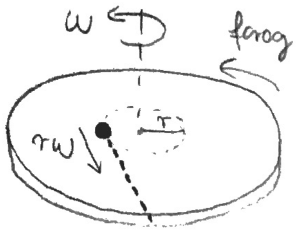
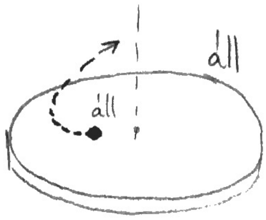
Ismétlés: Forgó koordináta-rendszer.

(K) álló rendszer



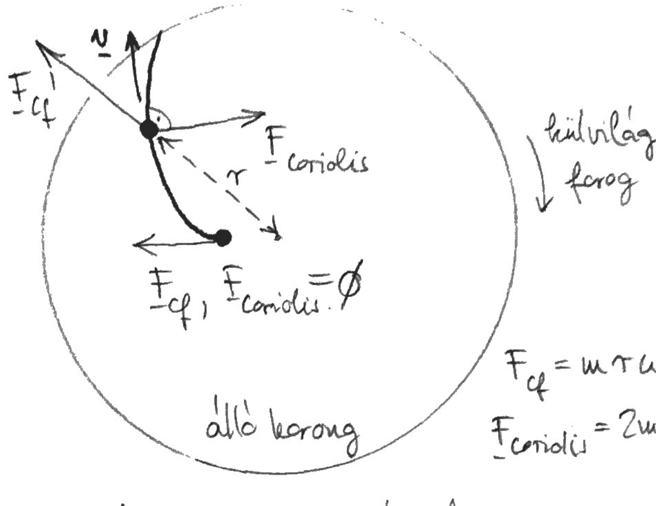
Az elengedett golyó érintőirányban lerepül egyenes vonalú, egyenletes mozgással. (Newton I.)

(K') forgó rendszer



A golyó az $\underline{F}_{cf}$ centrifugális és $\underline{F}_{coriolis}$ erők hatására görbült pályán esik le a korongról.

(K') forgó rendszer:



$F_{cf} = m r \omega^2$

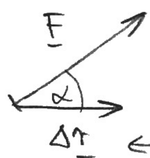
$\underline{F}_{coriolis} = 2m\,\underline{v} \times \underline{\omega}$

Megnézzük programozással...

I.) Munka.

1.) Elemi munka:

$\Delta W = \underline{F} \cdot \Delta \underline{r}$



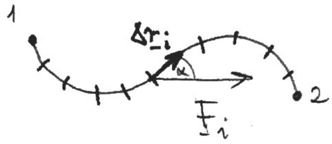
$\Delta W = |\underline{F}| \cdot |\Delta \underline{r}| \cdot \cos\alpha$

$\Delta \underline{r}$ ← kicsiny elmozdulás

Kétféle értelmezés:

- ΔW az erő szorozva az erő irányú kicsiny elmozdulással.
- ΔW az elmozdulás szorozva az elmozdulás irányába mutató erőkomponenssel.

2.) Teljes munka



$W_{12} = \sum_i \Delta W_i$

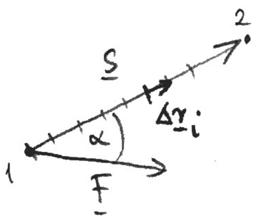
$W_{12} = \sum_i \underline{F}_i \Delta \underline{r}_i$

A pályát felosztjuk kicsiny $\Delta \underline{r}_1, \Delta \underline{r}_2, \ldots, \Delta \underline{r}_i$ elmozdulásokra, megnézzük, hogy ezen elmozdulások során mekkora $\underline{F}_1, \underline{F}_2, \ldots, \underline{F}_i$ erő hat a testre, és az $\underline{F}_i \Delta \underline{r}_i$ elemi munkákat összegezzük.

Mértékegység: $\left.\begin{array}{l}[F] = N \\ [\Delta r] = m\end{array}\right\} [F]\cdot[\Delta r] = Nm \equiv J.$ (joule)

3.) Speciális esetek.

a.) Egyenes vonalú mozgás, $\underline{F}$ = állandó:



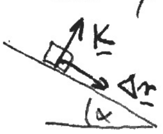
$W_{12} = \sum_i \underline{F} \cdot \Delta \underline{r}_i$

$W_{12} = \underline{F} \cdot \sum_i \Delta \underline{r}_i = \underline{F} \cdot \underline{s}$

$W_{12} = |\underline{F}| \cdot |\underline{s}| \cdot \cos\alpha$

b.) $\alpha = 90° \rightarrow \Delta W = \emptyset$

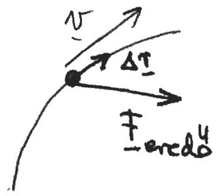
példa:



lejtőn lecsúszó testen a kényszererő nem végez munkát.

c.) $\alpha > 90° \rightarrow \Delta W < 0$.

II. Mozgási energia, munkatétel.



Nézzük egy $\underline{v}$ sebességgel mozgó tömegpontra ható eredő erő munkáját!

$\Delta W = \underline{F}_{eredő} \cdot \Delta \underline{r} = \underline{F}_{eredő} \cdot \underline{v} \cdot \Delta t$

Dinamika alapegyenlete:

$\underline{F}_{eredő} = m \underline{a} = m(\underline{a}_{cp} + \underline{a}_t)$

$\Delta W = m(\underline{a}_{cp} + \underline{a}_t)\underline{v} \cdot \Delta t = m\, \underline{a}_t \cdot \underline{v} \cdot \Delta t = m \underbrace{a_t \Delta t}_{\Delta v} \cdot v$

Mi a $\Delta v \cdot v$?

$\Delta(v^2) = (v + \Delta v)^2 - v^2 \approx 2v \cdot \Delta v,$

tehát $v \cdot \Delta v = \Delta\left(\frac{v^2}{2}\right).$

Az eredő erő elemi munkája:

$$\Delta W = m\cdot\Delta\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

A teljes munka:

$$W_{eredő} = m\sum_1^2 \Delta\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

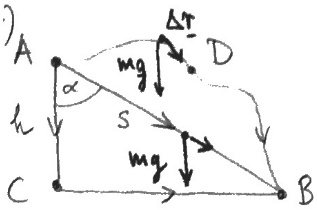
Definíció: $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ (kinetikus/mozgási energia)

Munkatétel: Az eredő erő munkája egyenlő a test mozgási energiájának megváltozásával:

$$\boxed{W_{eredő} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2} = \Delta E_{kin}$$

III. Konzervatív erőtér, helyzeti energia.

1.)



A nehézségi erő munkája:

$$W_{AB} = mg\cdot s\cdot\cos\alpha$$

$$W_{ACB} = W_{AC} + W_{CB} = mgh + 0.$$

Ez a kettő egyenlő, mert $h = s\cdot\cos\alpha$.

Mi a helyzet az ADB úton?

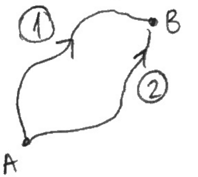
$$W_{ADB} = \sum_i mg\cdot\Delta r_i = mg\cdot\underbrace{\sum_i \Delta r_i}_{AB} = mgs\cos\alpha$$

$\overrightarrow{AB}$, ahol $|\overrightarrow{AB}| = s$

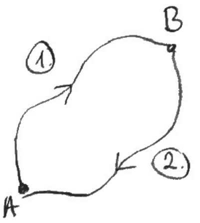
Tehát nehézségi erő munkája független az úttól.

2.) **Definíció:** Egy $\underline{F}(\underline{r})$ erőteret konzervatívnak nevezünk, ha tetszőleges A és B pontok között a munka független a pályától:

$$\sum_1 \underline{F}(\underline{r})\Delta\underline{r} = \sum_2 \underline{F}(\underline{r})\Delta\underline{r}$$



Másképp:



Menjünk el A-ból B-be az 1 pályán, majd B-ből A-ba a 2 pályán!

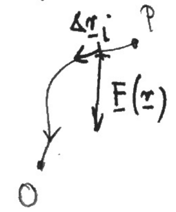
Konzervatív erőtér esetén:

$$W_{ABA} = \sum_1 \underline{F}(\underline{r})\Delta\underline{r} - \sum_2 \underline{F}(\underline{r})\Delta\underline{r} = \emptyset$$

Tetszőleges zárt görbére a munka nulla!

3.) Helyzeti (potenciális energia)

Legyen $\underline{F}(\underline{r})$ konzervatív erőtér! Válasszunk egy O kezdőpontot (nullszintet)!

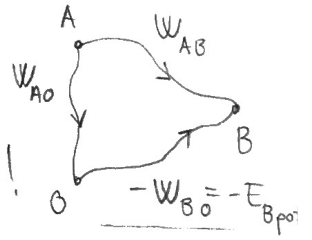


Tetszőleges P pont helyzeti energiája:

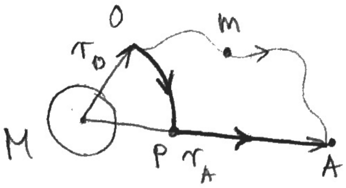
$$E_{pot} = \sum_P^O \underline{F}(\underline{r})\Delta\underline{r},$$

azaz az a munka, amit az erőtér a testen végez tetszőleges $P\to O$ pályán.

Függ az O pont (nullszint) megválasztásától, de két pont (A és B) közötti potenciális energia különbség nem függ!



4.) Gravitációs potenciális energia



A grav. erő munkája is független a pályától, ezért konzervatív → van pot. energia!

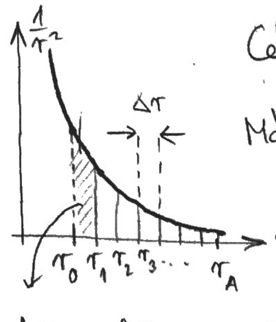
Mekkora az A pontban a potenciális energia?

$$E_{pot,A} = W_{AP} + W_{PO} = W_{AP} = \sum \underset{\substack{\uparrow\\ \text{párhuzamosak}}}{F(\underline{r})\Delta r}$$

Newton gravitációs törvénye:

$$F(r) = \gamma\frac{mM}{r^2}$$

$$E_{pot,A}^{(0)} = \gamma mM\cdot\sum_A^P \frac{\Delta r}{r^2}$$



Cél: $\sum \frac{\Delta r}{r^2}$ kiszámítása

Módszer: az r_0 és r_A közötti intervallumot apró szeletekre bontjuk

$$\frac{\Delta r}{r_0^2} \approx \frac{\Delta r}{r_0 r_1} = \frac{r_1 - r_0}{r_0 r_1} = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}$$

$$\sum\frac{\Delta r}{r^2} = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right) + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_A}\right)$$

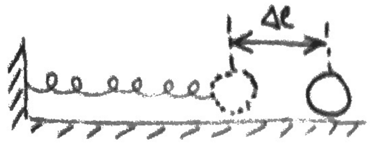
$$\sum\frac{\Delta r}{r^2} = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_A}$$

$$\Downarrow$$

Általában $r_0 = \infty$-t veszünk fel

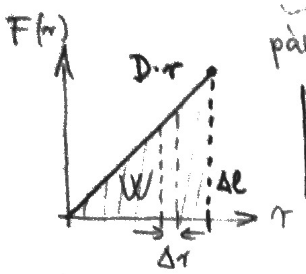
$$\boxed{E_{pot,A} = -\gamma\frac{mM}{r_A}}$$

5.) Rugalmas potenciális energia



Mekkora munkát végez a megnyújtott rugó, ha visszatér egyensúlyi helyzetébe?

$$W = \sum \underline{F}\underbrace{(\underline{r})\Delta\underline{r}}_{\text{párhuzamosak}} = \sum D\, r \cdot \Delta r$$

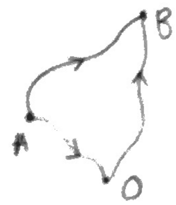


$$\boxed{W_{pot}^{rug} = \frac{1}{2} D \Delta l^2}$$

IV. A mechanikai energia megmaradása

Ha egy testre csak konzervatív $\underline{F}(\underline{r})$ erő hat, akkor a munkatétel átalakítható:

$$\underbrace{W_{konzervatív}^{A\to B}} = \Delta E_{kin}^{A\to B}$$



$$E_{pot}^{A} - E_{pot}^{B} = E_{kin}^{B} - E_{kin}^{A}$$

Rendezve:

$$\underbrace{E_{pot}^{A} + E_{kin}^{A}} = \underbrace{E_{pot}^{B} + E_{kin}^{B}}$$

$$E_{mech}^{A} = E_{mech}^{B}$$

A mechanikai (potenciális + mozgási) energia tehát konzervatív erőtérben <u>megmarad</u>.