábra:  $t'_B = \gamma \cdot t_B$

$$\Rightarrow x'_E = \gamma \cdot x_E$$

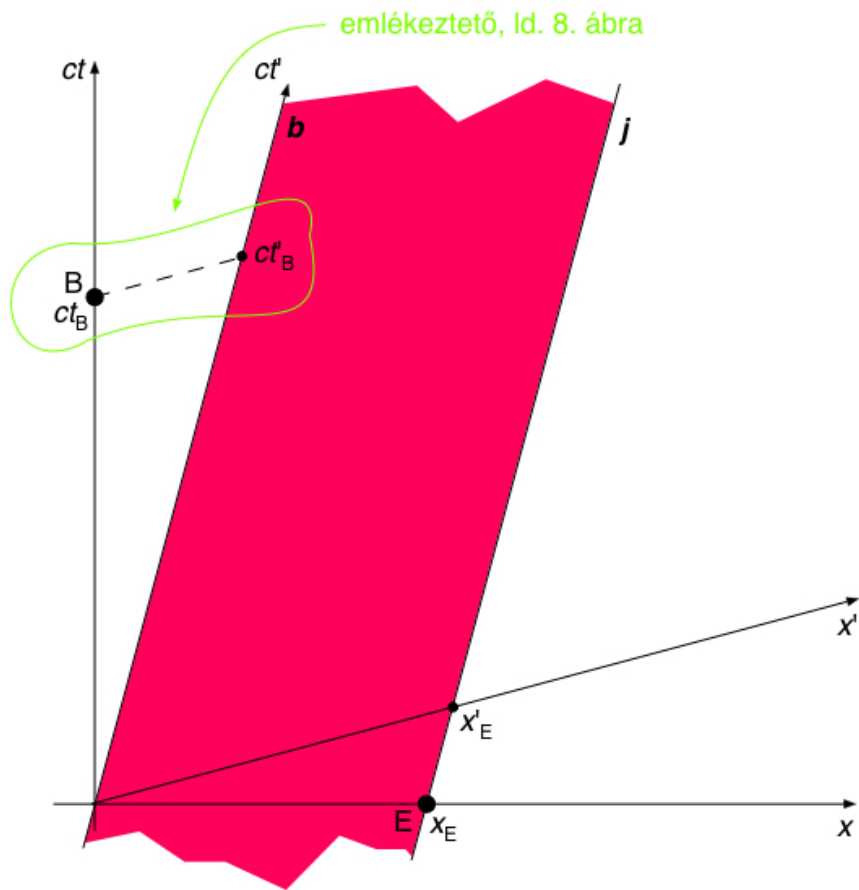
A rúd „sajáthossza“ (nyugalmi hossza):

$$l_0 = x'_E \quad (\text{K}'\text{-ben méri})$$

A rúd „mozgási hossza“:

$$l = x_E = \frac{x'_E}{\gamma} = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{K-ban méri})$$

## **HOSSZKONTRAKCIÓ.**



11. ábra

12. ábra: Hosszkontrakció:  $K'$ -ben mozgó,  $K$ -ban álló rúd hossza.

8. ábra:  $t_A = \gamma \cdot t'_A$

$$\Rightarrow x_F = \gamma \cdot x'_F$$

A rúd „sajáthossza“ (nyugalmi hossza):

$$l_0 = x_F \quad (\text{K-ban mérik})$$

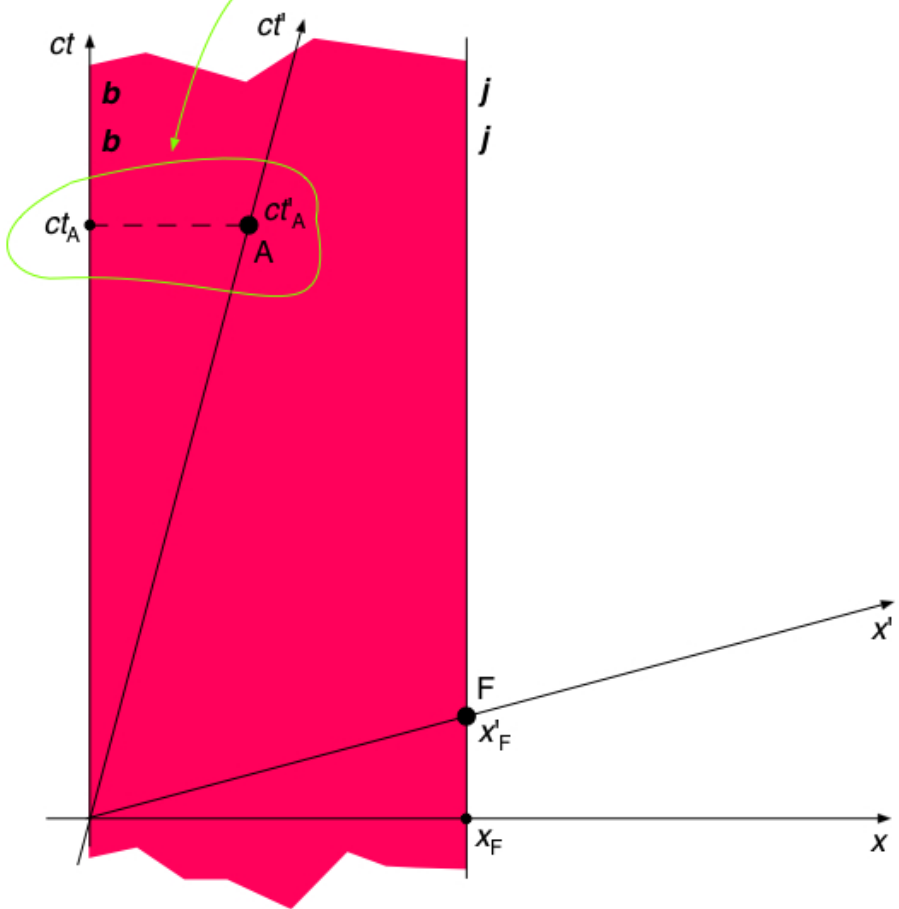
A rúd „mozgási hossza“:

$$l = x'_F = \frac{x_F}{\gamma} = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{K'-ben mérik})$$

Megjegyzés: az ábra naiv euklideszi értelmezéséből  $x_F < x'_F$  következne, de látjuk a képletből, hogy  $x_F > x'_F$ ! Ez előrevetíti, hogy a vesszős és vesszőtlen tengelyek egymáshoz kalibrálása nem az euklideszi geometriának megfelelő lesz.



emlékeztető, ld. 8. ábra



12. ábra

### 13. ábra: Kalibráció.

A 10. ábrán volt szó az  $x'$ - és  $ct'$ -tengelyek egymáshoz kalibrálásáról (ill. az  $x$ - és  $ct$ -tengelyek egymáshoz kalibrálásáról).

Most: hogyan kell a  $ct$ - és  $ct'$ - (és  $ct''$ -, stb.) tengelyeket egymáshoz kalibrálni?

Pl.:

$ct_A = cT$  (méterben mérve). Hol van az a G esemény, amelyre  $ct'_G = cT$ ?

$$t'_G = T = t_A = \gamma \cdot t'_A > t'_A \quad \Rightarrow \quad G \text{ „felfelé” helyezkedik el az ábrán.}$$

G koordinátái K-ban:

$$ct = \gamma ct'_G = \gamma cT \quad (1)$$

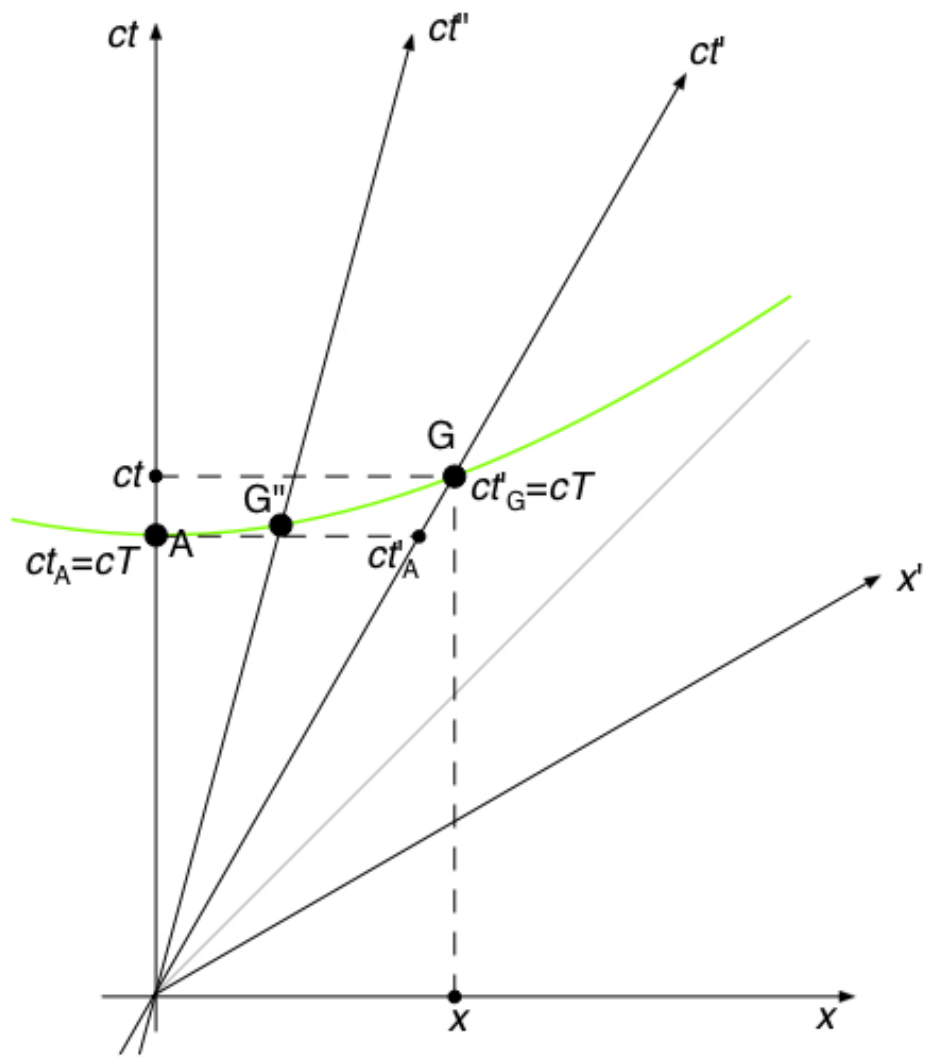
$$x = vt_G = \gamma vT \quad (2)$$

Fejezzük ki a kapcsolatot  $x$  és  $ct$  között úgy, hogy  $v$ -t elimináljuk! Így a konklúziónk nem csak a G, hanem a  $G''$ , stb. eseményekre is igaz lesz.

$$(1), (2) \quad \Rightarrow \quad ct = cT \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2 t^2}}}$$

$$\Rightarrow \quad c^2 t^2 - x^2 = c^2 T^2$$

Egy *hiperbola* egyenletét kaptuk (az ábrán zölddel jelölve). Ez az ún. „kalibrációs hiperbola”.



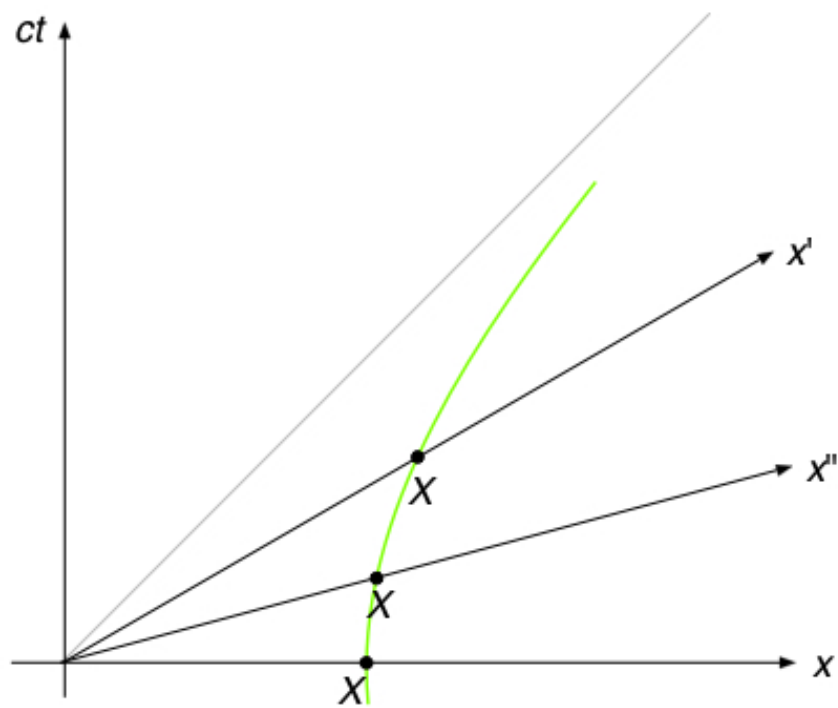
13. ábra

14. ábra: Kalibráció 2.

A 8. ábráról írottak értelmében az  $x$ -,  $x'$ -,  $x''$ -, stb. tengelyek egymáshoz kalibrálása hasonlóan, kalibrációs hiperbolával történik, amelynek egyenlete:

$$x^2 - c^2 t^2 = X^2$$

(a tengelyeken  $X$  méter osztást kijelölő hiperbola egyenlete).



14. ábra

15. ábra: A fénytani Doppler-effektus.

O, A, B, C, ...: kibocsátási események

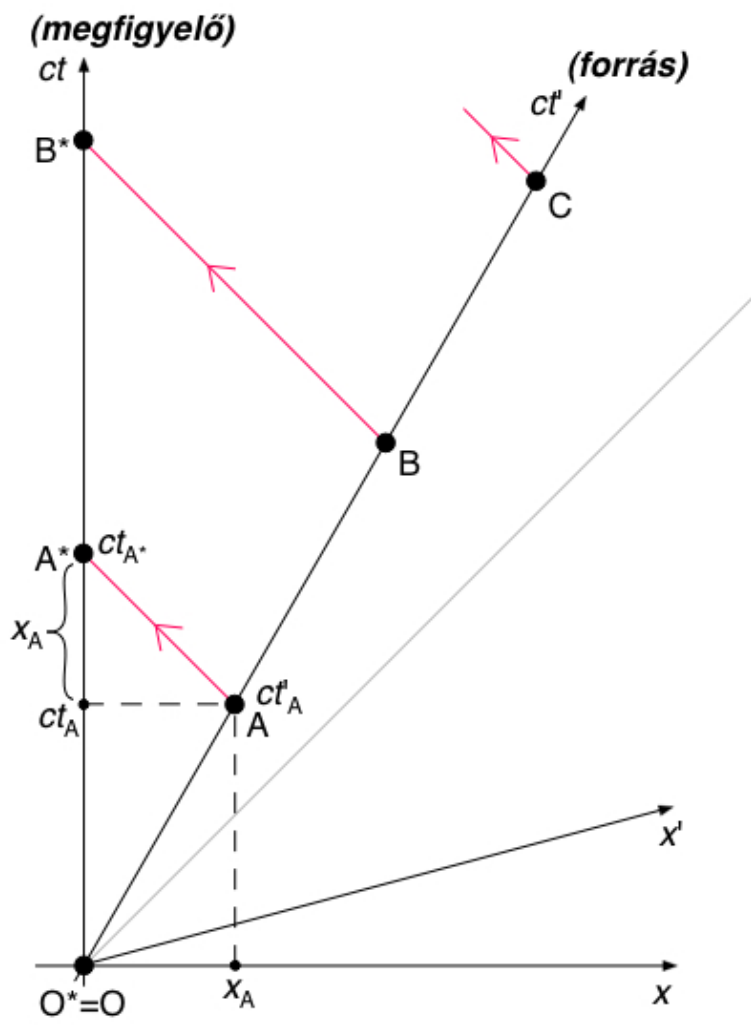
O\*, A\*, B\*, C\*, ...: detektálási események

$$ct_A^* = ct_A + x_A = ct_A + vt_A = ct_A \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \frac{ct'_A}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 + \frac{v}{c}\right) = ct'_A \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

Mindkét oldal reciprokát véve:

$$f_{\text{megfigyelt}} = f_{\text{kibocsátott}} \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

Megjegyzés: a fenti képlet egymástól *távolodó* forrás és megfigyelő esetére vonatkozik.



15. ábra

16. ábra: Lorentz-transzformáció.

Cél:  $(x_P, t_P)$  ismeretében  $(x'_P, t'_P) = (?, ?)$

„Segédesemények“: A, B.

A zöld és piros háromszögek mind hasonlóak (az azonos színűek egybevágóak is).

$$x'_P = x'_B - \Delta x'_{PB} = x'_B - |x'_A| = x'_B - vt'_A = \frac{x_P}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - v \frac{t_P}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ahol felhasználtuk a hosszkontrakció (ld. 11. ábra) és az idődilatació (ld. 8. ábra) képletét. Azaz az  $x'$ -re vonatkozó Lorentz-transzformációs formula:

$$x'_P = \frac{x_P - vt_P}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{L1})$$

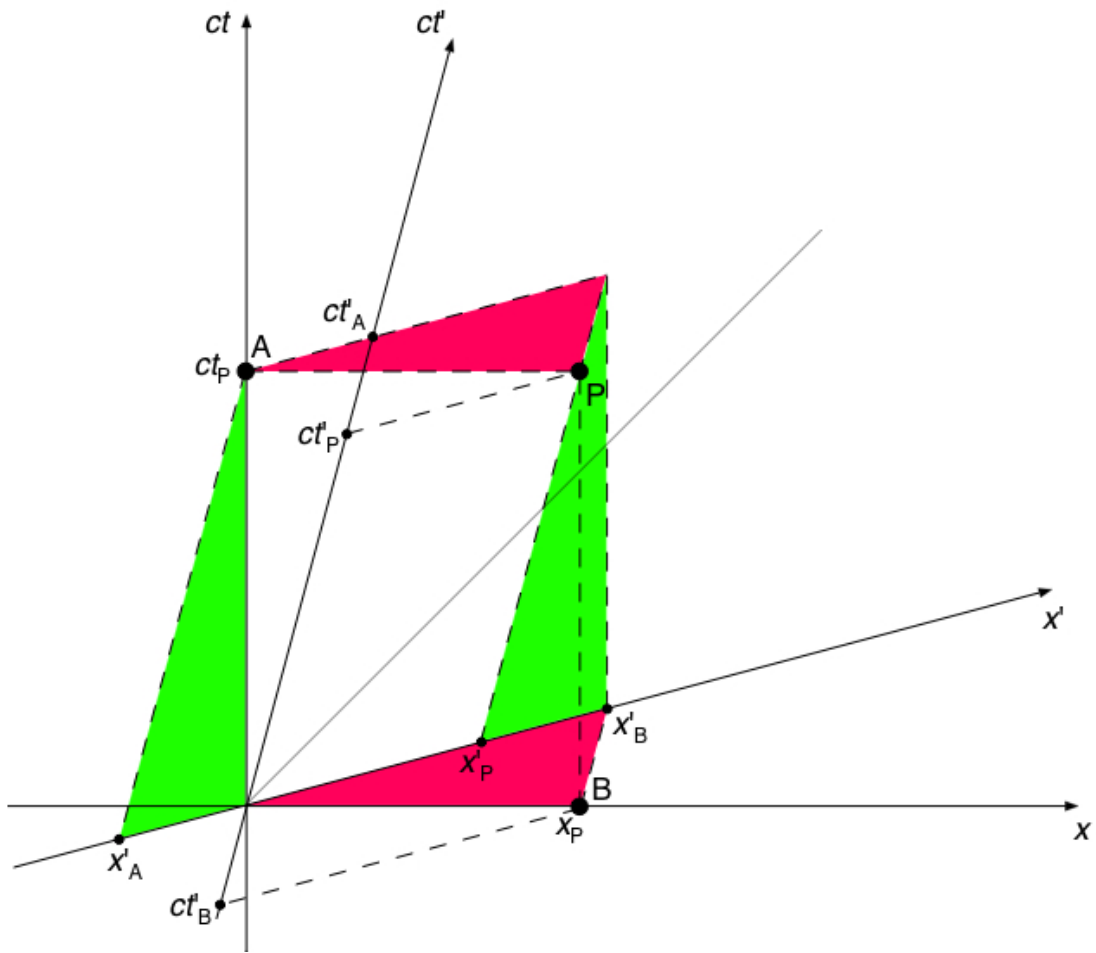
Hasonlóan:

$$ct'_P = ct'_A - |ct'_B| = \left\langle \frac{|ct'_B|}{x'_B} = \frac{v}{c} \right\rangle = ct'_A - \frac{v}{c} x'_B = c \frac{t_P}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v}{c} \frac{x_P}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Azaz a  $t'$ -re vonatkozó Lorentz-transzformációs formula:

$$t'_P = \frac{t_P - \frac{v}{c^2} x_P}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{L2})$$





16. ábra

17. ábra: Inverz Lorentz-transzformáció.

(Megjegyzés: az inverz transzformációs formulák természetesen megkaphatók algebrai úton is: ehhez az (L1), (L2) egyenletrendszert kell megoldani  $x$ -re és  $t$ -re.)

„Segédesemények“: D, E.

$$x_P = x_E + \Delta x_{EP} = x_E + x_D = x_E + vt_D = \frac{x'_P}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + v \frac{t'_P}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ahol felhasználtuk a hosszkontrakció (ld. 12. ábra) és az idődilatáció (ld. 8. ábra) képletét. Azaz az  $x$ -re vonatkozó (inverz) Lorentz-transzformációs formula:

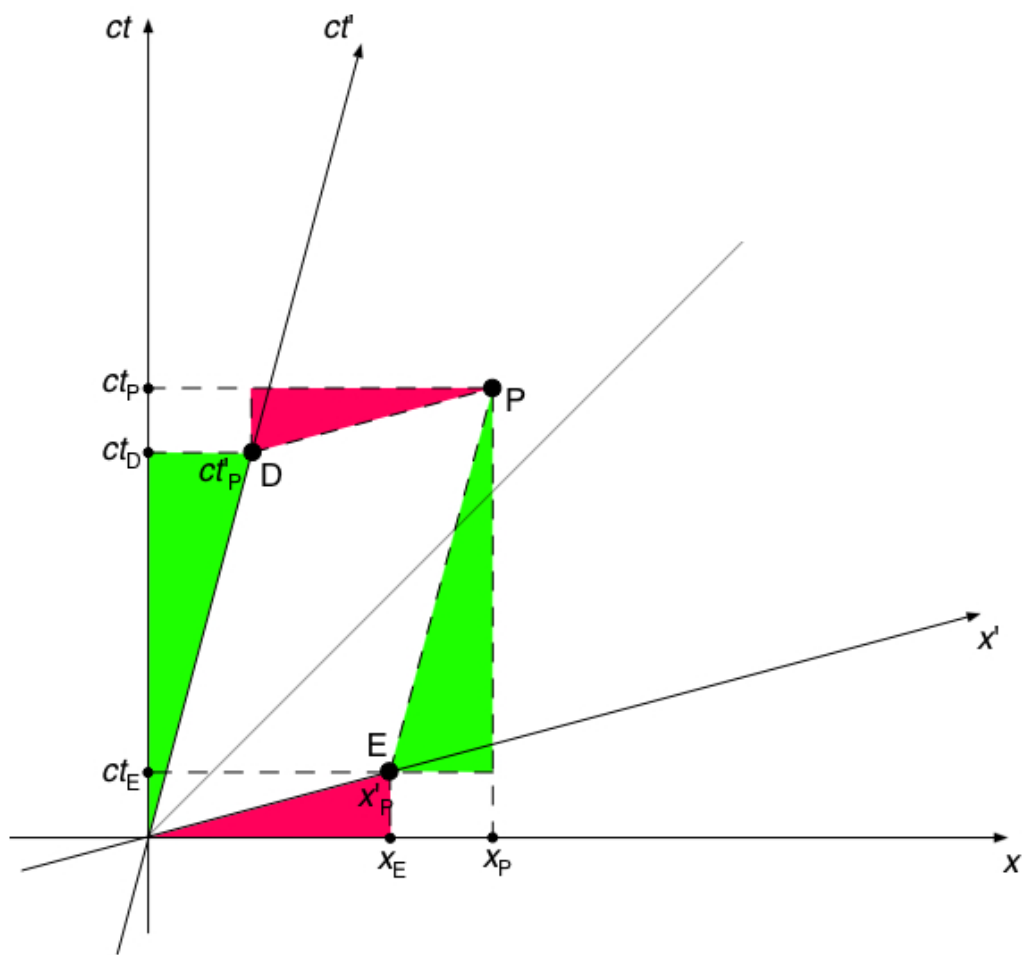
$$x_P = \frac{x'_P + vt'_P}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{IL1})$$

Hasonlóan:

$$ct_P = ct_D + ct_E = \left\langle \frac{ct_E}{x_E} = \frac{v}{c} \right\rangle = ct_D + \frac{v}{c} x_E = c \frac{t'_P}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{v}{c} \frac{x'_P}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Azaz a  $t$ -re vonatkozó (inverz) Lorentz-transzformációs formula:

$$t_P = \frac{t'_P + \frac{v}{c^2} x'_P}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{IL2})$$



17. ábra

18. ábra: Két esemény közötti téridő-intervallum.

Az események közötti „téridőbeli elmozdulás“ vektora

- a K vonatkoztatási rendszerben:  $(dx, dy, dz, cdt)$

- a K' vonatkoztatási rendszerben:  $(dx', dy', dz', cdt')$

Az egyes koordinátadifferenciálok értékében K és K' nem ért egyet (pl.  $dx \neq dx'$ ), erről is szól a Lorentz-transzformáció.

Viszont:

$$c^2 dt'^2 - dx'^2 = c^2 \frac{dt^2 - \frac{2v}{c^2} dxdt + \frac{v^2}{c^4} dx^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{dx^2 - 2v dxdt + v^2 dx^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c^2 dt^2 - dx^2$$

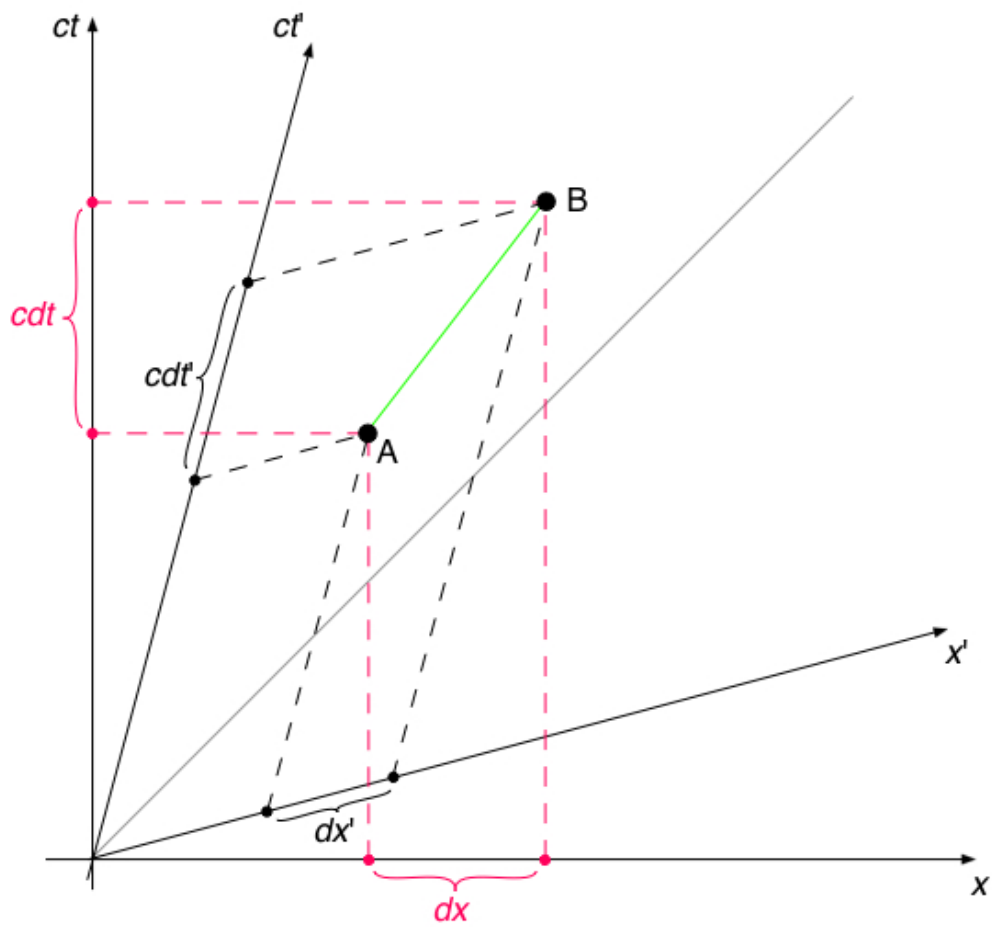
Azaz a

$$c^2 d\tau^2 \equiv c^2 dt^2 - dx^2$$

mennyiség *invariáns*.

Ez a „téridőbeli távolság“ két esemény között.

$d\tau$  jelentése: **SAJÁTIDŐ** (olyan  $(x'', ct'')$  rendszerben mért időtartam, amelyben A és B *azonos helyen* zajlik).



18. ábra

19. ábra: Két esemény közötti téridő-intervallum 2.

Láttuk:  $c^2 dt^2 - dx^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 = c^2 dt''^2 - dx''^2 = \dots = \text{invariáns}$

A 18. ábra A és B eseménye között a fenti négyzetkülönbség *pozitív*  $\Rightarrow$  definiálható egy  $d\tau$  *sajátidő* A és B között.

Az A és B közötti téridő-intervallum: *“időszerű intervallum”*.

.....

A és D között:

$$c^2 dt^2 - dx^2 (= c^2 dt'^2 - dx'^2) = 0$$

Az A és D közötti téridő-intervallum: *“fényszerű intervallum”*.

.....

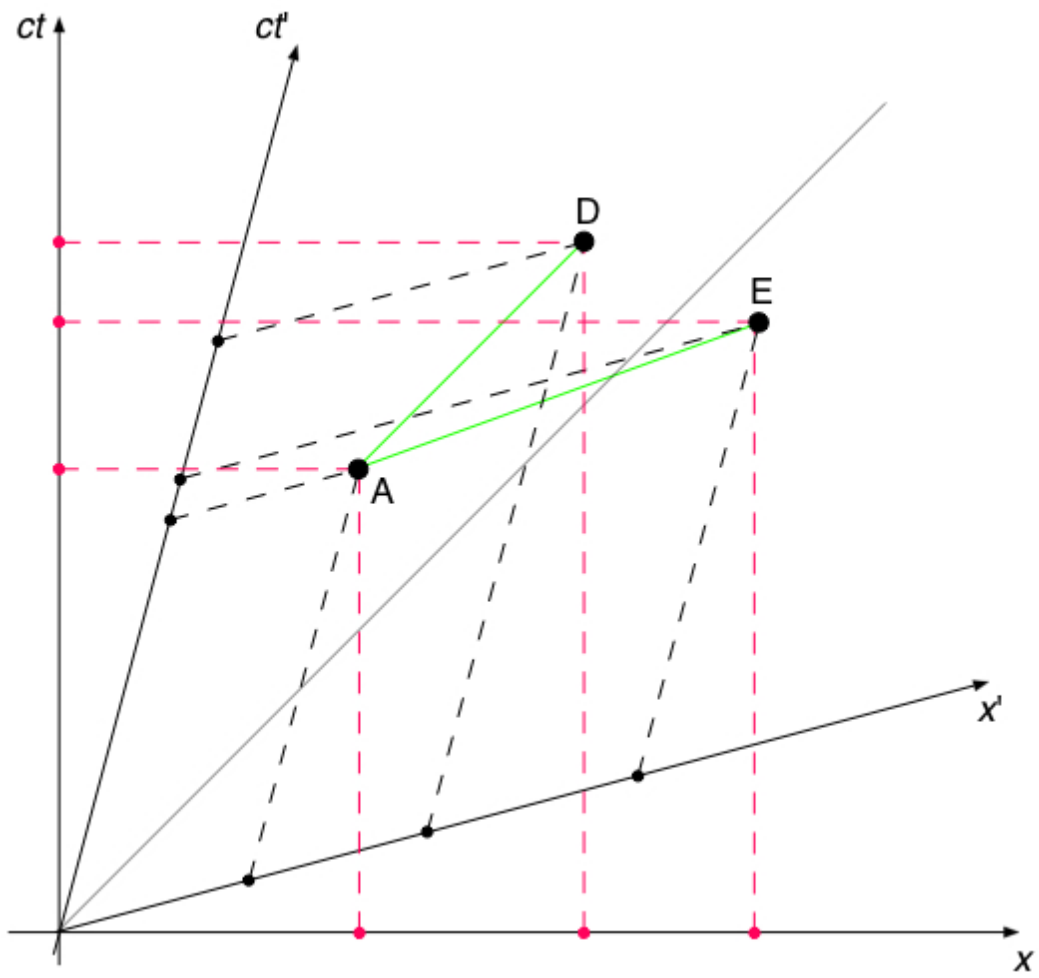
A és E között:

$$c^2 dt^2 - dx^2 (= c^2 dt'^2 - dx'^2) < 0$$

Az A és E közötti téridő-intervallum: *“társzerű intervallum”*.

Ilyenkor:  $ds^2 \equiv dx^2 - c^2 dt^2$

$ds$  jelentése: **SAJÁTHOSSZ** (olyan  $(x'', ct'')$  rendszerben mért távolság az A és E események helye között, amelyben A és E *egy időpontban* zajlik).



19. ábra

20. ábra: Vissza Newtonhoz; dinamika.

Két tömegpont rugalmatlanul összeütközik. Pont olyan az impulzusuk, hogy ütközés után az összetapadt test nyugalomban van a K vonatkoztatási rendszerben.

A: az ütközési esemény.

K', K'', K: az ütközés pillanatában (ill. közvetlenül előtte és utána) az első, a második és az összetapadt test pillanatnyi nyugalmi rendszere.

(pl.  $\Delta x'_1 = 0$ ,  $\Delta x''_2 = 0$ )

Newton  $\Rightarrow$  nincs idődilatació  $\Rightarrow$  a tengelyek kalibrálása olyan, hogy  $\Delta t_1 = \Delta t'_1 = \Delta t''_1$  (ld. ábra).

Pl. az 1. tömegpont mozgása közvetlenül ütközés előtt:

$$v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \quad \left( v'_1 = \frac{\Delta x'_1}{\Delta t'_1} = 0 \right)$$

Ugyanígy értelmezendő (de az ábrán nem szerepel)

$\Delta x_2, c\Delta t_2, c\Delta t'_2, c\Delta t''_2$ ,

$\Delta x_3, c\Delta t_3, c\Delta t'_3, c\Delta t''_3$ .

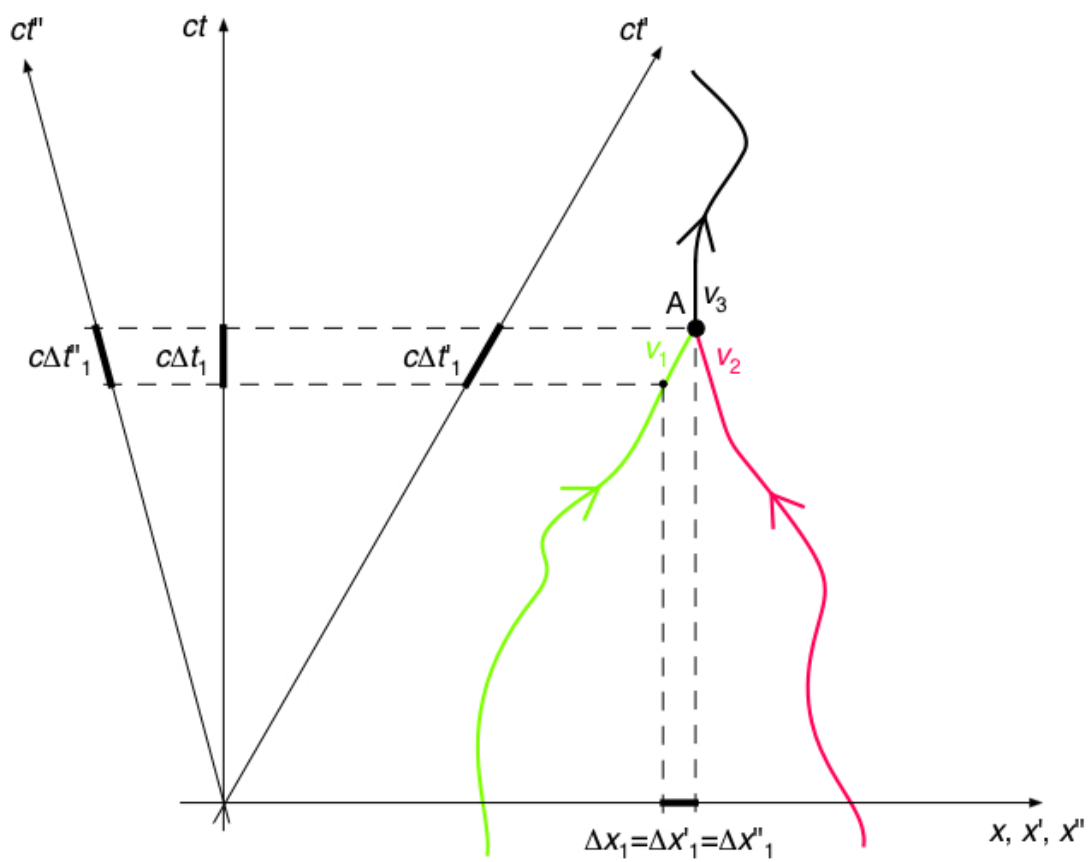
Az A esemény környezetében a 3 világvonallal kapcsolatban ábrázoljunk 3

olyan vektort, amelyekre a vízszintes (azaz  $x$ -) vetület  $\Delta x_i \frac{m_i}{\Delta t_i}$ , a

„függőleges“ (azaz  $t$ -) vetület pedig  $c\Delta t_i \frac{m_i}{\Delta t_i}$ ! [Mindegy, hogy az  $\frac{m_i}{\Delta t_i}$

szorzófaktorban a  $\Delta t_i$  vesszős-e vagy vesszőtlen, mert azok egyenlők.]





20. ábra

21. ábra: Vissza Newtonhoz; dinamika 2.

A kapott 3 új vektor párhuzamos lesz a 20. ábra 3 világvonalával (ez a konstrukcióból adódik).

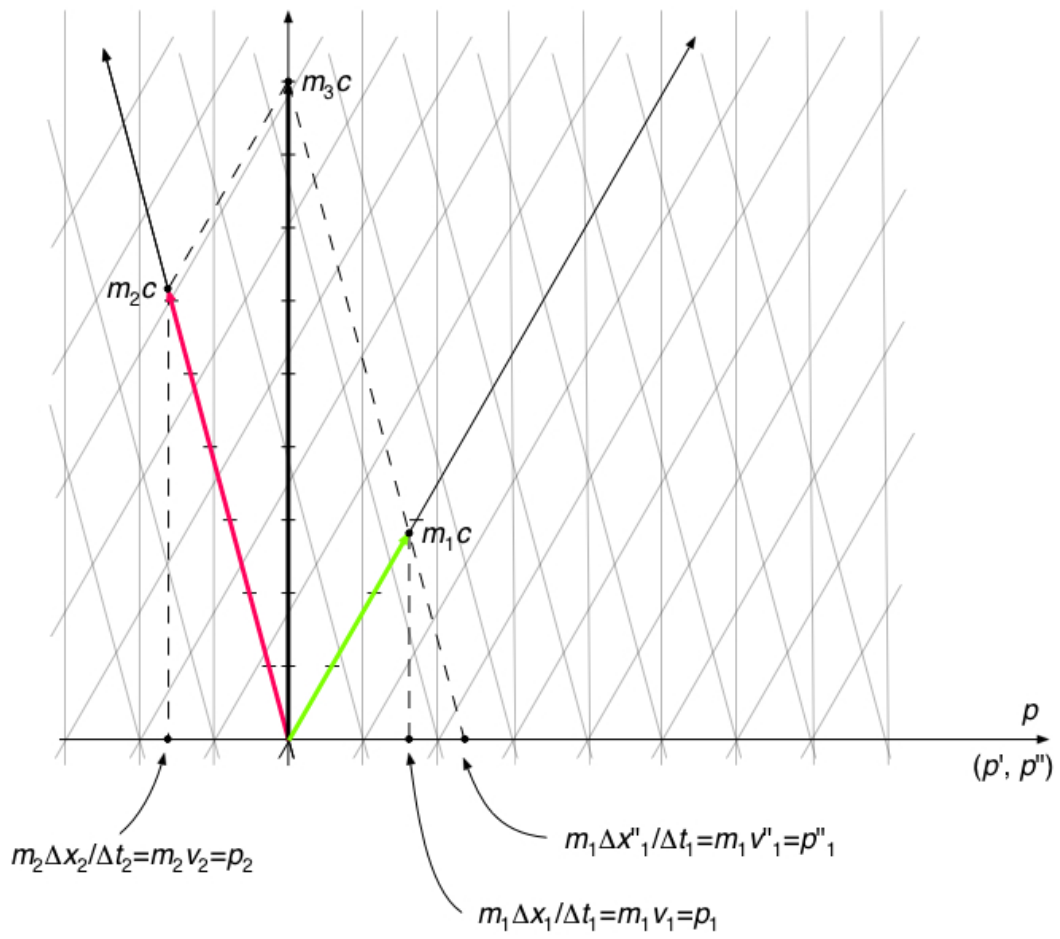
Ráadásul a 3 új vektor (amelyek tehát a  $ct$ -,  $ct'$ -, ill.  $ct''$ -tengelyek irányába mutatnak) hosszai  $m_1c$ ,  $m_2c$  és  $m_3c$  [pontosabban: az 1. vektor a  $ct'$ -irányú tengely  $m_1c$  osztású pontjában végződik, a 2. vektor a  $ct''$ -irányú tengely  $m_2c$  osztású pontjában, a 3. vektor pedig a  $ct$ -irányú tengely  $m_3c$  osztású pontjában].

A vízszintes tengelyre – mint látható –  $p$ -t kell írunk, mert a vektorok vízszintes vetülete a  $K$ -ban mért impulzus. [Illetve a vízszintes tengelyre eső „ferde“ vetületek adják meg a  $K'$ -ben,  $K''$ -ben mért impulzusokat. Ezek közül  $p''_1$ -et mutatja is az ábra.]

Newtoni mechanika, rugalmatlan ütközés  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad (1) \text{ impulzusmegmaradás} \quad (p_1 + p_2 = p_3)$$

$$(2) \text{ tömegmegmaradás} \quad (m_1 + m_2 = m_3)$$



21. ábra

22. ábra: Vissza Newtonhoz; dinamika 3.

A 21. ábrán ez azt jelenti, hogy

$$(1) \text{ imp. megm.} \Rightarrow (a \text{ **zöld vektor** vízszintes komponense}) + (a \text{ **piros vektor** vízszintes komponense}) = (a \text{ **fekete vektor** vízszintes komponense})$$

$$(2) \text{ tömegmegm.} \Rightarrow (a \text{ **zöld vektor** } t' \text{-irányú „hossza“ [azaz a függőleges komponense is]}) + (a \text{ **piros vektor** } t'' \text{-irányú „hossza“ [azaz a függőleges komponense is]}) = (a \text{ **fekete vektor** } t \text{-irányú „hossza“ [azaz a függőleges komponense is]})$$

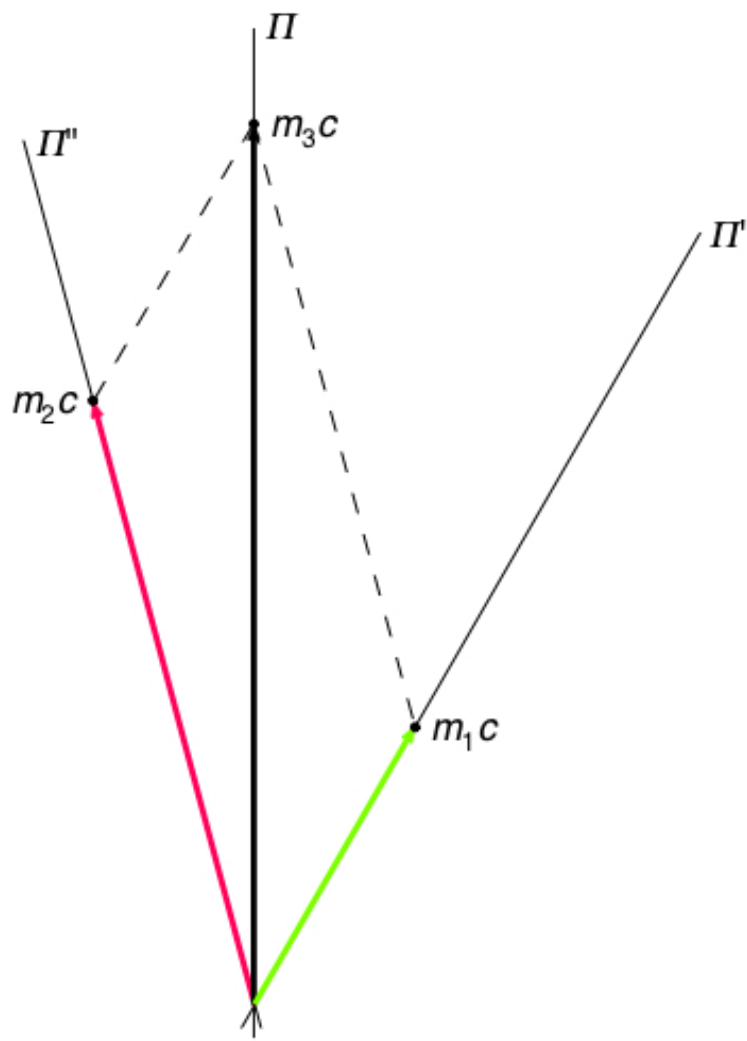
Ebből az következik, hogy a 21. ábrán magukra a vektorokra is igaz, hogy

$$a \text{ **zöld vektor** } + a \text{ **piros vektor** } = a \text{ **fekete vektor** }$$

-----

Kérdések:

1. Mit írjunk  $\Pi$ ,  $\Pi'$ ,  $\Pi''$  helyébe? Milyen *fizikai mennyiség* szerepel azokon a tengelyeken? (Első gondolat: *a tömeg*. De valóban az lesz-e a helyes?)
2. Az egész kiindulásunk (ld. 20. ábra) newtoni, tehát *hibás!* Milyenek lesznek a helyes ábrák és a helyes összefüggések (amelyek  $v_1, v_2, v_3 \ll c$ -re visszaadják a newtoni ábrákat, képleteket)?



22. ábra

23. ábra: A rugalmatlan ütközés relativisztikus (helyes) tárgyalása.

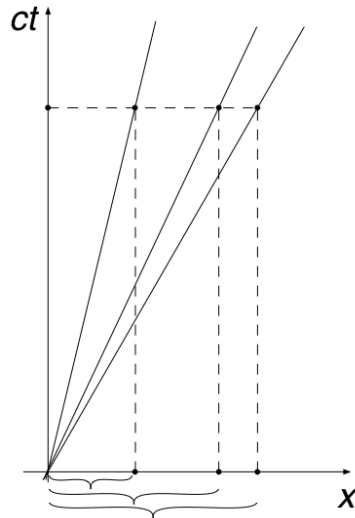
Az egyszerűség kedvéért két *azonos*,  $m$  tömegű test ütközését vizsgáljuk.

K: az a vonatkoztatási rendszer, amelyben az 1. test áll az ütközés előtt (ld. felső ábra).

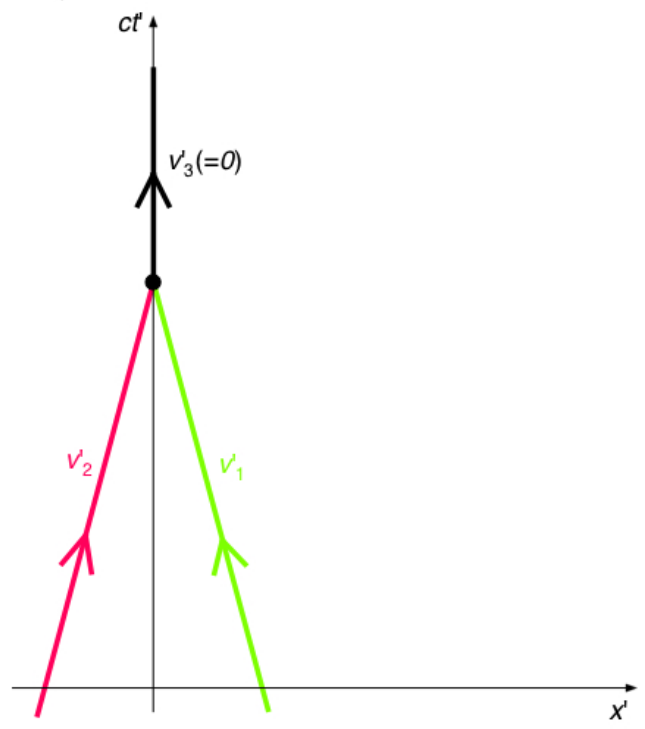
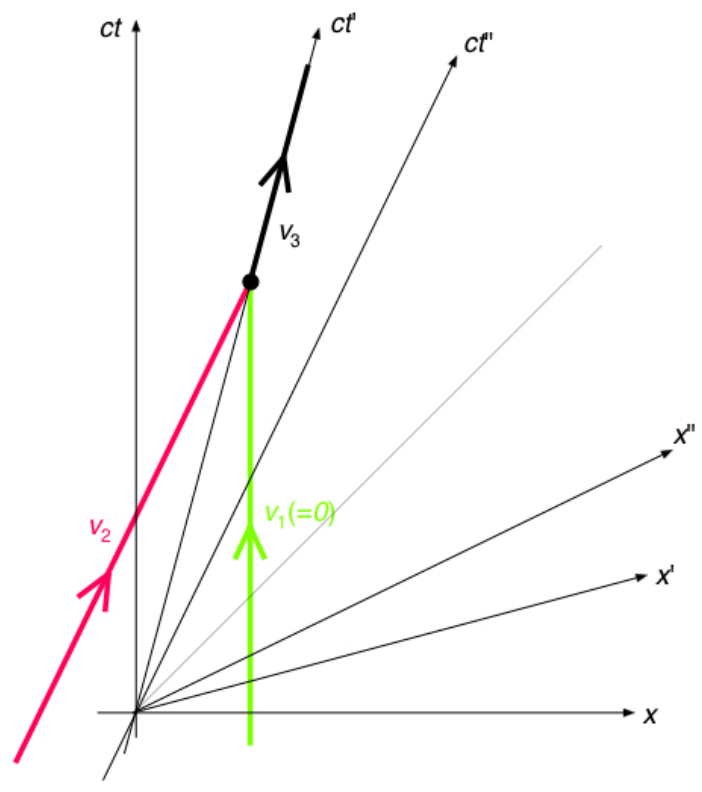
K': az a vonatkoztatási rendszer, amelyben az ütközés szimmetrikus,  $v'_1 = -v'_2$ . Ez tehát az összetapadt test nyugalmi rendszere (ld. alsó ábra).

K'': az a vonatkoztatási rendszer, amelyben a 2. test áll az ütközés előtt (ld. felső ábra).

Egy adott vonatkoztatási rendszerben:



Különböző világvonalakat nézve, ha  $\Delta t$  ugyanaz, akkor a  $\Delta x$ -ek (az  $x$ -vetületek) az adott világvonalú test *sebességével* arányosak.



23. ábra

24. ábra: Impulzus.

Motiváció: definiálni akarjuk az „impulzus“ nevű mennyiséget úgy, hogy az *megmaradó* mennyiség legyen *minden inerciarendszerben*.

Kérdés: ha az impulzust (a newtoni tárgyalás mintája alapján) az  $x$ -,  $x'$ -,  $x''$ - tengelyekre eső vetülettel akarjuk ábrázolni, akkor *milyen mértékben kell megnyújtani* egy adott négyeselmozdulás-vektort, hogy olyan vektorokat kapjunk, amelyekre az  $x$ -,  $x'$ -,  $x''$ -tengelyekre eső vetületek kielégítik a megmaradási törvényt?

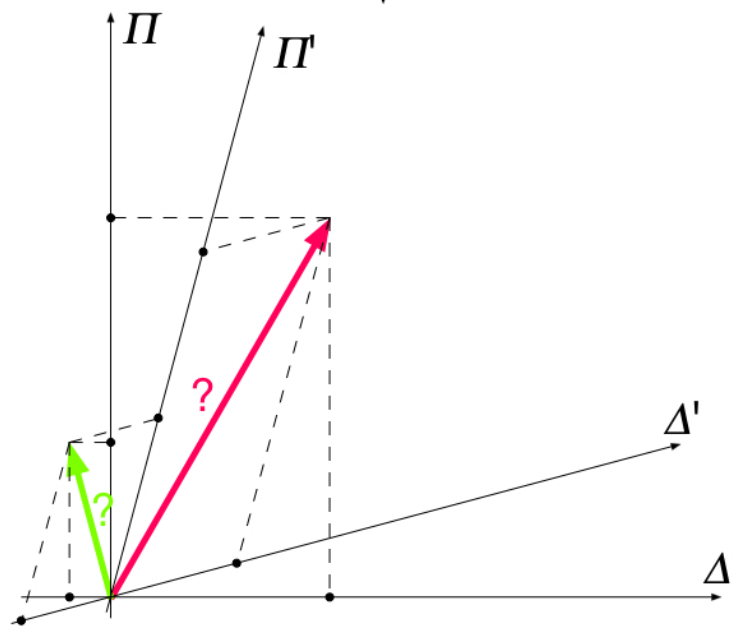
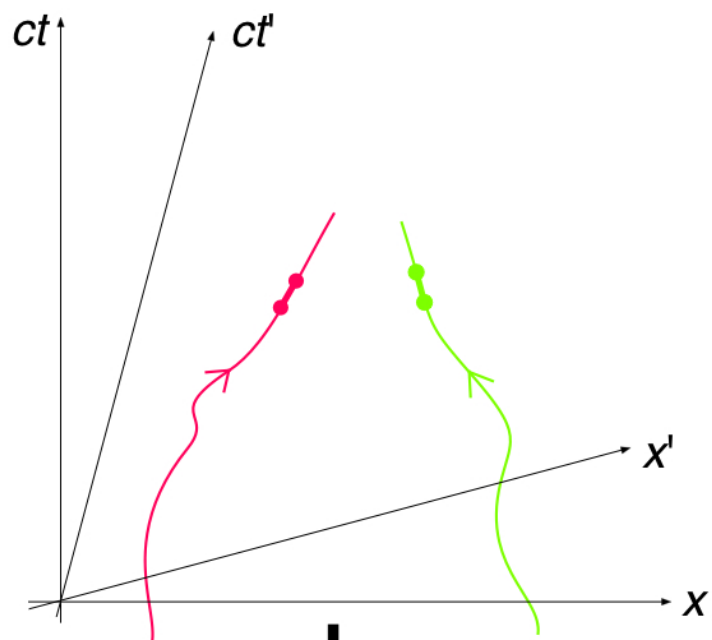
Másik kérdés: az így kapott ábrán mik lesznek a tengelyeken szereplő mennyiségek? ( $\Delta = p$ ,  $\Delta' = p'$ , stb., ezt tudjuk, hiszen az impulzust így definiáltuk, de  $\Pi = ?$ ,  $\Pi' = ?$ , stb.)

-----

Megjegyzés: Mivel egy-egy adott  $(c\Delta t, \Delta x)$  elmozdulásvektort csak valami konstanssal megnyújtunk, az biztos, hogy az új  $\Pi$ -,  $\Pi'$ -tengelyek is úgy lesznek *kalibrálva*, mint a  $ct$ -,  $ct'$ -tengelyek. Ugyanez igaz  $\Delta$  és  $\Delta'$ , valamint  $x$  és  $x'$  viszonyára is.

$\Rightarrow$   $(\Pi, \Delta)$  és  $(\Pi', \Delta')$  között is a *Lorentz-transzformáció* teremt kapcsolatot!





24. ábra

25. ábra: A szorzófaktor 1.

Elemi geometriából következik, hogy ha azt akarjuk, hogy a  $\Delta$ -vetületekre *minden vonatkoztatási rendszerben* teljesüljön az „összeadódási“ (megmaradási) törvény:

$$\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta_3,$$

$$\Delta'_1 + \Delta'_2 = \Delta'_3,$$

$$\Delta''_1 + \Delta''_2 = \Delta''_3,$$

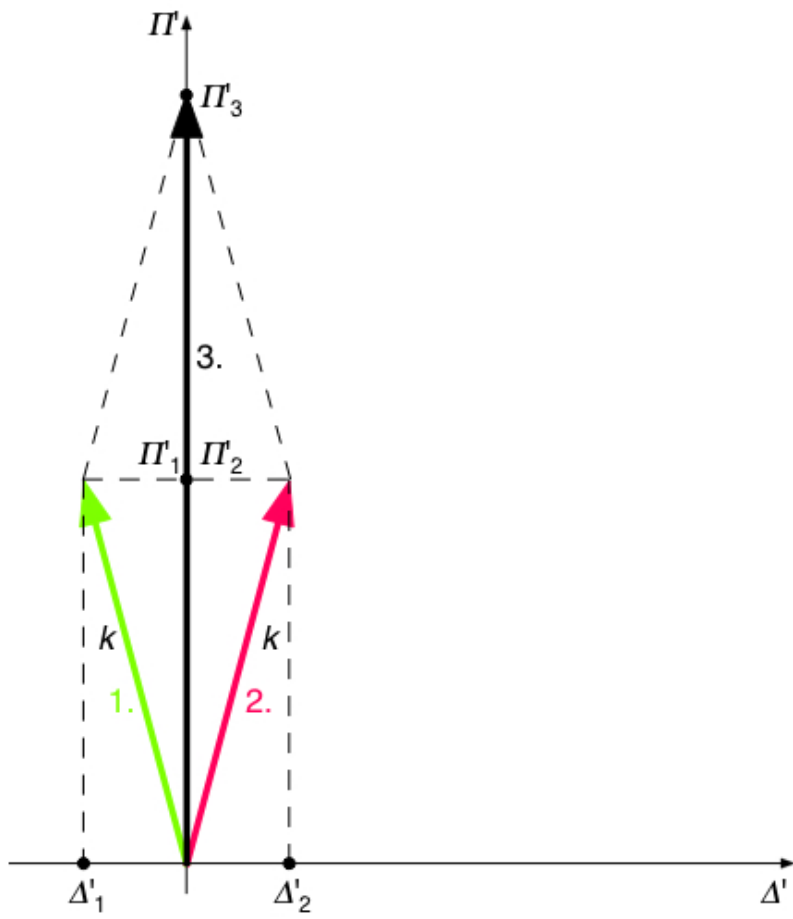
...

akkor *magukra a vektorokra* is kell hogy teljesüljön!

Tehát a kérdés: az adott négyeselmozdulás irányába eső vektorokra milyen szorzófaktorot kell alkalmazni, hogy a *vektorösszeadás* teljesüljön?

A  $K'$ -beli nézőpontból az ütközés szimmetrikus, és az 1. és 2. test teljesen azonosak  $\Rightarrow$  az 1. és 2. vektor „hossza“ meg kell hogy egyezzen (ahogy a 25. ábra mutatja).

A vektorok „hosszát“  $k$ -val jelölöm. Ez a „hossz“ arról a  $\Pi''$  vagy  $\Pi$  tengelyről olvasható le, amelynek az irányában az adott vektor áll.



25. ábra

26. ábra: A szorzófaktor 2.

Más érvelés:  $K''$ -ben a 2. test áll  $\Rightarrow$  amekkora az 1. vektor „hossza“  $K$ -ban, mindenképpen akkor a 2. vektor „hossza“  $K''$ -ben. Ezért *ugyanahhoz a  $k$  osztású ponthoz* van rajzolva a két vektor a  $\Pi$ - ill.  $\Pi''$ -tengelyen.

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= k \\ \Pi''_2 &= k\end{aligned}$$

Lorentz-transzformáció:

$$\Delta_2 = \frac{\Delta'_2 + \frac{v_2}{c} \Pi'_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{\frac{v_2}{c} k}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}$$

Azt akarjuk, hogy a  $\Delta$  mennyiség az impulzus legyen  $\Rightarrow k$  fizikai jelentése ebből kapható meg.

Ugyanis:

A newtoni határesetben a newtoni impulzus-képletet kell visszkapnunk:

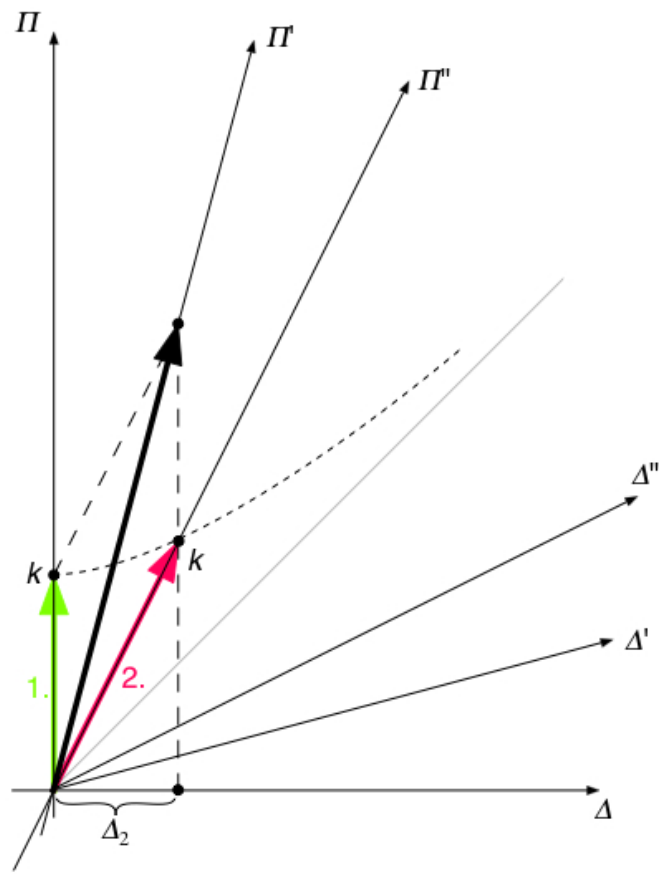
Ha  $v_2 \ll c$ , akkor  $\Delta_2 = m_2 v_2$

$$\text{Azaz: } \frac{k \frac{v_2}{c} k}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} \approx k \frac{v_2}{c} = m_2 v_2$$

Ebből kiadódik  $k$  értéke:

$$k = m_2 c$$

Azaz a keresett szorzófaktor: az adott test *tömege* szorozva a fénysebességgel.



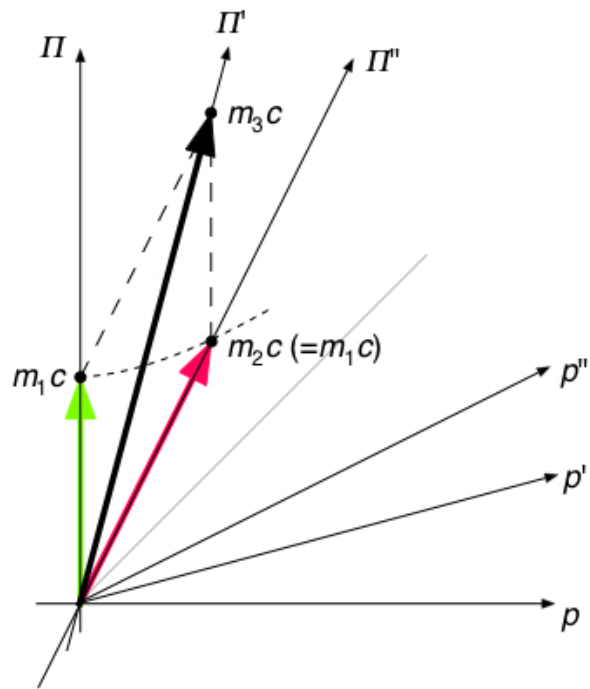
26. ábra

27. ábra: Az impulzus relativisztikus képlete.

Tehát: minden testnél a pillanatnyi nyugalmi vonatkoztatási rendszer (1. test: K, 2. test: K'', 3. test: K')  $\Pi$ -tengelyének azon osztásánál van a vektor csúcsa, amely a test *tömegét* adja meg.

Az impulzus új, relativisztikus definíciója ezek után – abból a követelményből, hogy a  $\Delta$  ( $\Delta'$ ,  $\Delta''$ , stb.) az adott rendszerben mért impulzus legyen – a Lorentz-transzformációból számítható (K'-ben nyugvó test impulzusa K-ban):

$$p = \frac{p' + \frac{v}{c} \Pi'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0 + \frac{v}{c} mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v$$



27. ábra

28. ábra: Energia.

Kérdés: És mi a  $\Pi$  ( $\Pi'$ ,  $\Pi''$ , stb.) mennyiség fizikai tartalma?

A tengelyek kalibrálásáról tudottakat (vagy a Lorentz-transzformációt) alkalmazva:

$$\Pi = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ez milyen mennyiség lehet? Valami olyan, amelyet  $K$  (amelyben a test mozog) *nagyobbnak mér*, mint  $K_{nyug}$  (amelyben a test nem mozog).

Amennyivel nagyobbak méri:

$$\Pi - \Pi_{nyug} = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc.$$

A newtoni határeset segít rájönni ezek után  $\Pi$  jelentésére:

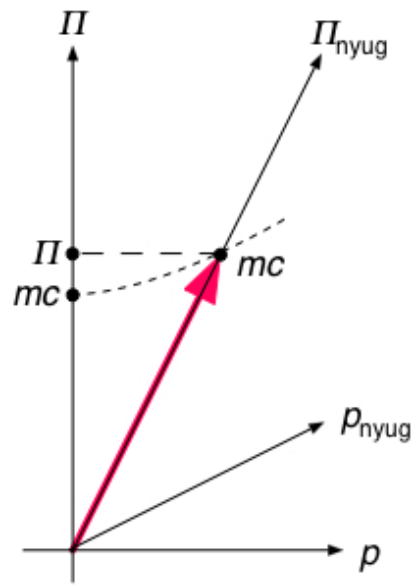
$$\text{Ha } v \ll c: \Pi - \Pi_{nyug} \approx mc \left[ \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) - 1 \right] = \frac{1}{2} m \frac{v^2}{c}.$$

Ez a *mozgási energia!* (osztva  $c$ -vel)

$\Rightarrow$  Muszáj arra következtetnünk, hogy  $\Pi$ : a test energiája (osztva  $c$ -vel)

$$\Rightarrow \Pi = \frac{E}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$





28. ábra

29. ábra: Energia-impulzus négyesvektor.

Összefoglalva:

$$\text{Tömegpont impulzusa: } p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

$$\text{Tömegpont energiája: } E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

(1)-ből és (2)-ből a test sebességét kiküszöbölve  $E$  és  $p$  között az alábbi összefüggés adódik:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = (mc)^2 \quad (3)$$

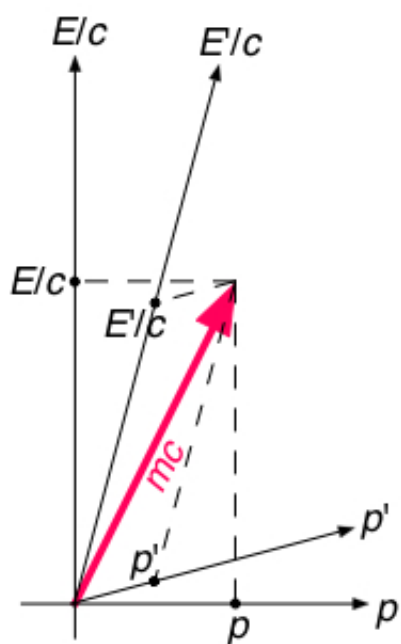
Anyagi pontra tehát  $\frac{E}{c} > p$  (ld. ábra), összefüggésben azzal, hogy az eredeti világvonal – amelyből az  $(E,p)$  négyesvektor megszerkesztéséhez kiindultunk – *időszerű* volt.

Logikus általánosítás, hogy *fényre* is megszerkeszthetünk – a fény  $45^\circ$ -os világvonalából kiindulva – ilyen energia-impulzus négyesvektort, amely  $45^\circ$ -ban dől az ábrán.

$$\Rightarrow \text{fényre: } \frac{E}{c} = p$$

Fényre az (1) és (2) képletek pedig nem alkalmazhatók (mert  $v = c$ ), a (3) képlet viszont igen (mert az (1) és (2) szingularitásait kiküszöböltük belőle). Ebből a foton tömegére zérus adódik:

fényre:  $m = 0$ .



29. ábra

30. ábra: Megmarad-e a tömeg?

Megmarad-e a *tömeg* rugalmatlan ütközéskor?

Visszatérünk a 23. ábrán látható rugalmatlan ütközéshez. A 30. ábrából azonnal látszik: *a tömeg nem marad meg!*

$$M > 2m \quad (\text{mert, mint az ábrán látszik, } \frac{M}{2} > m)$$

Részletek:

A kalibrációról tudottak alapján (vagy a Lorentz-transzformációból) adódik:

$$\frac{E'_1}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (v: \text{ az 1. test sebessége } K' \text{-ben})$$

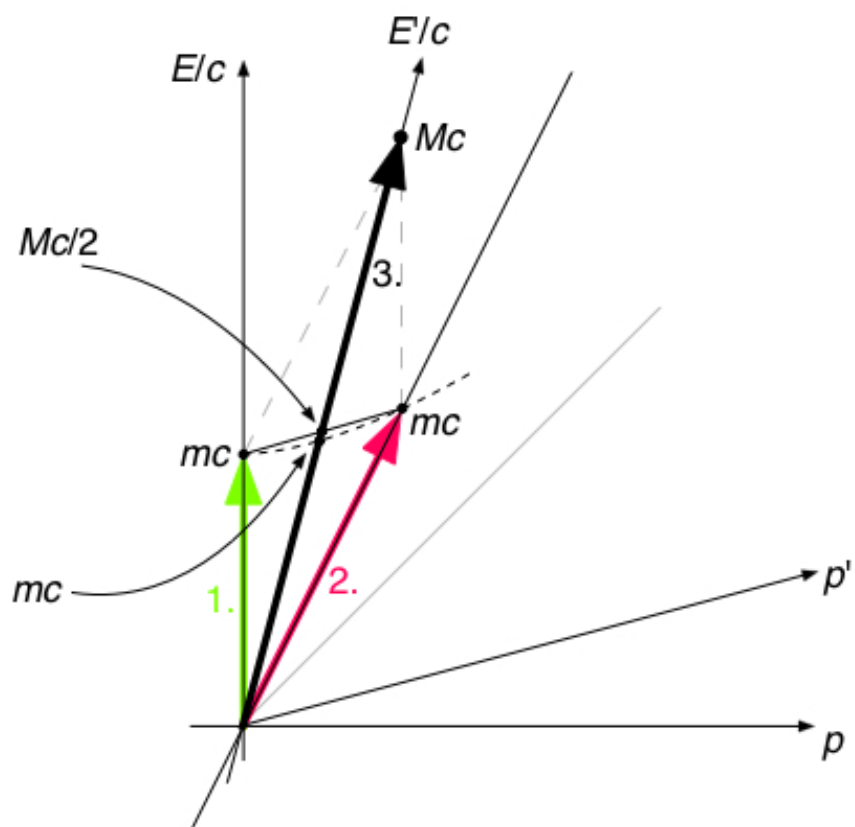
$$\frac{E'_2}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{a 2. test sebessége is } v \text{ a } K' \text{-ben})$$

$$\text{A 3. testre tehát egyrészt:} \quad \frac{E'_3}{c} = \frac{2mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

$$\text{Másképpen:} \quad \frac{E'_3}{c} = Mc \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow M = \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{Ütközéskor tehát a tömeg nem marad meg.}$$

Viszont (és ez közvetlenül a vektorösszeadás tényéből következik): az *energiára* (a vektorok *II*-vetületére) *minden inerciarendszerben teljesül a megmaradás!*



30. ábra

31. ábra: A tömeg invarianciája.

Tekintsünk egy tömegpontot, amely  $(cdt, dx)$  négyeselmozdulást végez két közeli esemény között.

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m \frac{dx}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m \frac{dx}{d\tau},$$

ahol  $d\tau$  a sajátidő, és az idődilatációs képletet alkalmaztuk.

Másfelől:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 \frac{dt}{d\tau} \quad (\text{ismét az idődilatációs képletet alkalmazva})$$

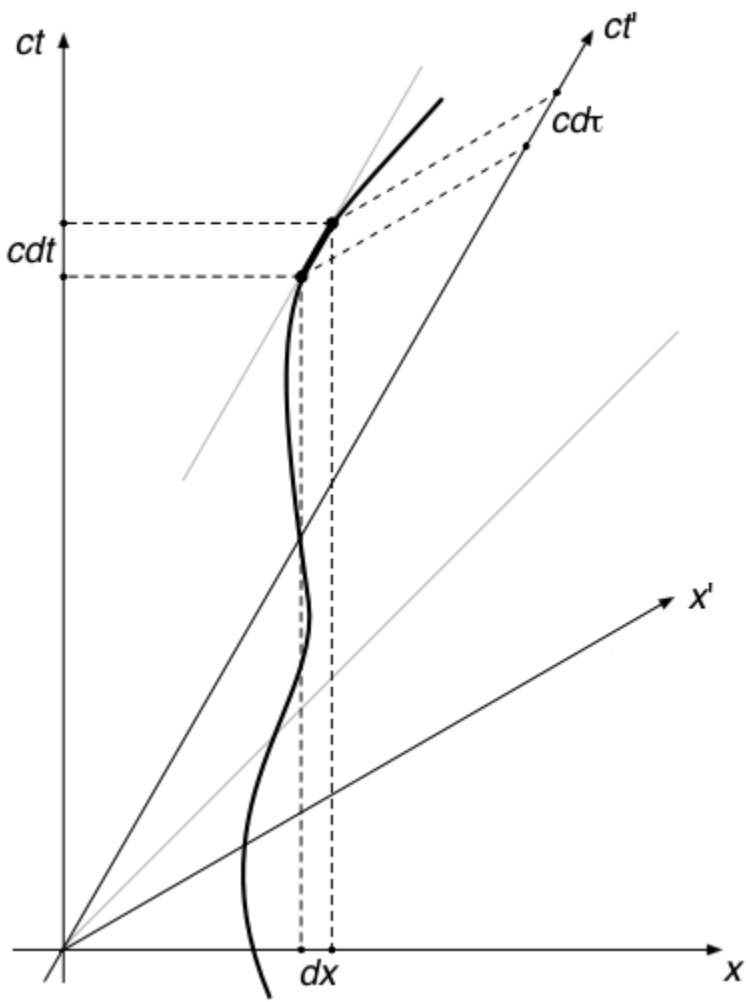
A téridőintervallum invarianciája (ld. 18. ábra):

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 = \text{invariáns}$$

Szorozzuk meg az egyenletet az  $\frac{m^2}{d\tau^2}$  (szintén invariáns!) számmal. A következő adódik:

$$(mc)^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = \left(\frac{E'}{c}\right)^2 - p'^2 = \text{invariáns}.$$

Különböző megfigyelők másnak mérik a test impulzusát és energiáját, de a *tömeget* ugyanakkorának állapítják meg.



31. ábra