Bevezetés a modern fizika fejezeteibe

3. (b)

Speciális relativitás
Relativisztikus dinamika

Utolsó módosítás: 2014 október 29.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A relativisztikus tömeg (1)

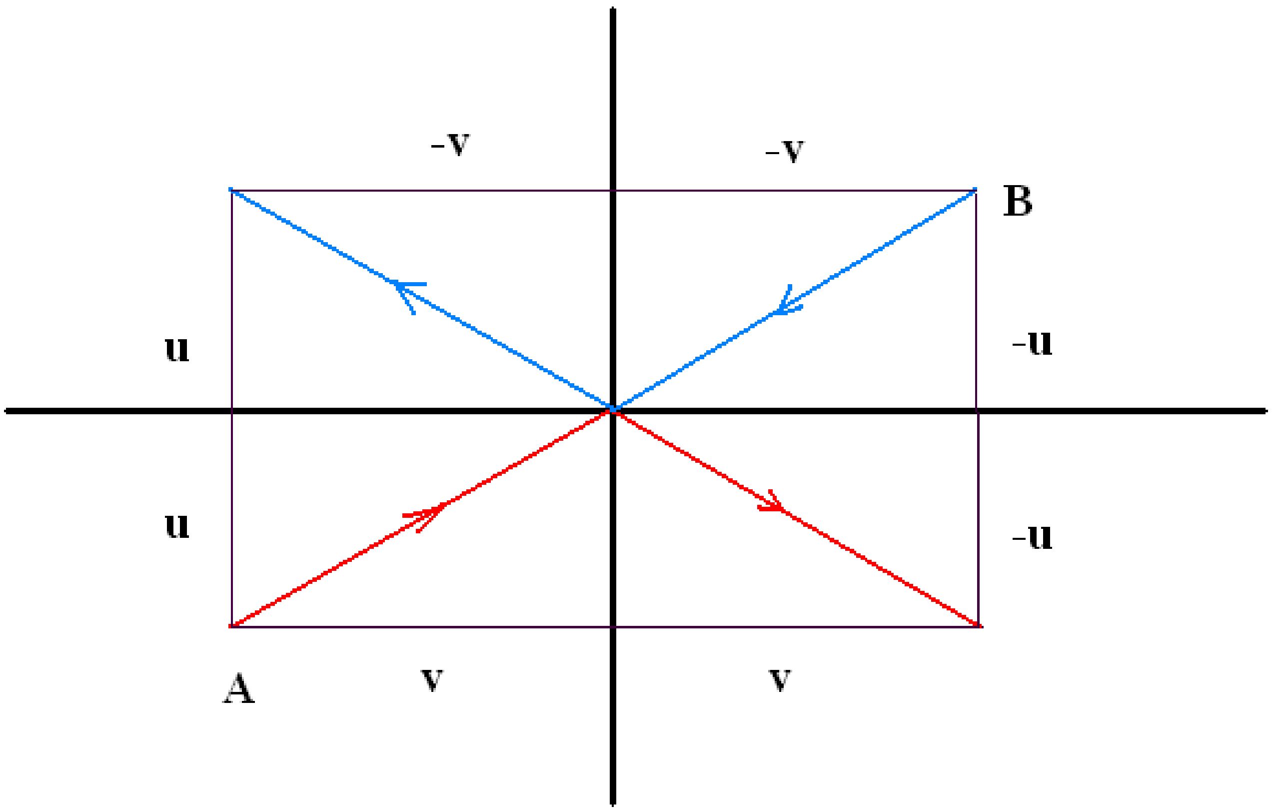
A bevezetett Lorentz-transzformáció biztosítja a fénysebesség állandóságát az inerciarendszerekben. Van-e ennek a transzformációnak módosító hatása a dinamikában? Ha igen, akkor mi változik? Változik-e a tömeg definíciója?

Ennek eldöntésére végezzünk el egy ütközéses kísérletet és írjuk le mind a nyugvó K, mind K-hoz képest v sebességgel balról jobbra mozgó K' rendszerből. (A v sebesség megegyezik az egyik tömegpont K rendszerbeli x irányú seberségkomponensével. /lásd később/)

A két test tömeg a nyugvó K rendszerben megegyezik.

A relativisztikus tömeg (2)

Két azonos tömegű test (A és B) tökéletesen rugalmas ütközése a K nyugvó rendszerben:



Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A relativisztikus tömeg (3)

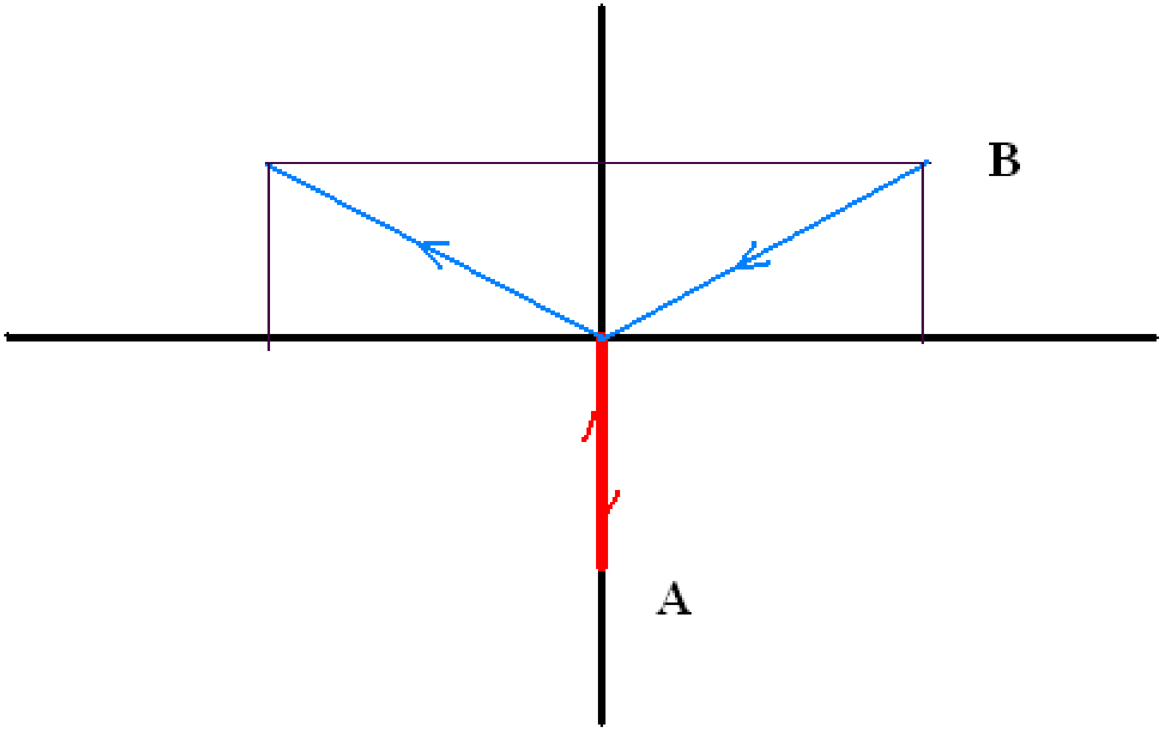
Az ütközés előtti és utáni sebességek a K rendszerből nézve:

előtte	utána
$w_{Ax} = v$	$w^*_{Ax} = v$
$w_{Ay} = u$	$w^*_{Ay} = -u$
$w_{Bx} = -v$	$w^*_{Bx} = -v$
$w_{By} = -u$	$w^*_{By} = u$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A relativisztikus tömeg (4)

Ugyanakkor az ütközést a K rendszerhez képest v sebességgel balról jobbra mozgó K' rendszerből nézve ilyennek (lásd az alábbi ábra) látja a megfigyelő. Mekkorák a sebességek/sebesség-komponensek a K' rendszerben?



A relativisztikus tömeg (5)

A K rendszerhez képest az x tengely irányában *v* sebességgel mozgó K' rendszerben mérhető sebességeket a transzformációs formulák segítségével határozhatjuk meg. A jelen feltételekhez igazodó transzformációs formulák (lásd 3.a sorozat 26. és 27. oldalak):

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{k(\Delta x - v\Delta t)}{k\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{k\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right)} = \frac{u_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

ahol $u_x = \pm v$ és $u_y = \pm u$ a mozgás irányától függően.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A relativisztikus tömeg (6)

Az ütközés előtti és utáni sebességek a K' rendszerből nézve:

előtte

$$w'_{Ax} = 0$$

$$w'_{Ay} = \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$w'_{Bx} = -\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

$$w'_{By} = -\frac{u\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

utána

$$w'^{*}_{Ax} = 0$$

$$w'^{*}_{Ay} = -\frac{u}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$w'^{*}_{Bx} = -\frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

$$w'^{*}_{By} = \frac{u\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

A relativisztikus tömeg (7)

A K' rendszerben mért sebességváltozások nagyságainak hányadosa:

$$\frac{|\Delta \boldsymbol{w}'_A|}{|\Delta \boldsymbol{w}'_B|} = \frac{1 + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

E hányados más alakban történő felírásához számoljuk ki az alábbiakat.
Az A test sebességnégyzete:

$$\boldsymbol{w}'^2_A = \frac{u^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

A relativisztikus tömeg (8)

$$1-\frac{\boldsymbol{w}_A'^2}{c^2}=1-\frac{u^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)c^2}$$

A B tömegpont sebességnégyzete:

$$\boldsymbol{w}_B'^2=\frac{4v^2}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2}+\frac{u^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2}$$

A relativisztikus tömeg (9)

$$1-\frac{\boldsymbol{w}_B'^2}{c^2}=1-\frac{4v^2+u^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2 c^2}$$

Képezzük a következő hányadost:

$$\frac{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{w}_A'^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{w}_B'^2}{c^2}}}=\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)c^2}}}{\sqrt{1-\frac{4v^2+u^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2 c^2}}}$$

A relativisztikus tömeg (10)

A gyökjelek alatti kifejezéseket hozzuk közös nevezőre:

$$\frac{\sqrt{\dfrac{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)c^2-u^2}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)c^2}}}{\sqrt{\dfrac{\left(1+\dfrac{v^2}{c^2}\right)^2c^2-4v^2-u^2\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1+\dfrac{v^2}{c^2}\right)^2c^2}}}$$

A relativisztikus tömeg (11)

A számlálóbeli gyökjel alatti kifejezést

$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$ -tel bővítve, majd az

$$\frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

hányadost kiemelve kapjuk:

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A relativisztikus tömeg (12)

$$\frac{|\Delta \boldsymbol{w}'_A|}{|\Delta \boldsymbol{w}'_B|} = \frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \frac{\sqrt{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2 c^2 - \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) u^2}}{\sqrt{\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)^2 c^2 - 4v^2 - u^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

Könnyen belátható, hogy a két gyökös kifejezés hányadosa 1.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A relativisztikus tömeg (13)

Ez viszont éppen azt jelenti, hogy felírhatjuk a

$$\frac{|\Delta \boldsymbol{w}'_A|}{|\Delta \boldsymbol{w}'_B|} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{w}'^2_A}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{w}'^2_B}{c^2}}}$$

összefüggést. A klasszikus dinamikában a tömeg definíciója a sebességváltozásokon nyugszik. Ha ezt most is fenn szeretnénk tartani, akkor fel kell tegyük:

$$\frac{m_B}{m_A} = \frac{|\Delta \boldsymbol{w}'_A|}{|\Delta \boldsymbol{w}'_B|} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{w}'^2_A}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{w}'^2_B}{c^2}}}$$

A relativisztikus tömeg (14)

Az átszorzások elvégzése után:

$$m_A\sqrt{1-\frac{\mathbf{w}_A'^2}{c^2}}=m_B\sqrt{1-\frac{\mathbf{w}_B'^2}{c^2}}$$

Értelemszerűen ennek az összefüggésnek akkor is teljesülnie kell, ha a K' rendszerben a tömegpont nyugszik, tehát:

$$m_0=m_A\sqrt{1-\frac{\mathbf{w}_A'^2}{c^2}}=m_B\sqrt{1-\frac{\mathbf{w}_B'^2}{c^2}}$$

A relativisztikus tömeg és impulzus (15)

Az m_0 a tömegpont nyugalmi tömege. A K' rendszerben hozzá képest v sebességgel mozgó tömegpont mozgási tömeg ezért:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(Lewis, Tolman, 1909). Az impulzus tömegszer sebesség kifejezése ennek megfelelően:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Newton II. törvényének relativisztikus alakja

Az relativisztikusan mozgó m(v) tömegű test impulzusváltozása:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F$$

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

A relativisztikus energia (1)

A munka definícióját a klasszikus dinamikában tanultaknak megfelelően az elemi munkára vonatkozó $\Delta W = \boldsymbol{F}\Delta\boldsymbol{r}$ illetve az integrális $W = \int \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r}$ alakokban továbbra is fenn szeretnénk tartani. Ezért nézzük meg, mi lesz az elemi munka kifejezése, ha mozgás során – a sebességváltozás miatt – bekövetkező tömegváltozást is figyelembe vesszük:

$$\Delta W = \boldsymbol{F}\Delta\boldsymbol{r} = \frac{(m+\Delta m)(\boldsymbol{v}+\Delta\boldsymbol{v}) - m\boldsymbol{v}}{\Delta t}\Delta\boldsymbol{r}$$

$$= (m\Delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\Delta m)\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = m\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}^2\Delta m$$

A relativisztikus energia (2)

Másrészt: A relativisztikus tömegformulát

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

érdemes átrendezni.

Gyorsítás előtti:

$$m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2$$

Gyorsítás utáni:

$$(m + \Delta m)^2c^2 - (m + \Delta m)^2(v + \Delta v)^2 = m_0^2c^2$$

A relativisztikus energia (3)

E két kifejezés különbsége az végrehajtott egyszerűsítések, továbbá a másod-, harmad- és negyedrendűen kicsiny mennyiségek elhanyagolása után:

$$m\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}^2\Delta m = c^2\Delta m = \Delta(mc^2)$$

Az egyenlet baloldala éppen ΔW, azaz így $\Delta W = \Delta(mc^2)$, következésképp a tömegpont mozgási tömege a végzett munkával arányosan nő. A munkatételt – és konzervatív erőtér esetén a mechanika energia megmaradás tételét – akkor tarthatjuk fenn, ha a kinetikus energia kifejezése:

$$E_k = mc^2 + const.$$

A relativisztikus energia (4)

A kinetikus energia nullpontját meghatározó konstans értékét úgy kell meghatározni, hogy $v<<c$ esetén visszakapjuk az

$$\frac{1}{2}m_0v^2$$

kifejezést. Az mc^2 kifejezést kifejtve

$$mc^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\approx m_0c^2+\frac{1}{2}m_0v^2$$

látható, hogy ehhez a konstans értékét $-m_0c^2$-nek kell választani, így

$$E_k=mc^2-m_0c^2$$

A relativisztikus energia (5)

A konstans azonban nullának is választható, mert ettől még a munkatétel érvényben marad, így az

$$E = mc^2$$

az ún. sajátenergia, amely nyugalmi helyzetben sem zérus. Míg az

$$m_0 c^2$$

energia, az ún. nyugalmi energia.
A tömeg és az energia egymástól nem elválasztható mennyiségek: tömeg-energia ekvivalencia.

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Részecskegyorsítók (1)

A relativisztikus tömegnövekedés közvetlenül megtapasztalható.

KFKI-Budapest (ELTE)

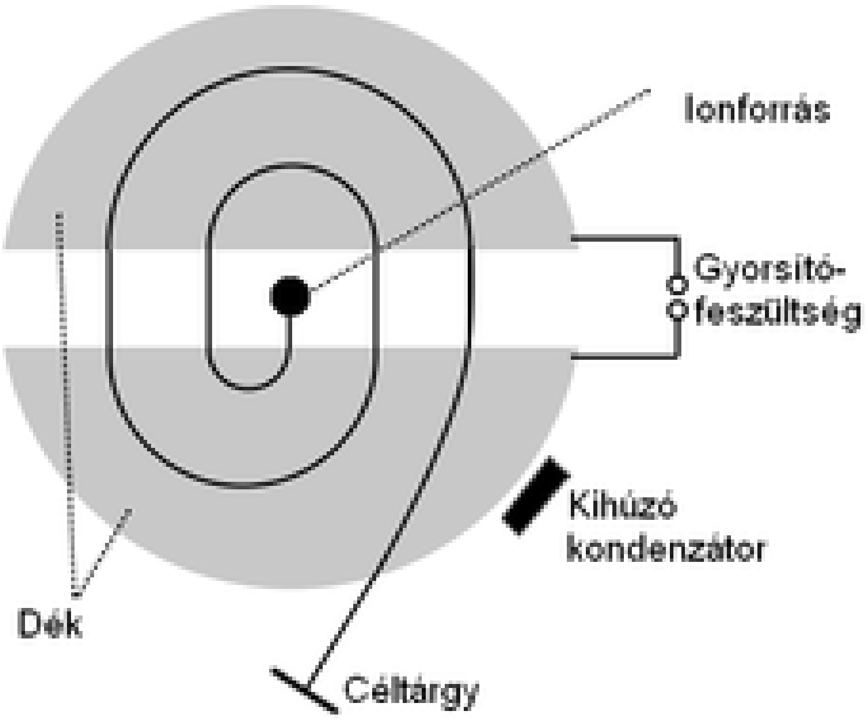
Stanford

Részecskegyorsítók (2)

Hossz: 3,2 km
Energia: 50 GeV elektron, pozitron

Stanford

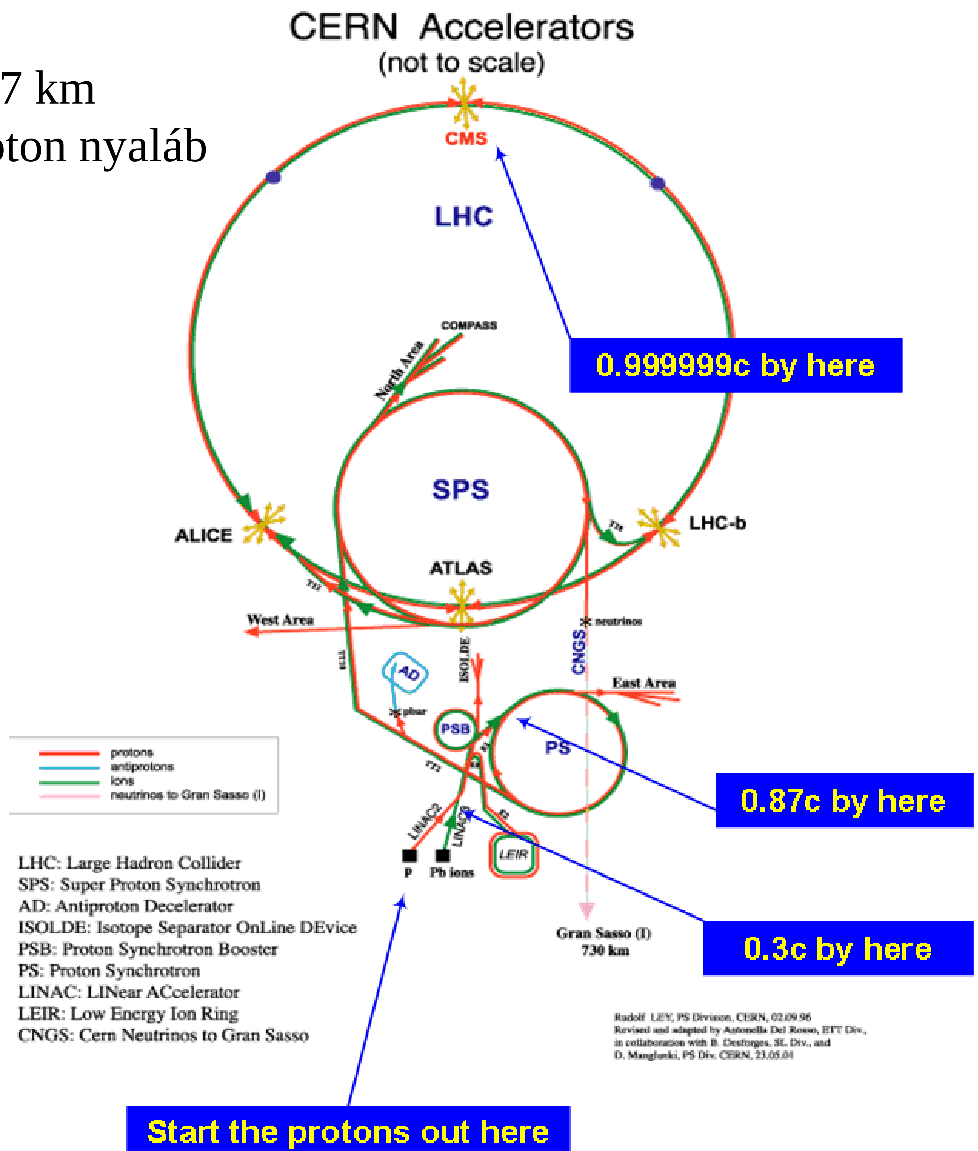
Részecskegyorsítók - Ciklotron (3)



Gaál Sándor (1929)
Ernest Lawrence- Stanley Livingston (1930-1932)

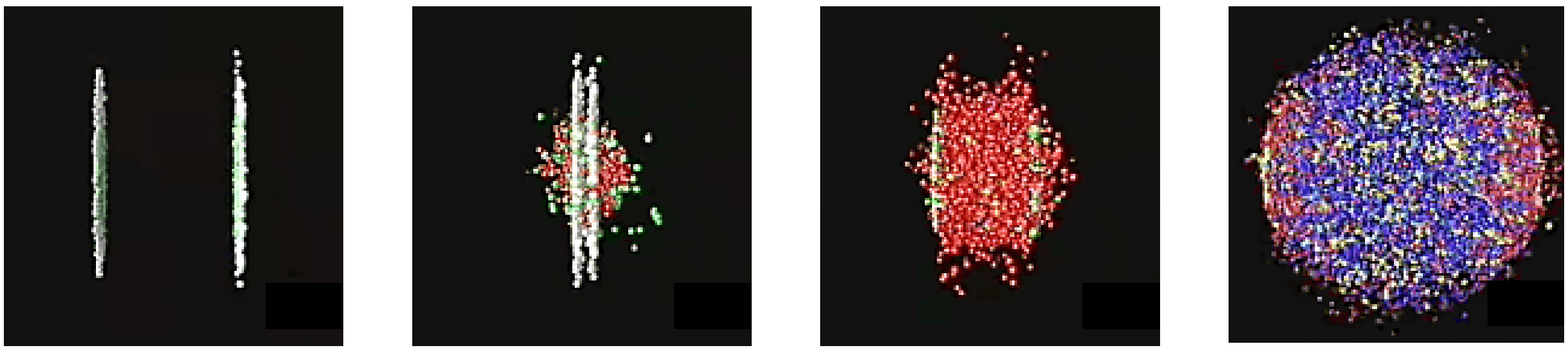
Részecskegyorsítók (4)

Az LHC kerülete: 27 km
Enegia: 3,5 TeV proton nyaláb



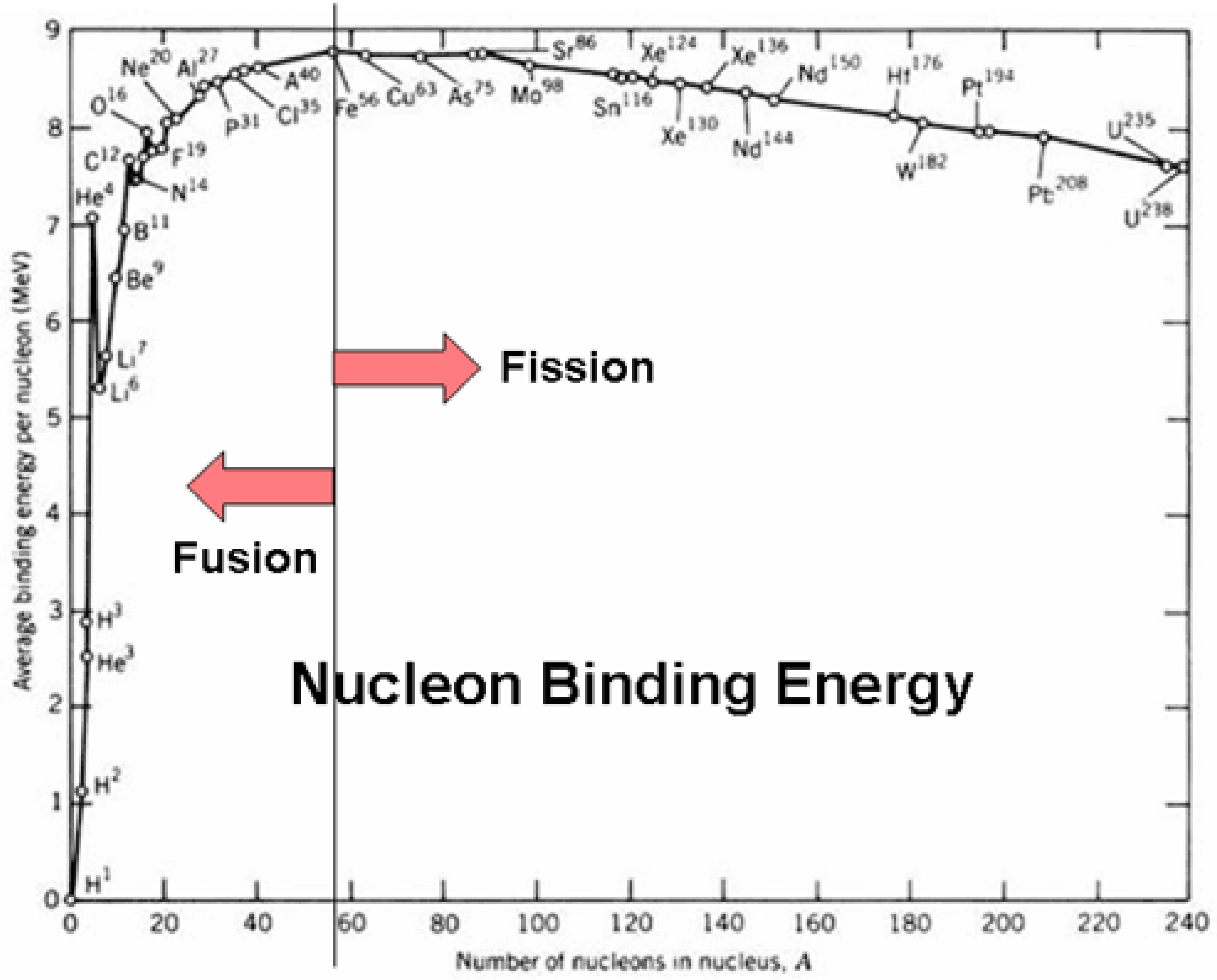
Részecskegyorsítók – nehéz-ion ütközések (5)

Brookhaven: Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC)



http://www.bnl.gov/rhic/physics.asp

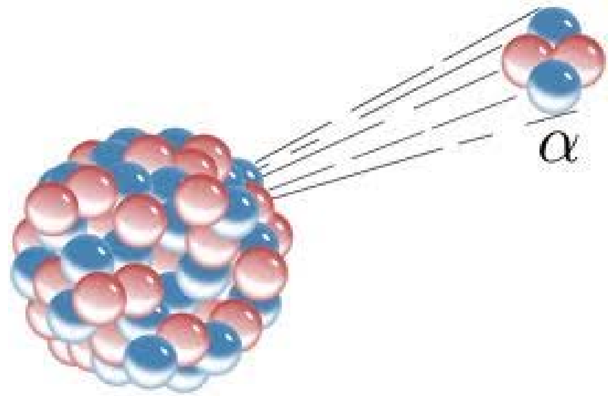
Tömeg-energia ekvivalencia (1)



Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Tömeg-energia ekvivalencia (2)

Atommagok radioaktív bomlása



Maghasadás – nukleáris energiatermelés

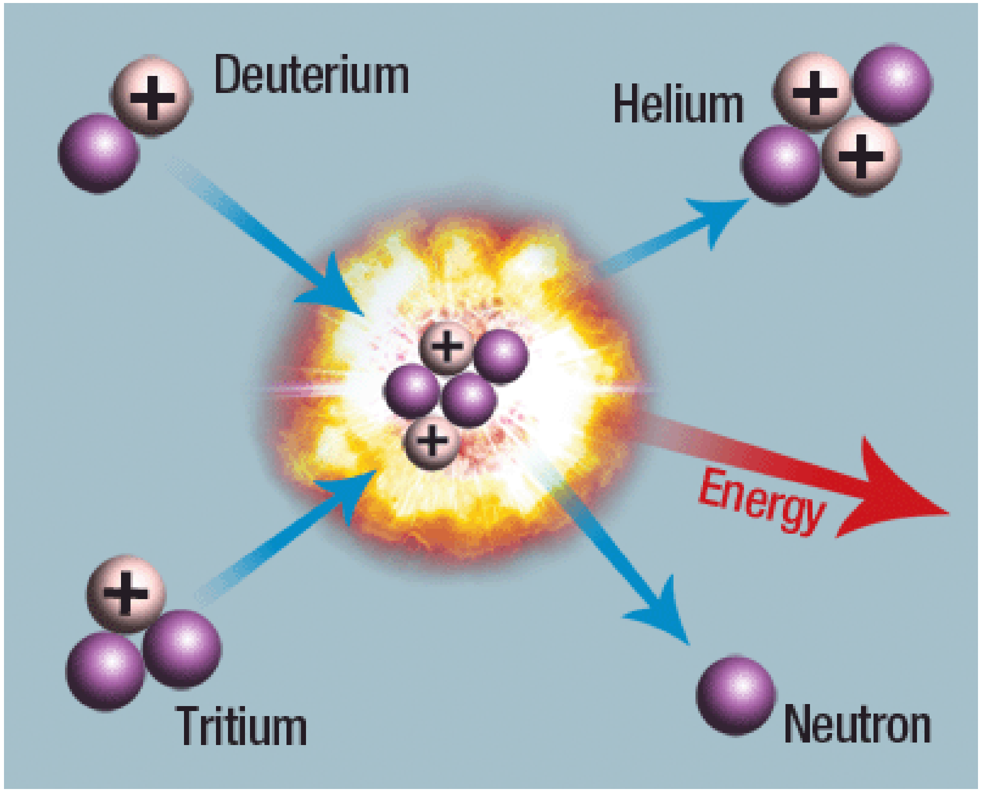
$$ {}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \longrightarrow {}^{236}_{92}U \longrightarrow \begin{cases} {}^{140}_{56}Ba + {}^{93}_{36}Kr + 3\,{}^{1}n_0 \\ {}^{144}_{54}Xe + {}^{90}_{38}Sr + 2\,{}^{1}n_0 \\ {}^{144}_{55}Cs + {}^{90}_{37}Rb + 2\,{}^{1}n_0 \end{cases} $$

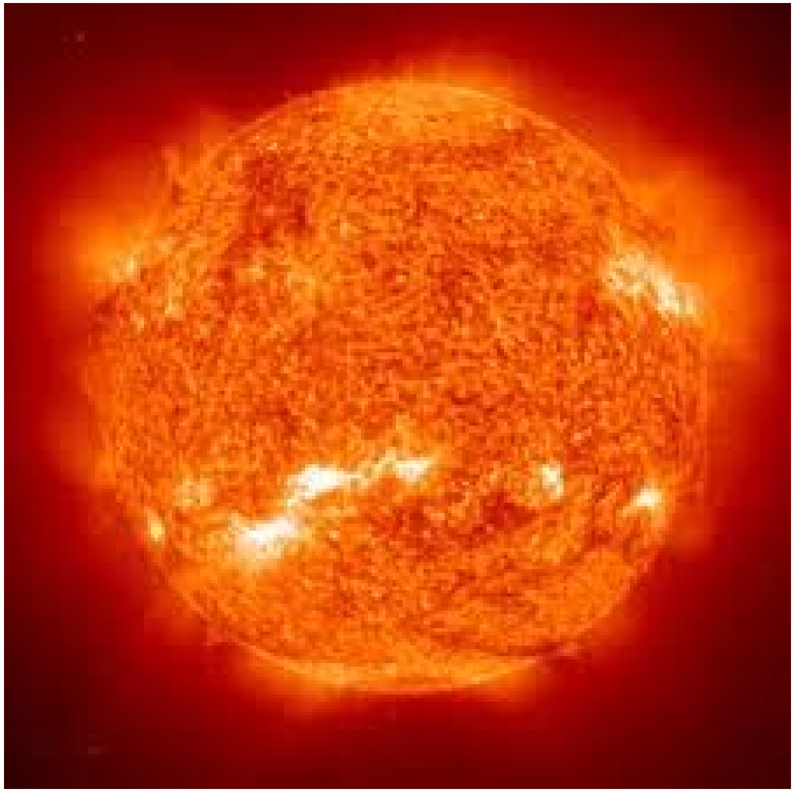
Paksi Atomerőmű

Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Tömeg-energia ekvivalencia (3)

Magfúzió → nukleoszintézis





Két közbevetett nagyon egyszerű kérdés (1)

1. Mennyivel csökken a Nap tömege másodpercenként?

Napállandó:

$$\sigma = 1370\ \mathrm{W/m^2}$$

Föld-Nap távolság:

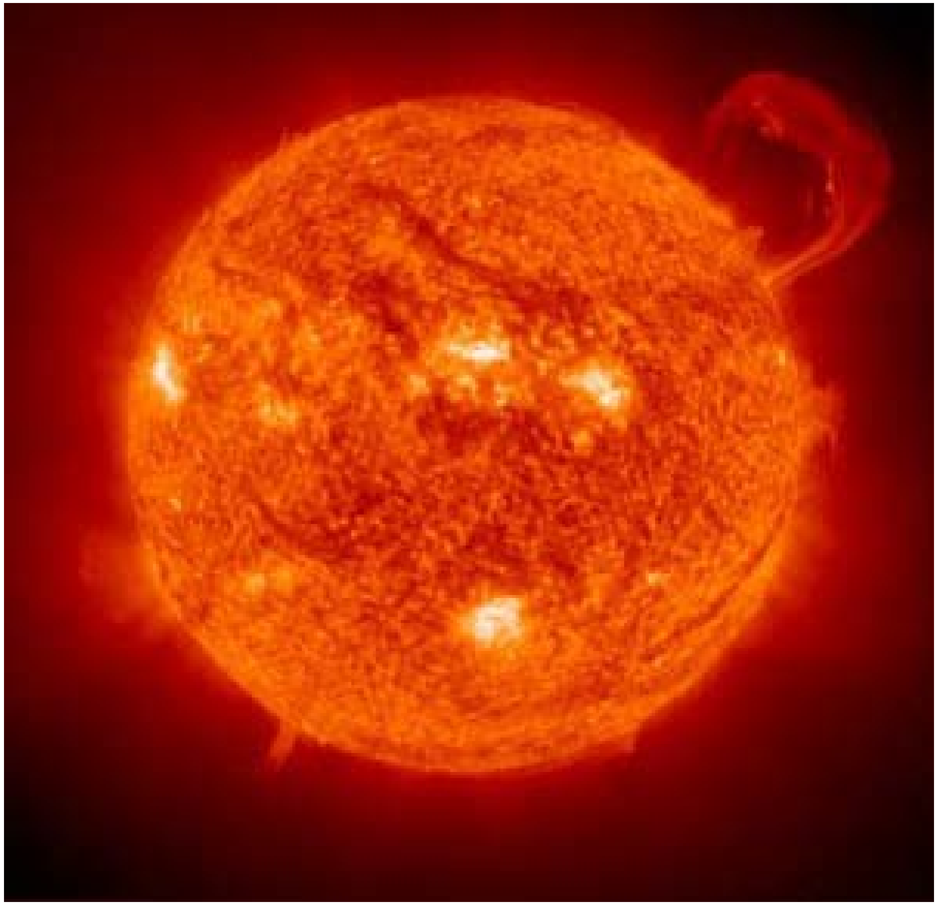
$$R_{FN} = 1{,}5 \times 10^{11}\ \mathrm{m}$$

Összteljesítmény:

$$P = 4R_{FN}^2 \pi\sigma = 3{,}86 \times 10^{26}\ \mathrm{W}$$

A másodpercenkénti tömeg-csökkenés:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{P}{c^2} = 4{,}29 \times 10^9\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$



Két közbevetett nagyon egyszerű kérdés (2)

2. Mekkora a Nap fúziós tartományának teljesítménysűrűsége?

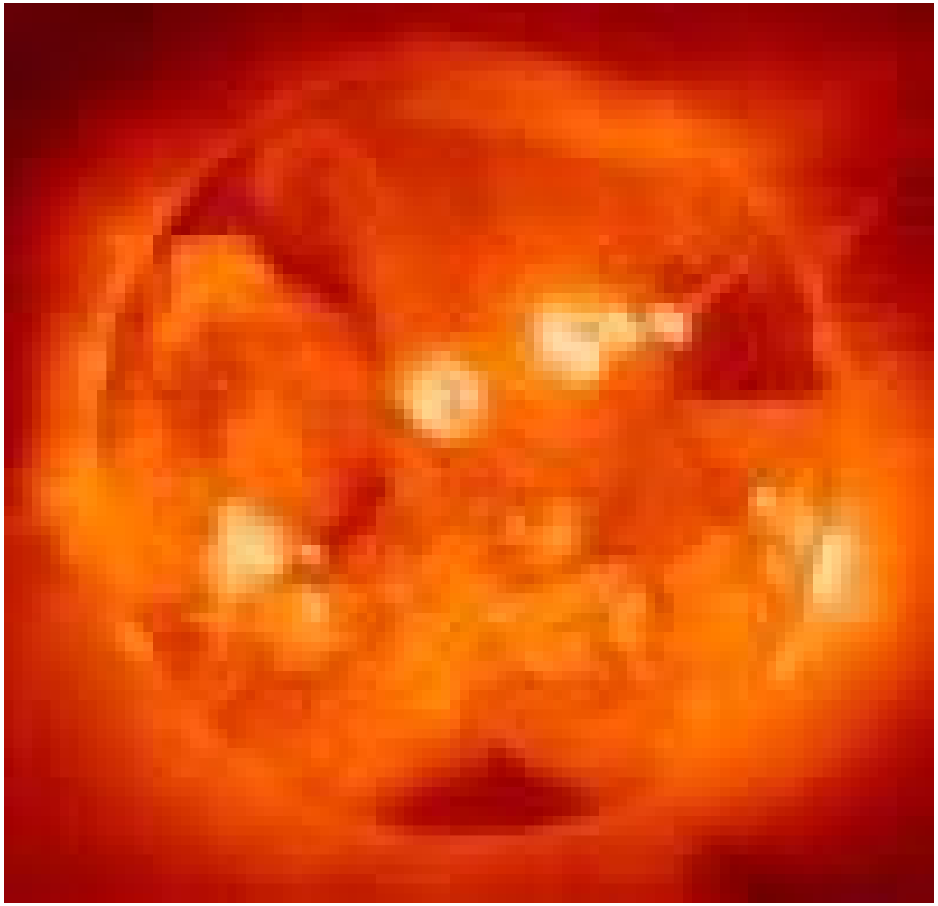
A Nap sugára: R=700000 km
Fúziós tartomány: 0,25R
Összteljesítmény:

$$P = 3{,}86 \times 10^{26}\ \mathrm{W}$$

Teljesítménysűrűség:

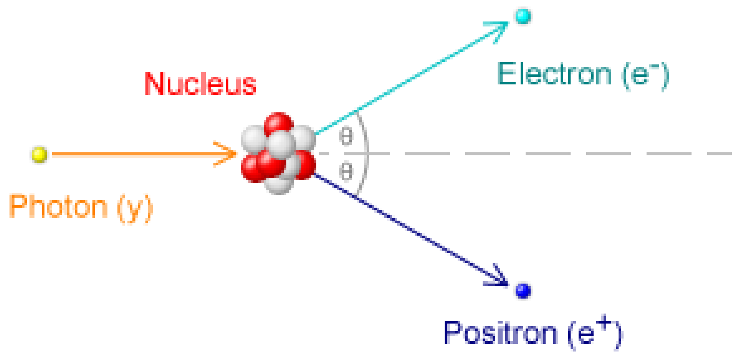
$$\varrho_P = \frac{P}{\frac{4}{3}(0{,}25R)^3\pi} = 17\,\frac{W}{m^3}$$

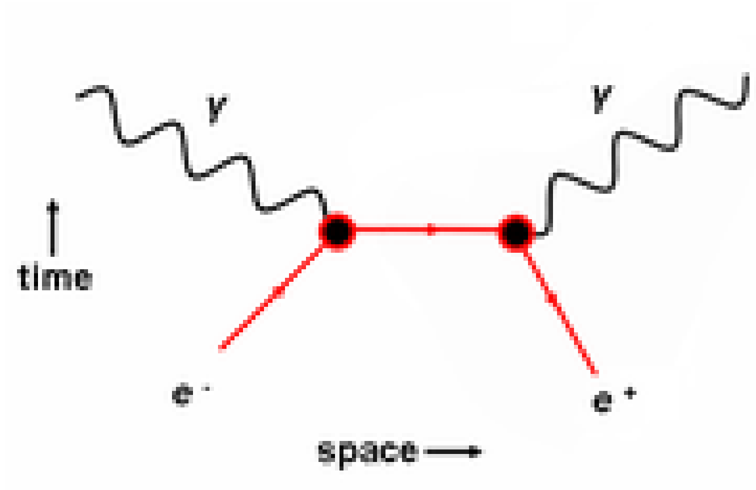
!!!



Tömeg-energia ekvivalencia (4)

Párkeltés és annihiláció





Dr. Márkus Ferenc
BME Fizika Tanszék

Kérdések

Milyen gondolatkísérlet vezet el a relativisztikus tömeg bevezetéséhez. Mi az elgondolás fizikai alapja? Milyen technikai lépéseket kell tenni a levezetéshez?

Hogyan transzformálódnak a sebességek? Mennyi a testek sebességváltozása a mozgó rendszerből nézve?

Hogyan módosul az elemi munka kifejezése? Milyen módon kapcsolódik a munka a testek mozgásállapotának változásával?

Mi a tömeg és energia kapcsolata? Mi a sajátenergia, mi a nyugalmi energia?

Milyen természeti jelenséget, kísérletet tud felsorolni, amelyben a relativisztikus tömegnövekedés illetve a tömeg-energia ekvivalencia fontos szerepű?

(folyt. köv.) *(A ilyen színnel írt kérdések a mélyebben érdeklődők részére vannak.)*