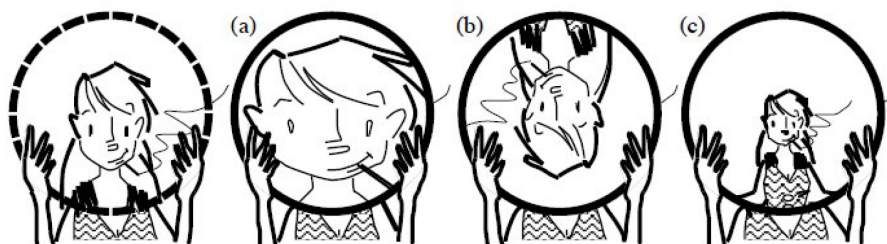


Optika gyakorlat 10.

Gyakorló feladatok

1. példa: Leképezés - Fruzsika játszik

Fruzsika több nagy darab ívelt üveget tart maga elé. Határozd meg, hogy milyen típusú objektívek (gyűjtő/szóró) ezek, és milyen képet (valós/virtuális) lát Fruzsika az üvegen keresztül. Készíts sematikus rajzot minden esetben a leképezésről.

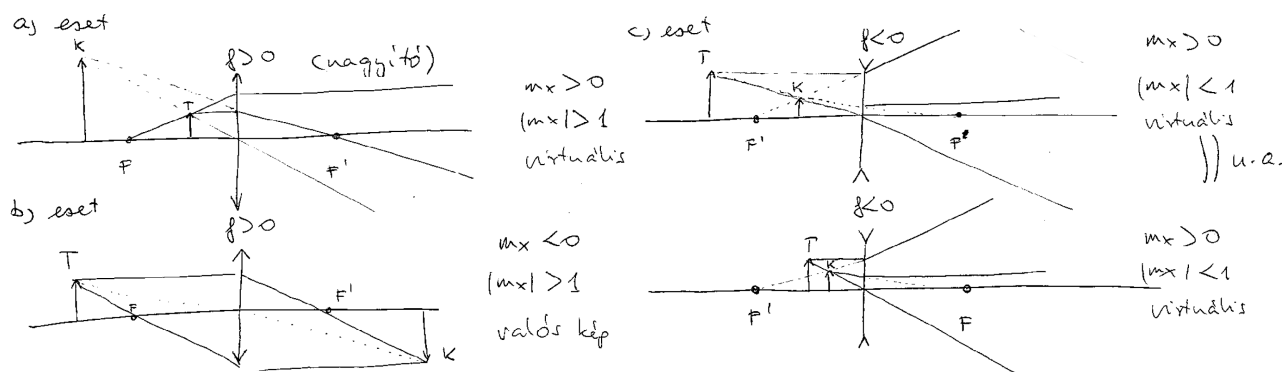


1. ábra. Fruzsika lencsét tart a kezében

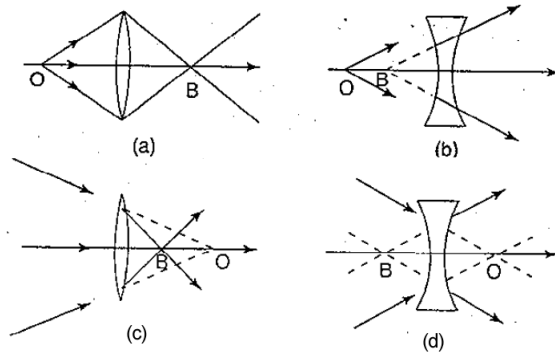
Megoldás:

Az alábbi ábrán megszerkesztettük a különböző esetek fényútjait paraxiális közelítés esetén. A szerkesztéshez három alapelvet használtunk fel:

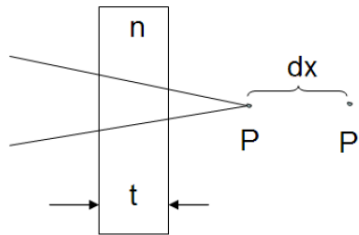
1. A tárgyoldali végtelenből érkező, optikai tengellyel párhuzamos sugarak a képoldali fókuszpontba képződnek le (ld. (b) megoldás). Megjegyzés: szórólencsék esetén ($f < 0$) a képoldali fókuszpont a tárgy oldalon helyezkedik el (ld. (c) megoldás)
2. A képoldali végtelenből érkező, optikai tengellyel párhuzamos sugarak a tárgyoldali fókuszpontba képződnek le (ld. (a) megoldás).
3. A tárgyoldali fősík optikai tengelyen lévő pontjába érkező fénysugarak (ez az ún. nodális pont) a képoldali fősík optikai tengelyen lévő pontjából távoznak szögeltérítés nélkül. Jelen esetben vékonylencsék szerepelnek, ahol a fősíkok megegyeznek a lencsefelülettel.



2. ábra. A fényutak szerkesztései a különböző esetekben



3. ábra. Valós és virtuális tárgy- és képpontok: (a) valós tárgy, valós kép; (b) valós tárgy, virtuális kép; (c) virtuális tárgy, valós kép (d) virtuális tárgy, virtuális kép;



4. ábra. Planparalel lemez

2. példa: Planparalel lemez

Egy lencse a P pontba fókuszálja a fénysugarakat. Milyen t vastagságú, n törésmutatójú planparalel lemezt kell a lencse mögé elhelyezni, hogy a sugarak a P ponttól dx távolságra elhelyezkedő P' pontba fókuszálódjanak?

Megoldás: A P pontba, illetve a P' pontba történő két leképezés esetén a fényutak a lencsén való áthaladásig azonosak, utána a planparalel lemezen való áthaladás a különbség. Vizsgáljuk ennek a két leképezésnek a különbségét úgy, mint a P -ből P' -be történő leképezést. Ekkor a P pontból a fény visszafelé terjed a lencséig végig levegőben, majd áthalad a lemezen, s onnan terjed tovább P' -be ismét levegőben.

Legyen a P pont x távolságra a lencsétől. Írjuk fel a PP' leképezés mátrixát a fent felsorolt 3 lépésből:

$$\bar{M} = \bar{T}_3 \cdot \bar{T}_2 \cdot \bar{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & x - t + dx \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Végezzük el a mátrixok összesorzását:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} 1 & -x + \frac{t}{n} + x - t + dx \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mivel leképezésről van szó, ezért az $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ mátrixban $B = 0$ kell legyen:

$$-x + \frac{t}{n} + x - t + dx = 0$$

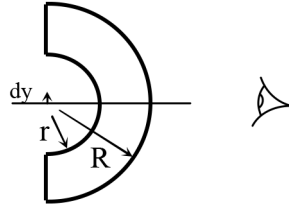
$$dx = t - \frac{t}{n} = t \cdot \frac{n-1}{n}$$

$$t = dx \cdot \frac{n}{n-1}$$

3. példa: Mátrix optika - lencse leképezés

Az ábra szerinti test anyagának törésmutatója $n = 1,5$ a testet levegő veszi körül. Görbült felületei koncentrikus félgömbök, a belső gömb sugara $r = 1$ cm, a külső gömbé $R = 2$ cm.

- Határozzuk meg a rendszer mátrixát.
- Hol helyezkednek el a fókuszok, és mekkora a fókusztávolság?
- Mekkorának látszik a félgömb középpontjába helyezett $dy = 1$ mm kiterjedésű tárgy, ha az üveggömbön keresztül szemléljük?



5. ábra. Koncentrikus lencsefelületek

Megoldás: Írjuk fel a koncentrikus vastaglencse transzformációs mátrixát paraxiális közelítésben (rendszermátrix):

$$\bar{M}_{12} = \bar{R}_2 \cdot \bar{T}_{12} \cdot \bar{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{D_{12}}{n_l} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{P_1 D_{12}}{n_l} & \frac{D_{12}}{n_l} \\ -P_1 - P_2 + \frac{P_1 P_2 D_{12}}{n_l} & 1 - \frac{P_2 D_{12}}{n_l} \end{bmatrix}$$

$$\bar{M}_{12} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 1/6 & 5/6 \end{bmatrix}$$

ahol:

$$P_1 = \frac{n-1}{r} = -0.5 \left[\frac{1}{cm} \right]$$

$$P_2 = \frac{1-n}{R} = 0.25 \left[\frac{1}{cm} \right]$$

$$D_{12} = |R| - |r| = 1 [cm]$$

A vastaglencse törőereje:

$$P_{eff} = -M_{21} = P_1 + P_2 - \frac{P_1 \cdot P_2 \cdot D_{12}}{n_l} = -\frac{1}{6} \left[\frac{1}{cm} \right]$$

$$f = \frac{1}{P_{eff}} = -6 [cm] = f'$$

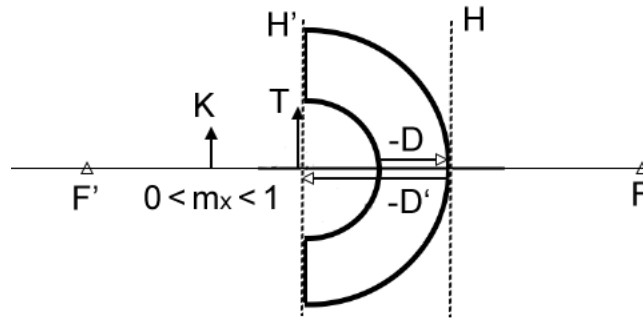
A fókuszok helyei:

$$D = -\frac{n}{M_{21}} \cdot (1 - M_{22}) = D_{12} \cdot \frac{n}{n_l} \cdot \frac{P_2}{P_{eff}} = -1 [cm]$$

$$D' = \frac{n'}{M_{21}} \cdot (1 - M_{11}) = -D_{12} \cdot \frac{n'}{n_l} \cdot \frac{P_1}{P_{eff}} = -2 [cm]$$

Felmérve a fókusz D és D' távolságokat, azt kapjuk, hogy a H tárgyoldali fókusz a lencse jobb szélén, a H' képoldali fókusz pedig a lencse bal szélén helyezkedik el. A tárgytávolságot a tárgyoldali H fókustól mérve kapjuk:

$$s = -2 [cm]$$



6. ábra. A fősíkok, a fókuszpontok, a tárgy és a kép helye

A leképezési törvény szerint:

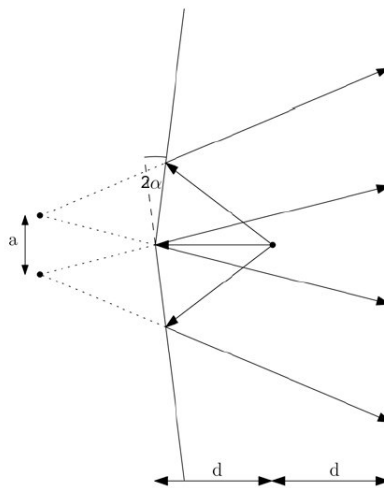
$$s' = \frac{s \cdot f}{s + f} = \frac{(-2) \cdot (-6)}{(-2) + (-6)} = \frac{12}{-8} = -\frac{4}{3} [cm]$$

A transzverzális nagyítás értéke $m_x = \frac{s'}{s} = +\frac{2}{3}$

4. példa: Interferencia tükröző felületekről

Két síktükör egymással nagyon kicsi 2α szöget zár be. A tükrök metszéspontjától d távolságba elhelyezünk egy pontszerű fényforrást, amely a tükrök felé kis szögben sugároz. A megjelenő interferenciaképet a fényforrástól d távolságra elhelyezett ernyőn vizsgáljuk.

- Számolja ki a látszólagos fényforrások a távolságát az α szög és a d távolság függvényében.
- Számolja ki az ernyőn kialakuló interferenciaképen a csíkok közötti távolságot, ha a fény hullámhossza λ .

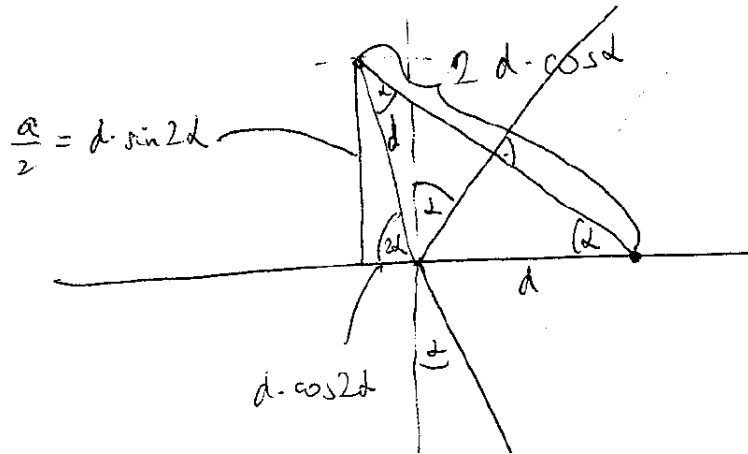


7. ábra. Interferencia tükröző felületekről (hullámfrontosztás)

Megoldás: A két tükörből és egy fényforrásból álló rendszert helyettesíthetjük egy olyan rendszerrel, mely csak két látszólagos fényforrást tartalmaz úgy, hogy az a két látszólagos forrás az eredeti forrásnak a tükröképeinek helyén található.

A fényforrásnak a tükrök síkjától mért távolsága: $d \cos \alpha$. Ha tükrözzük a fényforrást a tükrök síkjára, akkor az eredeti fényforrásnak a látszólagos forrástól mért távolsága: $2 \cdot d \cos \alpha$. Ekkor a látszólagos források egymástól mért távolságának fele:

$$\frac{a}{2} = 2 \cdot d \cos \alpha \cdot \sin \alpha$$



8. ábra. Látszólagos forrás helyének meghatározása

Amiből a látszólagos források távolsága:

$$a = 4 \cdot d \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha$$

$$a = 2 \cdot d \cdot \sin(2\alpha)$$

Ebben az elrendezésben két egymástól $a = 2 \cdot d \cdot \sin(2\alpha)$ távolságra elhelyezkedő forrás interferencia képét kell meghatároznunk, egy olyan ernyőn, amely $D = d \cdot \cos(2\alpha) + 2d$ távolságra van a források síkjától.

A tengelyről nézve θ látószög alatt elhelyezkedő pont esetén a két forrásból származó nyalábok optikai úthosszkülönbsége:

$$\Delta OPL = a \cdot \sin\theta$$

Ebből a fáziskülönbség:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sin\theta$$

A θ látószögre az ernyő távolságából (D) és a vizsgált pont tengelytől mért távolságából (y) a következő összefüggést írhatjuk fel:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{D}$$

Amennyiben a θ látószög kellően kicsi az alábbi közelítést alkalmazhatjuk:

$$\theta \approx \sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta$$

Ezt felhasználva:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \frac{y}{D}$$

Két szomszédos csík esetén a fáziskülönbség éppen 2π , ekkor tehát a következő összefüggés érvényes:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \frac{\Delta y}{D} = 2\pi \\ \frac{1}{\lambda} \cdot a \cdot \frac{\Delta y}{D} &= 1 \end{aligned}$$

Kifejezve a csíkok távolságát:

$$\Delta y = \frac{D \cdot \lambda}{a}$$

D és a helyére behelyettesítve a d -vel és α -val kifejezett összefüggéseket:

$$\Delta y = \frac{(d \cdot \cos(2\alpha) + 2d) \cdot \lambda}{2 \cdot d \cdot \sin(2\alpha)}$$

$$\Delta y = \frac{(\cos(2\alpha) + 2) \cdot \lambda}{2 \cdot \sin(2\alpha)}$$

Abban az esetben ha α elég kicsi alkalmazhatjuk az alábbi közelítéseket:
 $\cos\alpha \approx 1$ illetve $\sin(2\alpha) \approx 2\alpha$

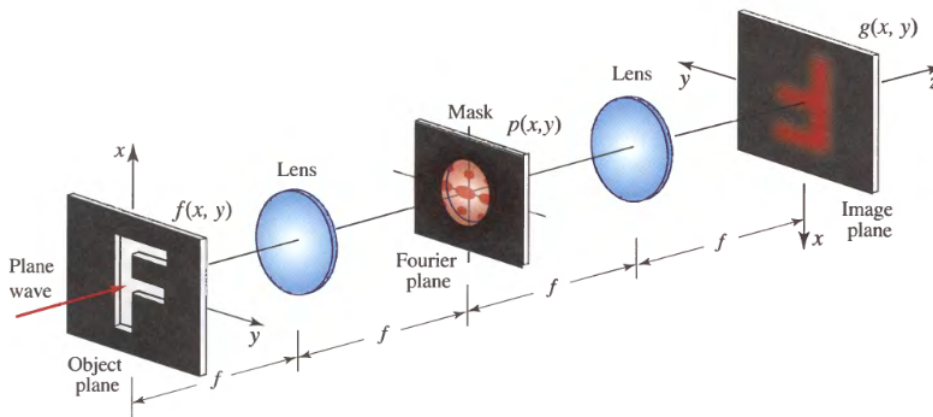
Ezeket felhasználva:

$$\Delta y \approx \frac{3 \cdot \lambda}{4 \cdot \alpha}$$

5. példa: Diffrakció

Az ábrán látható "4f" rendszerben térszűrést kívánunk végrehajtani a Fourier síkba helyezett apertúra segítségével. Számoljuk ki mi lesz a képpoldalon a komplex amplitúdó, hogyha adott a bemeneti $f(x,y)$ komplex amplitúdó és az apertúra áteresztési függvénye $p(x,y)$!

- a) $f(x, y) = \delta(x - 5)$, $p(x, y) = \text{rect}(x)$ b) $f(x, y) = \text{rect}(x)$, $p(x, y) = \text{sinc}(x)$



9. ábra. Fourier térszűrés

Megoldás:

Konvolúciós integrál:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(x - t) dt$$

Ezt felhasználva:

$$G = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f(x, y)) \cdot p(x, y))$$

$$G = f(x, y) * \mathcal{F}^{-1}(p(x, y))$$

- a) $f(x, y) = \delta(x - 5)$, $p(x, y) = \text{rect}(x)$, ahol

$$x = \lambda f f_x$$

$$G = \delta(x - 5) * \mathcal{F}^{-1}(\text{rect}(x)) = \delta(x - 5) * \text{sinc}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - 5) \cdot \text{sinc}(x - t) dt = \text{sinc}(x - 5)$$

- a) $f(x, y) = \text{rect}(x)$, $p(x, y) = \text{sinc}(x)$, ahol

$$x = \lambda f f_x$$

$$G = \text{rect}(x) * \mathcal{F}^{-1}(\text{sinc}(x)) = \text{rect}(x) * \text{rect}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t) \cdot \text{rect}(x - t) dt = \text{tri}(x)$$