Fizika feladatok

2017. április 3.

Ez a feladatgyűjtemény a villamosmérnök hallgatók korábbi jogos igényének megfelelve, nagy hiányt pótol. A kitűzött feladatok az I. féléves fizika tárgyának anyagához illeszkednek. Remélhetőleg érzékelhető segítséget jelent mind a hallgatók, mind a tárgyat oktatók számára, valamint hozzájárul az egységes oktatás megvalósításához. A gyűjteményben a * jelzés a magasabb nehézségi szintű feladatokat jelöli, míg a **-gal jelölt feladatokat a kihívásokat kedvelő megoldóknak ajánljuk. A feladatgyűjtemény folyamatosan bővül új feladatokkal és megoldásokkal. Javaslatokat új feladatokra, valamint megoldásokat és egyéb észrevételeket szívesen látunk. (Szerk.: Márkus Ferenc, Rakyta Péter, Krafcsik Olga, Barócsi Attila, Sólyom András, Gilyén András, Márkus Bence Gábor, Gambár Katalin, Fehér András, Bokor Nándor)

Tartalomjegyzék

1. Feladatok az elektrosztatika tárgyköréből **6**
Coulumb-törvény . . . 6
1.1. Feladat . . . 6
1.2. Feladat . . . 6
1.3. Feladat . . . 7
1.4. Feladat . . . 7
1.5. Feladat . . . 8
1.6. Feladat . . . 8
1.7. Feladat . . . 9
1.8. Feladat . . . 10
1.9. Feladat . . . 12
Gauss-törvény . . . 13
1.10. Feladat . . . 13
1.11. Feladat . . . 13
1.12. Feladat . . . 13
1.13. Feladat . . . 15
1.14. Feladat . . . 15
Az elektromos potenciál . . . 17
1.15. Feladat . . . 17
1.16. Feladat . . . 17
1.17. Feladat . . . 17
1.18. Feladat . . . 18
1.19. Feladat . . . 19
1.20. Feladat . . . 20
Kondenzátorok . . . 22
1.21. Feladat . . . 22
1.22. Feladat . . . 22
1.23. Feladat . . . 23
1.24. Feladat . . . 24
1.25. Feladat . . . 24
1.26. Feladat . . . 25
1.27. Feladat . . . 26
1.28. Feladat . . . 26
1.29. Feladat . . . 27

1.30. Feladat 27

2. Feladatok az elektromos áram tanából 27

Az elektromos áram 27

2.1. Feladat 28

2.2. Feladat 28

2.3. Feladat 29

2.4. Feladat 29

2.5. Feladat 29

RC-körök 30

2.6. Feladat 30

2.7. Feladat 30

2.8. Feladat 31

2.9. Feladat 32

2.10. Feladat 32

3. Feladatok a mágneses erőtér témaköréből 32

Elektromosan töltött részecskék mozgása mágneses erőtérben 32

3.1. Feladat 33

3.2. Feladat 33

3.3. Feladat 33

3.4. Feladat 34

Áramvezetőre ható erő mágneses erőtérben 34

3.5. Feladat 34

3.6. Feladat 35

3.7. Feladat 35

3.8. Feladat 36

Biot-Savart törvény 37

3.9. Feladat 37

3.10. Feladat 37

3.11. Feladat 38

3.12. Feladat 39

3.13. Feladat 39

4. Feladatok a mágneses indukció témaköréből 40

Faraday-törvény 40

4.1. Feladat 40

4.2. Feladat . . . 41
4.3. Feladat . . . 41
4.4. Feladat . . . 42
4.5. Feladat . . . 43
4.6. Feladat . . . 43
4.7. Feladat . . . 44
4.8. Feladat . . . 44
4.9. Feladat . . . 45
4.10. Feladat . . . 45
4.11. Feladat . . . 46
Váltakozó áramú áramkörök . . . 47
4.12. Feladat . . . 47
4.13. Feladat . . . 47
4.14. Feladat . . . 48
4.15. Feladat . . . 48

5. Feladatok az elektromágneses hullámok témaköréből 48
Az eltolódási áram . . . 48
5.1. Feladat . . . 49
5.2. Feladat . . . 49
Elektromágneses hullámok . . . 50
5.3. Feladat . . . 50
5.4. Feladat . . . 50
5.5. Feladat . . . 50
5.6. Feladat . . . 51
5.7. Feladat . . . 51
5.8. Feladat . . . 52

6. Feladatok a geometriai optika témaköréből 52
Fénytörés . . . 52
6.1. Feladat . . . 52
6.2. Feladat . . . 52
6.3. Feladat . . . 53

7. Feladatok a hullámoptika témaköréből 53
Interferencia . . . 53
7.1. Feladat . . . 53

7.2. Feladat 54
7.3. Feladat 54
7.4. Feladat 55
7.5. Feladat 56
7.6. Feladat 56
7.7. Feladat 56

8. Feladatok a speciális relativitáselmélet tárgyköréből 57
Relativisztikus kinematika 57
8.1. Feladat 57
8.2. Feladat 57
Relativisztikus dinamika 57
8.3. Feladat 57
8.4. Feladat 58
8.5. Feladat 59
8.6. Feladat 60
8.7. Feladat 61

1. Feladatok az elektrosztatika tárgyköréből

Coulomb-törvény

1.1. Feladat: (HN 24B-7) Két kicsiny, 100 g-os ezüst gömb egymástól 1 m-es távolságra helyezkedik el. Az ezüstgömb elektronjainak hányadrészét kell az egyik gömbről a másikra átvinni, hogy közöttük 10^4 N vonzóerő hasson? (Az ezüstben atomonként 47 elektron van, és az ezüst atomtömege 107,9.)

Megoldás: A fellépő erő nagysága

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}, \tag{1.1.1}$$

amelyből az adatok behelyettesítésével az átvitt töltés

$$Q = 1,054 \cdot 10^{-3}\mathrm{C}. \tag{1.1.2}$$

Ez $6,58 \cdot 10^{15}$ számú elektronnak felel meg. A 100 g ezüst $2,61 \cdot 10^{25}$ elektront tartalmaz. Így az elektronok $\underline{2,51 \cdot 10^{-10}}$-nyi hányadát kell átvinni.

1.2. Feladat: (HN 24B-9) Két pontszerű töltés az x tengelyen a következőképpen helyezkedik el: egy -3 μ C töltés az origóban, és egy +2 μ C töltés az x = 0,15 m koordinátájú pontban van. Keressük meg azt a helyet, egy q' ponttöltésre ható erő zérus.

Megoldás: A q' töltésre ható erő ott zérus, ahol zérus a két töltéstő származó elektromos térerősség. Osszuk fel az x tengelyt három intervallumra. Jelölje D a q' helyét az x tengelyen.
(a) $-\infty < D < 0$: Számolás nélkül belátható, hogy a térerősség egyetlen D pontban sem lehet zérus. A -3 μ C töltéstől származó tér nagysága – az $1/r^2$-es erőtörvény miatt – mindenütt felülmúlja a +2 μ C töltéstől származó teret. Itt tehát nincs megoldás.
(b) $0 < D < x$: Az intervallum minden pontjában mindkét töltéstől származó erőtér negatív irányú, így az összegük is. Itt sincs megoldás.
(c) $x < D < \infty$: Legyen $Q_1 = -3\mu$ C és $Q_2 = +2\mu$ C. A két töltéstől származó tér zérus voltát a

$$0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{D^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{(D-x)^2} \tag{1.2.1}$$

egyenlet fejezi ki. Ezt D-re megoldva és az adatokat behelyettesítve

$$D = 0,82\mathrm{m} \tag{1.2.2}$$

adódik. Ebben a pontban zérus a térerősség.

1.3. Feladat: Egy homogén elektromos erőtér térerőssége (derékszögű koordinátarendszerben) $\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{y}} = E_0\mathbf{j} = E_0 \cdot (0,1,0)$, ahol E_0 konstans. (Itt a többféle lehetséges jelölés látható.) Egy m tömegű és $+q$ töltésű részecskét juttatunk a koordinátarendszer origójába $\mathbf{v} = v_0\hat{\mathbf{x}} = v_0\mathbf{i} = v_0 \cdot (1,0,0)$ sebességgel. Számítsuk ki a részecske pályájának egyenletét!

Megoldás: A $+q$ töltésre ható erő

$$\mathbf{F} = qE_0 \cdot (0,1,0) = (0, qE_0, 0), \tag{1.3.1}$$

amely

$$\mathbf{a} = \frac{qE_0}{m} \cdot (0,1,0) = \left(0, \frac{qE_0}{m}, 0\right) \tag{1.3.2}$$

gyorsulást hoz létre. A sebességre vonatkozó kezdőfeltételt figyelembe véve a test sebessége az idő függvényében

$$\mathbf{v} = \left(v_0, \frac{qE_0}{m}t, 0\right). \tag{1.3.3}$$

Míg a test helyzete – figyelembe véve, hogy az origóból indult –

$$\mathbf{r} = \left(v_0 t, \frac{1}{2}\frac{qE_0}{m}t^2, 0\right). \tag{1.3.4}$$

Látható, hogy

$$x(t) = v_0 t \tag{1.3.5}$$

és

$$y(t) = \frac{1}{2}\frac{qE_0}{m}t^2, \tag{1.3.6}$$

ahonnan a t eliminálásával az

$$y(x) = \frac{1}{2}\frac{qE_0}{mv_0^2}x^2 \tag{1.3.7}$$

pályagörbe adódik.

1.4. Feladat: (HN 24C-23) Mutassuk meg, hogy két egymástól meghatározott távolságban lévő kis tárgy, amelyek között adott töltésmennyiség oszlik meg, akkor taszítja egymást a legnagyobb erővel, ha a töltés egyenletesen oszlik meg közöttük.

Megoldás: Osszunk meg Q töltést úgy, hogy az egyik testen q, a másikon Q-q töltés legyen. Ekkor a két test között ható Coulomb-erő nagysága

$$F(q) = K\frac{q(Q-q)}{r^2}. \tag{1.4.1}$$

A erő maximális értékét úgy kereshetjük meg, ha megoldjuk a

$$\frac{dF(q)}{\mathrm{d}q} = 0 \tag{1.4.2}$$

egyenletet. A deriválást elvégezve

$$\frac{K}{r^2}(Q-2q) = 0 \tag{1.4.3}$$

adódik, amelyből a

$$q = \frac{1}{2}Q \tag{1.4.4}$$

következik. Ezzel az állítást igazoltuk.

1.5. Feladat: (HN 24C-27) Számítsuk ki azt a munkát, ami ahhoz szükséges, hogy egy R sugarú gömb felszínére Q töltést juttassunk. A feltöltést végezzük úgy, hogy infinitezimális dq elemi töltést viszünk a végtelenből a gömb felszínére mindaddig, amíg a gömb töltése a Q-t el nem éri.

Megoldás: Tételezzük fel, hogy a gömbön már van q töltés. Ekkor a végtelenből további dq töltés viszünk a gömbre. Az eközben végzett munka

$$W(q \to q+dq) = -\int_{\infty}^{R} K\frac{q\mathrm{d}q}{r^2}dr = K\frac{q\mathrm{d}q}{r}. \tag{1.5.1}$$

A teljes feltöltéshez ezen munkákat kell összeadni:

$$W = \int_{0}^{Q} K\frac{q\mathrm{d}q}{r} = \frac{1}{2}K\frac{Q^2}{r}. \tag{1.5.2}$$

1.6. Feladat: (HN 24C-31) Egy elektromos dipólus egymástól l távolságra lévő, m tömegű pontszerű töltésekből áll, melyek nagysága $+q$ és $-q$. A dipólust E homogén elektromos erőtérbe helyezünk úgy, hogy a minimális potenciális energiájú állapot közelében legyen.

(a) Mutassuk meg, hogy a dipólus rezgő-forgó mozgást végez a tömegközéppontja körül.

(b) Vezessünk le olyan összefüggést, amely (közelítőleg) megadja a rezgés T periódusidejét.

Megoldás:

(a) A dipólus töltéseire azonos nagyságú, ellentétes erő hat (erőpár). A dipólusra ható erők eredője zérus, így haladó mozgást nem fog végezni. A forgatónyomaték azonban nem zérus, így a dipólus a tömegközéppontja (a két töltés felezőpontja) körül forgómozgást végezhet. Attól

függően hogy a dipólnak milyen a térbeli helyzete, azaz a $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ dipólmomentum vektor és az $\mathbf{pE}$ elektromos erőtér iránya a szögelfordulás az $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ vektorral párhuzamos és mind a $\mathbf{p}$ mind az $\mathbf{E}$ vektorra merőleges. Azt, hogy kis kitérések esetén harmonikus rezgőmozgást végez a dipól, az a következőkben látjuk be.

(b) A minimális potenciálú állapot akkor van, ha a $\mathbf{p}$ dipólmomentum vektor párhuzamos és azonos irányba mutat az $\mathbf{E}$ elektromos térerősség vektorral. (A dipólus potenciális energiája $U = -\mathbf{pE}$.) Ha ebből a helyzetből φ szöggel kitérítjük, akkor

$$M = -qlE \sin\varphi \tag{1.6.1}$$

nagyságú forgatónyomaték fog a dipólusra hatni. A dipólus tehetetlenségi nyomatékát θ-val jelölve a forgómozgás mozgásegyenlete

$$\theta\ddot{\varphi} = -qlE \sin\varphi. \tag{1.6.2}$$

Kis szögelfordulásokra szorítkozva ($\sin\varphi \sim \varphi$)

$$\theta\ddot{\varphi} = -qlE\varphi \tag{1.6.3}$$

egyenletre jutunk, amely a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Innen a rezgés körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{\frac{qlE}{\theta}}. \tag{1.6.4}$$

Ha felhasználjuk, hogy a tehetetlenségi nyomaték

$$\theta = 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2, \tag{1.6.5}$$

akkor

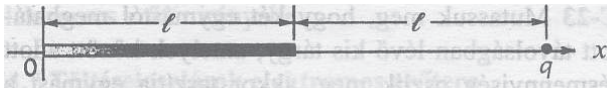
$$\omega = \sqrt{\frac{2qE}{ml}}. \tag{1.6.6}$$

A periódusidő

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{2qE}}. \tag{1.6.7}$$

1.7. Feladat: (24C-34) Az x tengely mentén – a $(0, l)$ intervallumban – elhelyezkedő l hosszúságú, vékony, szigetelő rúdon a $\lambda(x)$ töltéssűrűség helyfüggését a $\lambda(x) = Ax$ összefüggés írja le. A rúd végétől l távolságra – az $x = 2l$ pontban – egy pontszerű q töltés helyezkedik el az x tengelyen (1 ábra).

(a) Mi az A állandó SI mértékrendszerbeli egysége?



1. ábra.

(b) Mekkora a töltés helyén az elektromos térerősség?

Megoldás:

(a) Az A mértékegysége $\mathrm{C/m^2}$.

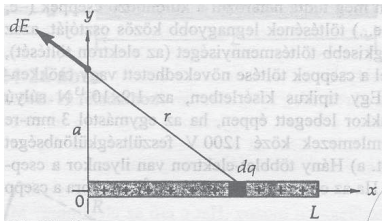
(b) A x tengelyen az x pontban tekintsünk $\mathrm{d}q = \lambda(x)\mathrm{d}x$ töltést. Az ettől származó $\mathrm{d}E$ térerősség a $2l$ pontban

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(x)\mathrm{d}x}{(2l-x)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ax}{(2l-x)^2}\mathrm{d}x. \tag{1.7.1}$$

A teljes térerősség integrállal határozható meg:

$$E = \int_0^l \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ax}{(2l-x)^2}\mathrm{d}x = \frac{A}{4\pi\varepsilon_0}(1-\ln 2). \tag{1.7.2}$$

1.8. Feladat: (HN 24C-35) Tekintsünk az $x = 0$ és $x = L$ pontok között, az x tengely mentén egy λ pozitív lineáris (hosszegységenkénti) töltéssűrűséget (2 ábra).



2. ábra.

(a) Számítsuk ki az **E** elektromos térerősség vektor y komponensét az $x = 0$, $y = a$ pontban;

(b) Számítsuk ki az **E** elektromos térerősség vektor x komponensét ugyanebben a pontban.

Megoldás:

(a) Az elektromos térerősség y komponensét a következőképpen számoljuk ki. Az origótól x távolságban lévő $\mathrm{d}x$ hossztól származó $\mathrm{d}E$ elektromos térerősség nagysága a $(0, a)$ pontban

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{x^2+a^2}. \tag{1.8.1}$$

Az a és r által közbezárt szöget θ -val jelölve, a $d\mathbf{E}$ térerősség vektor y komponense

$$\mathrm{d}E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\mathrm{d}x}{x^2+a^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\mathrm{d}x}{x^2+a^2}\frac{a}{(x^2+a^2)^{1/2}}. \tag{1.8.2}$$

A teljes E_y térerősség a

$$E_y = \int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a\lambda \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} \tag{1.8.3}$$

integrállal számolható ki. A számolás végrehajtásához válasszuk a következő helyettesítést:

$$x = a\mathrm{tg}\theta, \tag{1.8.4}$$

amellyel

$$\mathrm{d}x = a\frac{1}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta. \tag{1.8.5}$$

Ezeket behelyettesítve, valamint a határokat illesztve a

$$E_y = \int_0^{\arcsin\frac{L}{(L^2+a^2)^{1/2}}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{a}\cos\theta \mathrm{d}\theta \tag{1.8.6}$$

integrálhoz jutunk. A számolást végrehajtva a térerősség y komponense

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda L}{a(L^2+a^2)^{1/2}}. \tag{1.8.7}$$

(b) A $d\mathbf{E}$ térerősség x komponense

$$\mathrm{d}E_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{x^2+a^2}\sin\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{x^2+a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}}, \tag{1.8.8}$$

ahol a "-" előjel a koordinátarendszerbeli irányítást jelenti. Ezzel a teljes E_x komponens

$$E_x = -\int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\lambda \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} \tag{1.8.9}$$

integrállal fejezhető ki. A számolás az előbbinél egyszerűbben elvégezhető

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{\lambda}{(x^2+a^2)^{1/2}}\right]_0^\infty = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\lambda}{a} - \frac{\lambda}{(L^2+a^2)^{1/2}}\right). \tag{1.8.10}$$

Tehát a térerősség vektor a $(0,a)$ pontban

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\left(\frac{\lambda}{a} - \frac{\lambda}{(L^2+a^2)^{1/2}}\right), \frac{\lambda L}{a(L^2+a^2)^{1/2}}\right). \tag{1.8.11}$$

1.9. Feladat: (HN 24C-36) Egy R sugarú körgyűrűn $+Q$ teljes töltés, a gyűrű középpontjában egy m tömegű, $-q$ negatív töltés van. Ha a $-q$ töltést a gyűrű tengelye mentén kissé kimozdítjuk, majd elengedjük, akkor a gyűrű tengelye mentén rezgőmozgást végez (feltéve, hogy a tengelyvonalból való kimozdulást valamilyen módon megakadályozzuk). Adjuk meg a rezgés f (közelítő) frekvenciáját.

Megoldás: A kör szimmetria tengelye legyen az x tengely, a kör középpontja az origó. Először a tengelyen az x pontban pontban számoljuk ki a töltött körtől származó térerősséget. A kör kerületén vezessük be a $\lambda = \frac{Q}{2R\pi}$ töltéssűrűséget. A $\mathrm{d}\theta$ központi szögtől származó $\mathrm{d}E$ térerősség nagysága az x pontban

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\mathrm{d}\theta}{x^2+R^2}. \tag{1.9.1}$$

A tengely irányú $\mathrm{d}E_x$ vetület

$$\mathrm{d}E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\mathrm{d}\theta}{x^2+R^2}\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}. \tag{1.9.2}$$

A szög szerint integrálva megkapjuk a teljes E_x térerősséget, amely

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda Rx}{(x^2+R^2)^{3/2}}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}. \tag{1.9.3}$$

A $-q$ töltésre ható erő

$$F_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQx}{(x^2+R^2)^{3/2}}. \tag{1.9.4}$$

Ha kis kitérésekre szorítkozunk, azaz $x << R$, úgy

$$(x^2+R^2)^{3/2} \sim R^3. \tag{1.9.5}$$

Ezzel

$$F_x = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R^3}x. \tag{1.9.6}$$

A $-q$ töltés mozgásegyenlete

$$m\ddot{x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R^3}x, \tag{1.9.7}$$

amely a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. A kialakuló rezgés frekvenciája:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 mR^3}}. \tag{1.9.8}$$

Gauss-törvény

1.10. Feladat: (HN 25A-5) Két végtelen, szigetelő sík mindegyikén egyenletes σ töltéssűrűség van. A síkok egymással párhuzamosak. A szuperpozíciós elv használatával határozzuk meg a két sík közötti, illetve az azokon kívül lévő elektromos térerősséget.

Megoldás: A két sík egyike (1) legyen az origón átmenő y-z síkban, míg a másik (2) ezzel párhuzamos menjen át az x = +d ponton.

Az (1) síkon lévő töltések által keltett elektromos térerősség
$-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ a $(-\infty, 0)$ tartományban, míg
$+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ a $(0, +\infty)$ tartományban.

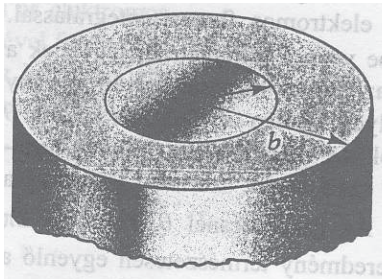
Az (2) síkon lévő töltések által keltett elektromos térerősség
$-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ a $(-\infty, +d)$ tartományban, míg
$+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ a $(+d, +\infty)$ tartományban.

A szuperpozíció elve miatt (a terek vektori módon adódnak össze) a kialakuló erőtér:
$-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ a $(-\infty, 0)$ tartományban,
0 a $(0, d)$ tartományban, és
$+\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ a $(+d, +\infty)$ tartományban.

1.11. Feladat: (HN 25A-10) Tekintsünk egy l0 cm sugarú üreges fémgömböt, amelyen +10 μC töltés van. Legyen a gömb középpontja a koordinátarendszer origójában. A gömb belsejében az x = 5 cm pontban legyen egy -3 μC nagyságú pontszerű töltés. Számítsuk ki az elektromos térerősséget a gömbön kívül, az x tengely mentén. Vázoljuk fel az erővonalakat a gömbön kívül és azon belül.

Megoldás: X

1.12. Feladat: (HN 25C-15) A 3 ábrán illusztrált a belső és b külső sugarú, végtelen hosszú cső fala pozitív töltésű. A ϱ töltéssűrűség nem egyenletes: a és b között a tengelytől mért távolsággal fordított arányban változik, azaz ha $a \leq r \leq b$, $\varrho = k/r$, ahol k egy SI egységekben



3. ábra.

megadott konstans.

(a) Mi a k mértékegysége?

(b) Számítsuk ki az L hosszúságú csődarab Q töltését.

(c) Gauss törvényét felhasználva, határozzuk meg az E elektromos térerősséget az r pontban ($a < r < b$).

Megoldás:

(a) A k mértékegysége $\mathrm{C/m^2}$.

(b) A L hosszúságú csődarab Q töltése

$$Q = \int_a^b \varrho(r) 2r\pi L \mathrm{d}r = \int_a^b 2k\pi L \mathrm{d}r = 2k\pi L(b-a). \tag{1.12.1}$$

(c) Az E elektromos térerősséget az r pontban a

$$\oint \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \varrho \mathrm{d}V \tag{1.12.2}$$

összefüggés alkalmazásával (Gauss-törvény) határozzuk meg. Ennek megfelelően

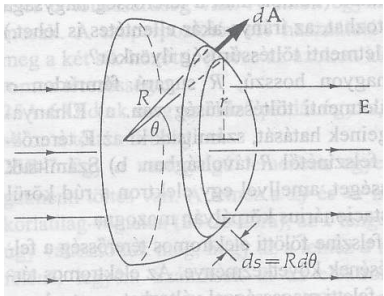
$$E 2r\pi L = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_a^r \varrho(r) 2r\pi L \mathrm{d}r = \frac{1}{\varepsilon_0} 2k\pi L(r-a). \tag{1.12.3}$$

Innen a térerősség ($a < r < b$) tartományban

$$E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} k(1 - \frac{a}{r}). \tag{1.12.4}$$

Megjegyzés: További gyakorló feladat a csövön kívüli térerősség kiszámolása.

1.13. Feladat: (HN 25C-19) Ahogyan a 4 ábrán látható, az **E** térerősségű homogén elektromos térbe úgy helyezünk egy R sugarú sík lappal zárt félgömböt, hogy az erővonalak e sík lapon merőlegesen haladjanak át. Számítsuk ki a görbült felületen a Φ elektromos fluxust integrálással. *Útmutatás:* Figyelembe véve a szimmetriát, legyenek a d**A** elemi felületek az ábrán illusztrált olyan vékony gyűrűk (sávok), amelyek mentén az **E** és d**A** közötti θ szög állandó. A sávok dA területe a $2\pi(R sin\theta)$ hosszuk és a $R\mathrm{d}\theta$ szélességük szorzata. Ennélfogva $dA = 2\pi R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta$. Az összegzésnél θ, zérus és $\pi/2$ között változik. Az eredmény természetesen egyenlő a sík lapon átmenő fluxussal, de ellentétes előjelű azaz $-ER^2\pi$. A teljes zárt felületen a fluxus zérus.



4. ábra.

Megoldás: Az elektromos tér fluxusának kiszámolásához a félgömbre szükségünk van a dA felületelemre:

$$dA = 2\pi R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta. \tag{1.13.1}$$

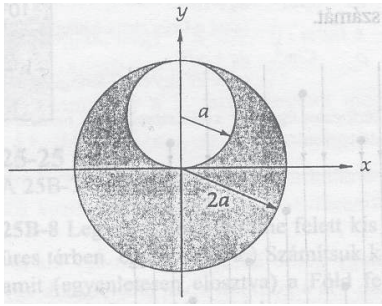
Figyelembe kell venni, hogy a dA iránya θ szöget zár be az E elektromos térrel, így a skaláris szorzás miatt megjelenik egy $\cos\theta$-val való szorzás. Az elektromos tér fluxusa a félgömbre:

$$\Phi_E = E \int_0^{\pi/2} 2\pi R^2 \sin\theta \cos\theta \mathrm{d}\theta = ER^2\pi, \tag{1.13.2}$$

ahogy annak lennie is kell.

1.14. Feladat: (HN 25C-20) Szigetelő anyagból készült $2a$ sugarú gömbben az egyenletes térfogati töltéssűrűség ϱ. (Tételezzük fel, hogy a gömb anyagának nincs hatása a térerősség nagyságára.) A 5 ábrán tátható helyen a gömbben $a$sugarú gömb alakú üreget képezünk. Mutassuk meg, hogy az üregben az elektromos térerősség homogén és nagysága, $E_x = 0$ és $E_y = \varrho a/(3\varepsilon_0)$.

Megoldás: Tekintsünk az üregen (kis gömbön) belül egy P pontot, az egyszerűség kedvéért úgy, hogy helyvektorának x koordinátája pozitív legyen, valamint y koordinátája nagyobb legyen mint



5. ábra.

a, és a forgásszimmetria miatt z=0. Jelölje ekkor a nagyobb gömb középpontjából a P pontba húzott sugarat r, míg a kisebb gömb középpontjából r'. Ha r és r' a vízszintessel φ és α szöget zárnak be, akkor fenn állnak, hogy

$$r' \cos\alpha = r \cos\varphi, \tag{1.14.1}$$

illetve

$$r' \sin\alpha + a = r \sin\varphi. \tag{1.14.2}$$

E két összefüggésre szükségünk lesz. Az elektromos teret úgy számoljuk ki, hogy vesszük a $2a$ sugarú homogén gömb terét és ebből levonjuk az a sugarú üregét. A $2a$ sugarú – üreg nélküli – gömbben a térerősség a Gauss-törvény alapján

$$E 4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho\frac{4r^3\pi}{3}, \tag{1.14.3}$$

amelyből a térerősség nagysága

$$E = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r. \tag{1.14.4}$$

A térerősség vektor komponensei

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r\cos\varphi, \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r\sin\varphi\right). \tag{1.14.5}$$

Az üreg miatt levonandó E' térerősség hasonlóképpen számítandó ki, csak figyelembe kell venni, hogy r' α szöget zár be a vízszintessel. Így az egyenletek:

$$E' 4r'^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho\frac{4r'^3\pi}{3}, \tag{1.14.6}$$

amelyből a térerősség nagysága

$$E' = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r'. \tag{1.14.7}$$

A térerősség vektor komponensei

$$\mathbf{E}' = \left(\frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r'\cos\alpha, \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r'\sin\alpha\right). \tag{1.14.8}$$

Figyelembe véve a (1.14.1) és (1.14.2) összefüggéseket az üregen belüli térerősség vektor

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{E} - \mathbf{E}' = \left(0, \frac{\varrho a}{3\varepsilon_0}\right), \tag{1.14.9}$$

amit bizonyítanunk kellett.

Az elektromos potenciál

1.15. Feladat: (HN 26A-l) Két egymással párhuzamos fémlemezt 12 voltos elem pólusaihoz csatlakoztatunk.
(a) Egy nyugalmi helyzetű elektront a negatív lemez mellett elengedünk. Mekkora sebessége lesz a pozitív lemezbe történő becsapódásakor?
(b) Számítsuk ki az elektron maximális kinetikus energiáját, és adjuk meg eV és joule egységekben is.
(c) Ha a lemezek távolsága 4 mm, mennyi ideig repült az elektron a lemezek között?
(d) Ha a lemezek távolsága ettől különböző lenne, változna-e az (a) és (b) kérdésekre adandó válasz?

Megoldás: X

1.16. Feladat: (HN 26B-5) Egy a oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszög minden egyes csúcsán $+q$ töltés van. Számítsuk ki a háromszög középpontja és az oldalak felezőpontja közötti ΔV feszültséget. A középpontban, vagy az oldalak közepén nagyobb a potenciál?

Megoldás: X

1.17. Feladat: Helyezzünk el egy, az origón átmenő (x-z) síkban egy egyenletes σ töltéssűrűségű szigetelő lemezt, valamint egy ugyancsak origón átmenő (y-z) síkú $-\sigma$ töltéssűrűségű ugyancsak szigetelő lemezt.
(a) Mekkora az elektromos térerősség a $0 < x$ és $0 < y$ koordinátájú pontokban?
(b) Legyen az elektromos potenciál értéke az origóban zérus. Mekkora az elektromos potenciál az (a) kérdésbeli (x,y) pontokban?

Megoldás: A σ töltéssűrűségű szigetelő lemezt vegyük közre két – az egyszerűség kedvéért –

azonos távolságú síkkal, majd metsszünk ki mindhárom síkon A felületeket úgy, hogy egymással fedésben legyenek. Ezt követően a Gauss-törvényt alkalmazzuk a térerősség nagyságának kiszámolására:

$$2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}, \tag{1.17.1}$$

azaz

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{1.17.2}$$

Így a σ töltéssűrűségtől származó térerősség vekor

$$\mathbf{E}_1 = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, 0\right). \tag{1.17.3}$$

Hasonló meggondolásokkal a $-\sigma$ töltéssűrűségtől származó térerősség vektor

$$\mathbf{E}_2 = \left(0, -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right). \tag{1.17.4}$$

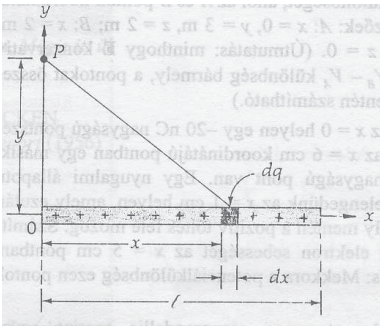
Az eredő térerősség

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y) = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right). \tag{1.17.5}$$

Látható, hogy ez egy helytől független homogén erőtér. Egyúttal megállapíthatjuk, hogy konzervatív is. Mivel tetszőleges úton integrálhatunk, így a potenciál

$$U(x,y) = -\int_0^x E_x dx - \int_0^y E_y dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}y = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-x+y). \tag{1.17.6}$$

1.18. Feladat: (HN 26C-15) Egy l hosszúságú, vékony szigetelő rúdon egyenletesen elosztva Q töltés van. Számítsuk ki a Velektromos potenciált a rúd végétől y távolságban, a 6 ábrán vázolt helyen lévő P pontban.



6. ábra.

Megoldás: Az ábrán látható dq töltés

$$\mathrm{d}q = \frac{Q}{l}\mathrm{d}x. \tag{1.18.1}$$

Az ettől származó potenciál

$$\mathrm{d}U_p = \frac{KQ}{l}\frac{\mathrm{d}x}{r}, \tag{1.18.2}$$

ahol $r = \sqrt{x^2+y^2}$. A teljes hosszhoz tartozó potenciál

$$U_p = \int_0^l \frac{KQ}{l}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{KQ}{l}\ln\left[x+\sqrt{x^2+y^2}\right]_0^l = \frac{KQ}{l}\ln\frac{l+\sqrt{l^2+y^2}}{y}. \tag{1.18.3}$$

1.19. Feladat: (HN 26C-17) Egy R sugarú gömb belsejében a töltéssűrűség a középponttól való r távolsággal arányos, azaz $\varrho(r) = Ar$, ha $(0 < r < R)$, ahol A egy állandó.

(a) Mi A SI egysége?

(b) Mekkora a gömb teljes Q töltése A-val és R-rel kifejezve?

(c) Gauss törvényét felhasználva számítsuk ki a gömb belsejében és kívül, a középponttól r távolságra az E térerősséget.

(d) Számítsuk ki a V potenciált r függvényében a gömbön belül is, kívül is. (Legyen $V = 0$ a végtelenben.)

Megoldás:

(a) Az A paraméter mértékegysége C/m^4.

(b) A gömb teljes töltése:

$$Q = \int_0^R \varrho(r)4r^2\pi\mathrm{d}r = \int_0^R A4r^3\pi\mathrm{d}r = AR^4\pi. \tag{1.19.1}$$

(c) A térerősség kiszámolásához

$$\oint \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.19.2}$$

a Gauss-törvényt használjuk. A gömbön belüli térrészre alkalmazva

$$E4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \varrho(r)4r^2\pi\mathrm{d}r = \frac{1}{\varepsilon_0}Ar^4\pi, \tag{1.19.3}$$

amelyből

$$E = \frac{A}{4\varepsilon_0}r^2 \quad (0 < r < R). \tag{1.19.4}$$

A gömbön kívüli térrészre az

$$E4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0}AR^4\pi \tag{1.19.5}$$

írható, amelyből

$$E = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \quad (R < r). \tag{1.19.6}$$

(d) Az elektromos potenciál meghatározása a gömbön kívül ($R < r$) az

$$U(r) - U(\infty) = -\int_{\infty}^{r} \frac{AR^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} \tag{1.19.7}$$

integrál kiszámolásával történik. Innen a végtelenbeli zérus potenciálhoz viszonyítva az r-beli potenciál:

$$U(r) = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r} \quad (R < r). \tag{1.19.8}$$

A potenciál a gömb felszínén ugyancsak a végtelenbeli zérus potenciálhoz viszonyítva:

$$U(r) = \frac{AR^3}{4\varepsilon_0} \quad (r = R). \tag{1.19.9}$$

A felületről a gömb belseje felé haladva a potenciálkülönbség

$$U(r) - U(R) = -\int_{\infty}^{R} \frac{A}{4\varepsilon_0}r^2\mathrm{d}r = -\frac{A}{12\varepsilon_0}\left[r^3\right]_R^r = -\frac{A}{12\varepsilon_0}r^3 + \frac{A}{12\varepsilon_0}R^3. \tag{1.19.10}$$

Így a gömb belsejében lévő r pontban a potenciál a végtelenhez viszonyítva:

$$U(r) = \frac{AR^3}{4\varepsilon_0} - \frac{A}{12\varepsilon_0}r^3 + \frac{A}{12\varepsilon_0}R^3 = -\frac{A}{12\varepsilon_0}r^3 + \frac{A}{3\varepsilon_0}R^3 \quad (0 < r < R). \tag{1.19.11}$$

1.20. Feladat: (HN 26C-18) Számoljuk ki az előző feladatot $\varrho = Ar^2$ töltéseloszlást feltételezve.

Megoldás:

(a) Az A paraméter mértékegysége C/m^5.

(b) A gömb teljes töltése:

$$Q = \int_0^R \varrho(r)4r^2\pi\mathrm{d}r = \int_0^R A4r^4\pi\mathrm{d}r = \frac{4}{5}AR^5\pi. \tag{1.20.1}$$

(c) A térerősség kiszámolásához

$$\oint \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.20.2}$$

a Gauss-törvényt használjuk. A gömbön belüli térrészre alkalmazva

$$E4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \varrho(r)4r^2\pi\mathrm{d}r = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{5}Ar^5\pi, \tag{1.20.3}$$

amelyből

$$E = \frac{A}{5\varepsilon_0}r^3 \quad (0 < r < R). \tag{1.20.4}$$

A gömbön kívüli térrészre az

$$E4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{5}AR^5\pi \tag{1.20.5}$$

írható, amelyből

$$E = \frac{AR^5}{5\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \quad (R < r). \tag{1.20.6}$$

(d) Az elektromos potenciál meghatározása a gömbön kívül ($R < r$) az

$$U(r) - U(\infty) = -\int_\infty^r \frac{AR^5}{5\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{AR^5}{5\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^r \tag{1.20.7}$$

integrál kiszámolásával történik. Innen a végtelenbeli zérus potenciálhoz viszonyítva az r-beli potenciál:

$$U(r) = \frac{AR^5}{5\varepsilon_0}\frac{1}{r} \quad (R < r). \tag{1.20.8}$$

A potenciál a gömb felszínén ugyancsak a végtelenbeli zérus potenciálhoz viszonyítva:

$$U(r) = \frac{AR^4}{5\varepsilon_0} \quad (r = R). \tag{1.20.9}$$

A felületről a gömb belseje felé haladva a potenciálkülönbség

$$U(r) - U(R) = -\int_\infty^R \frac{A}{5\varepsilon_0}r^3\mathrm{d}r = -\frac{A}{20\varepsilon_0}\left[r^4\right]_R^r = -\frac{A}{20\varepsilon_0}r^4 + \frac{A}{20\varepsilon_0}R^4. \tag{1.20.10}$$

Így a gömb belsejében lévő r pontban a potenciál a végtelenhez viszonyítva:

$$U(r) = \frac{AR^4}{5\varepsilon_0} - \frac{A}{20\varepsilon_0}r^4 + \frac{A}{20\varepsilon_0}R^4 = -\frac{A}{20\varepsilon_0}r^4 + \frac{A}{4\varepsilon_0}R^4 \quad (0 < r < R). \tag{1.20.11}$$

Kondenzátorok

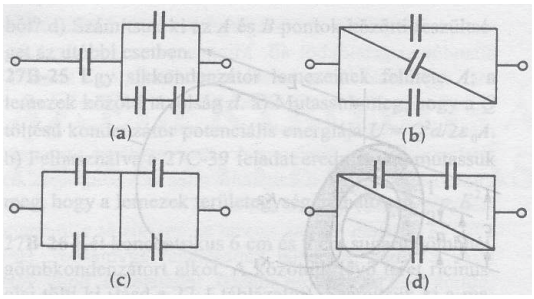
1.21. Feladat: (HN 27A-l) Két, egymástól 1 mm-re lévő, 1 cm^2 felületű, egymással párhuzamos lemez által alkotott kondenzátor kapacitása kb. 1 pF. Számítsuk ki a kapacitás pontos értékét.

Megoldás: Adatok: $d = 1$ mm; $A = 1$ cm^2. A kondenzátor kapacitása:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8,85 \cdot 10^{-13}\text{F}, \tag{1.21.1}$$

amely hozzávetőlegesen 1 pF.

1.22. Feladat: (HN 27A-3) Határozzuk meg a 7 ábra áramköreinek eredő kapacitását. Minden kondenzátor C kapacitású.



7. ábra.

Megoldás: Az eredő kapacitás különböző esetekben:

(a)

$$C_e = \frac{3}{5}C; \tag{1.22.1}$$

(b)

$$C_e = 3C; \tag{1.22.2}$$

(c)

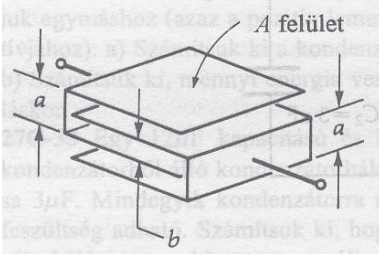
$$C_e = C; \tag{1.22.3}$$

(d)

$$C_e = 0, \tag{1.22.4}$$

mert a kondenzátorok rövidre vannak zárva.

1.23. Feladat: (HN 27B-7) Számítsuk ki a 8 ábrán látható kondenzátor kapacitását. Hanyagoljuk el a lemezek szélein az erőtér inhomogenitásának a hatását. Indokoljuk meg a számítás egyes lépéseit.



8. ábra.

Megoldás: Jelölések: Jelöljük a lemezeket felülről 1, 2, 3 és 4 számokkal, az 1-2 közötti térrészt (1)-gyel, a 2-3 közötti térrészt (2)-vel és a 3-4 közötti térrészt (3)-mal. Az ábra szerint az (1) térrész $a-b$ szélességű, a (2) b szélességű, a (3) $a-b$ szélességű. Mindegyik lemez A felületű, a végek hatásától eltekintünk. Legyen az 1 és 3 lemez zérus, a 2 és 4 lemez U_0 potenciálon. Ekkor a térerősség vektor nagysága és iránya az

(1) térrészben

$$E_{(1)} = \frac{U_0}{a-b} \tag{1.23.1}$$

és a 2 lemeztől az 1 felé mutat;

(2) térrészben

$$E_{(2)} = \frac{U_0}{b} \tag{1.23.2}$$

és a 2 lemeztől az 3 felé mutat;

(3) térrészben

$$E_{(3)} = \frac{U_0}{a-b} \tag{1.23.3}$$

és a 4 lemeztől az 3 felé mutat.

Gauss törvényét alkalmazva az egyes lemezeken lévő töltések:

$$Q_1 = -\varepsilon_0 A \frac{U_0}{a-b}; \tag{1.23.4}$$

$$Q_2 = \varepsilon_0 A \frac{U_0}{a-b} + \varepsilon_0 A \frac{U_0}{b}; \tag{1.23.5}$$

$$Q_3 = -\varepsilon_0 A \frac{U_0}{a-b} - \varepsilon_0 A \frac{U_0}{b}; \tag{1.23.6}$$

$$Q_4 = \varepsilon_0 A \frac{U_0}{a-b}. \tag{1.23.7}$$

Természetes teljesül, hogy

$$|Q_1 + Q_3| = Q_2 + Q_4. \tag{1.23.8}$$

A kondenzátor töltése tehát

$$Q = Q_2 + Q_4 = \varepsilon_0 A \left(2\frac{U_0}{a-b} + \frac{U_0}{b} \right), \tag{1.23.9}$$

amellyel az eredő kapacitás

$$C_e = \frac{Q}{U_0} = \varepsilon_0 A \left(\frac{2}{a-b} + \frac{1}{b} \right) = \varepsilon_0 A \frac{a+b}{(a-b)b}. \tag{1.23.10}$$

1.24. Feladat: (HN 27B-8) A 2 μF és 3 μF kapacitású kondenzátorra egyenként U_{max} maximális feszültség adható. Ha e két kondenzátort sorba kapcsoljuk, a két végpont közötti maximális feszültség 800 V. Mekkora V_{max}?

Megoldás: Adatok: $C_1 = 2\mu$F, $C_2 = 3\mu$F, $U = 800$ V.
A két kondenzátor eredő kapacitása

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 1,2\mu\text{F}. \tag{1.24.1}$$

A kondenzátorokon lévő töltés egyaránt

$$Q = C_e U = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U = 9,6 \cdot 10^{-4}\text{C}. \tag{1.24.2}$$

A kondenzátorokra eső feszültség

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U = 480\text{V} \tag{1.24.3}$$

és

$$U_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U = 320\text{V}. \tag{1.24.4}$$

Így értelemszerűen $U_{max} = 480$ V.

1.25. Feladat: (HN 27B-9) A gömbkondenzátor kapacitása

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a},$$

ahol a és b a belső, illetve külső gömb sugara. Ha mind a, mind b nagyon naggyá válik, (de különbségük továbbra is kicsiny) egy kis tartományban a felületek párhuzamos síkokkal közelíthetők. Mutassuk meg, hogy a fenti összefüggés a síkkondenzátor kapacitását megadó képletté egyszerűsödik.

Megoldás: A $b-a$ különbség a két fegyverzet közötti d távolság. Ha $a \sim b$, akkor a $4\pi ab = 4\pi a^2$ a fegyverzet A felülete. Ezek behelyettesítésével:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}, \tag{1.25.1}$$

amely a síkkondenzátor kapacitása.

1.26. Feladat: (HN 27B-20) Egy 0,1 μF kapacitású síkkondenzátor lemezei 0,75 m^2 területűek, a szigetelő réteg dielektromos állandója 2,5. A kondenzátort 600 V-os feszültségre töltjük fel.

(a) Számítsuk ki a lemezek töltését.

(b) Számítsuk ki a szigetelő réteg felületén indukált töltéssűrűséget.

(c) Számítsuk ki a szigetelő rétegben az elektromos térerősséget.

Megoldás: Adatok: C = 0,1 μF; A = 0,75 m^2; ε_r = 2,5; U = 600 V.

(a) A kondenzátor töltése

$$Q = CU = 6 \cdot 10^{-5} C. \tag{1.26.1}$$

(b) A σ szabad töltések sűrűsége:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = 8 \cdot 10^{-5} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}, \tag{1.26.2}$$

az e tötéssűrűség által létrehozott elektromos térerősség

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{1.26.3}$$

Jelölje σ' az indukált töltéssűrűséget. Az ezáltal keletkezett – az őt létrehozó térrel ellentétes – elektromos tér

$$E = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}. \tag{1.26.4}$$

E kettő összege adja a dielektrikumbeli teret, amellyel a

$$E - E' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = E_r \tag{1.26.5}$$

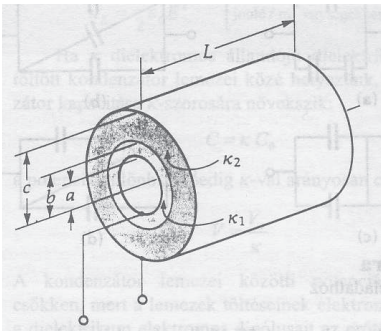
egyenlet írható fel. Ebből az indukált töltéssűrűség

$$\sigma' = \frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\sigma = -4,8\cdot 10^{-5}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}. \tag{1.26.6}$$

(c) A lemezek közötti térerősség

$$E_r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = 3,614\cdot 10^{6}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}. \tag{1.26.7}$$

1.27. Feladat: (HN 27B-21) Tekintsünk egy hengeres kondenzátort, melyben a belső és külső hengerek között két réteg szigetelő anyag van (lásd 9 ábra). Elhanyagolva a szélek hatását, határozzuk meg, hogy C kapacitása miként függ az ábrán megadott paraméterektől.



9. ábra.

Megoldás: X

1.28. Feladat: (HN 27B-27) A lemezei között polisztirol réteget tartalmazó síkkondenzátor kapacitása 10 nF. A kondenzátort egy 100 V-os feszültségű telephez kapcsoljuk, és a szigetelő réteget eltávolítjuk a lemezek közül. Számítsuk ki

(a) valamelyik lemezen a töltésváltozást;

(b) a tárolt energia változását,

(c) a szigetelő réteg eltávolításához szükséges munkát.

Megoldás: Adatok: $C = 10$ nF; $U = 100$ V. Táblázatból kikeresve a polisztirol dielektromos állandója $\varepsilon_r = 2,5$.

(a) A kondenzátor kezdeti töltése.

$$Q = CU = 10^{-6}\mathrm{C} = 1000\mathrm{nC}. \tag{1.28.1}$$

A polisztirol réteg kihúzása után a kondenzátor kapacitása 1/2,5-öd részére csökken, így 400 nC töltés lesz a kondenzátoron. A változás: -600 nC.
(b) A tárolt energia változása:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\frac{C}{\varepsilon_r}U^2 - \frac{1}{2}CU^2 = -3 \cdot 10^{-5}\mu\text{J}. \tag{1.28.2}$$

(c) A végzett munka

$$W = -\Delta E = 3 \cdot 10^{-5}\mu\text{J}. \tag{1.28.3}$$

1.29. Feladat: (HN 27C-33) Egy 12 μF kapacitású és két 2 μF kapacitású kondenzátorból á11ó kondenzátorhálózat eredő kapacitása 3 μF. Mindegyik kondenzátorra maximálisan 200 V feszültség adható. Számítsuk ki, hogy az adott kondenzátorhálózatra mekkora maximális feszültség kapcsolható.

Megoldás: Elsőként azt kell kitalálni, hogy miként jöhet ki a 3 μF eredő kapacitás egy 12 μF kapacitású és két 2 μF kapacitású kondenzátorból. Némi próbálgatás után belátható, hogy a két 2 μF-os egymással párhuzamosan, míg a 12 μF-os ezekkel sorba van kötve. Felhasználjuk, hogy Q töltés van mind a 12 μF-os kondenzátoron, mind az egymással párhuzamosan kapcsolt két 2 μF-os kondenzátoron összesen. Ha a 2 μF-os kondenzátorokra a maximális 200 V feszültséget kapcsolunk, akkor a 12 μF-os kondenzátoron 66,7 V feszültség esik. Így a kondenzátorrendszerre 266,7 V kapcsolható.

1.30. Feladat: (HN 27C-41) Töltsük fel a sorba kapcsolt a C_1 és C_2 kondenzátort. Ezután a két kondenzátort először a felöltő feszültségforrástól, majd egymástól elválasztva, ellentétes polaritással párhuzamosan kapcsoljuk. Mutassuk meg, hogy a párhuzamos kapcsolás következtében a kezdetben tárolt energia $(C_1 - C_2)^2/(C_1 + C_2)^2$ hányada "veszett" el.

Megoldás: X

2. Feladatok az elektromos áram tanából

Az elektromos áram

2.1. Feladat: (HN 28B-3) Egy 2 mm-es átmérőjű ezüst huzalon 2 óra 15 perc alatt 420 C töltés halad át.
(a) Atomonként egy vezetési elektront feltételezve, számítsuk ki a szabad töltések számát az ezüstben (l/m^3 egységekben);
(b) Mekkora a huzalban folyó áram erőssége?
(c) Számítsuk ki az elektronok átlagos vándorlási sebességét.

Megoldás: Adatok: $d = 2$ mm; $r = 1$ mm; $t = 2$ óra 15 perc = 8100 s; $Q = 420$ C. Táblázatból: sűrűsége $\varrho = 10500$ kg/m^3. Az ezüst atomtömege 108, azaz $M = 108$ g/mol; az Avogadro szám $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ 1/mol.
(a) A térfogategységben található ezüst atomok száma

$$n = \frac{\varrho}{M} N_A = 5,83 \cdot 10^{28}\, l/m^3, \tag{2.1.1}$$

amely megegyezik az elektronok számával.
(b) Az áramerősség

$$I = \frac{Q}{t} = 0,052\,\mathrm{A}. \tag{2.1.2}$$

(c) Az j áramsűrűség

$$j = \frac{I}{A} = nev, \tag{2.1.3}$$

ahol $A = r^2\pi$ a keresztmetszet, v a keresett vándorlási sebesség. Innen

$$v = \frac{I}{Ane} = 1,77 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s}. \tag{2.1.4}$$

2.2. Feladat: (HN 28B-4) Van de Graaf generátor mozgó szíja 30 cm széles és 20 m/s sebességgel halad. A szállított töltések a szíj egyik oldalán egyenletesen oszlanak el, a nagy potenciálú gömbre szállított töltések áramerőssége 0,15 μA. Számítsuk ki a szíj felületi töltéssűrűségét.

Megoldás: Adatok: $L = 30$ cm; $v = 20$ m/s; $I = 0,15$ μA.
A szíj Δt idő alatt

$$\Delta Q = \sigma L v \Delta t \tag{2.2.1}$$

töltést szállít. Az áram

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \sigma L v, \tag{2.2.2}$$

amelyből a felületi töltéssűrűség

$$\sigma = \frac{I}{\Delta L v} = 2,5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C/m^2}. \tag{2.2.3}$$

2.3. Feladat: (HN 28A-16) Egy 12 V-os autóakkumulátor kapacitása 120 Ah (itt a kapacitás azt jelenti, hogy az akkumulátor kezdeti töltése 120 amper·óra). Parkolás során két 80 W-os fényszóróizzó bekapcsolva marad. Számítsuk ki, hogy hány óra alatt csökken az akkumulátor töltése az eredetinek a felére azt feltételezve, hogy a kapocsfeszültség ezalatt nem változik.

Megoldás: Az izzók összteljesítménye $P = 160$ W. Az $U = 12$ V-os telepfeszültségen

$$I = \frac{P}{U} \tag{2.3.1}$$

áram folyik rajtuk keresztül. A $Q' = 60$ amper·óra töltést

$$t = \frac{Q'}{I} = \frac{Q'U}{P} = 4,5\,\text{óra} \tag{2.3.2}$$

alatt éri el.

2.4. Feladat: (HN 28C-45) Két vékony, koncentrikus gömbhéj vezető sugara a, ill. b ($a < b$). A köztük lévő teret σ fajlagos vezetőképességű anyag tölti ki. Számítsuk ki a két gömbhéj közötti ellenállást.

Megoldás: Tekintsünk egy r sugarú, dr falvastagságú gömbhéjat. Ennek ellenállása az

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{A} \tag{2.4.1}$$

összefüggés alapján

$$\mathrm{d}R = \frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}r}{4r^2\pi}. \tag{2.4.2}$$

A teljes ellenállás

$$R = \int_a^b \frac{1}{\sigma}\frac{\mathrm{d}r}{4r^2\pi} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = \frac{b-a}{4\pi\sigma ab}. \tag{2.4.3}$$

2.5. Feladat: (HN 28C-46) Az előző feladatban leírt két gömbhéj közé U feszültséget kapcsolunk úgy, hogy a belső g6mbhéjpotenciálja legyen nagyobb. Határozzuk meg, hogyan függ a J áramsűrűség a középponttól r távolságban a megadott paraméterektől.

Megoldás: Az áramerősség

$$I = \frac{U}{R} = \frac{4\pi\sigma abU}{b-a}. \tag{2.5.1}$$

Az áramsűrűség – figyelembe véve, hogy a gömbszimmetria miatt az áramsűrűség a r távolságban minden irányban ugyanannyi –

$$J = \frac{I}{A} = \frac{4\pi\sigma abU}{4r^2\pi(b-a)} = \frac{\sigma abU}{(b-a)}\frac{1}{r^2}. \tag{2.5.2}$$

RC-körök

2.6. Feladat: (HN 29A-34) Egy C kapacitású kondenzátort R ellenálláson keresztül sütünk ki. Mennyi idő alatt csökken a kondenzátor töltése a kezdeti érték $1/e^2$-ed részére?

Megoldás: A Kirchhoff-törvény szerint

$$0 = \frac{Q}{C} + RI = \frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \tag{2.6.1}$$

amely egyenletet átrendezve

$$\int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{\mathrm{d}Q}{Q} = \int_0^t -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t. \tag{2.6.2}$$

Ennek megoldása

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{2.6.3}$$

A kondenzátor töltése $1/e^2$-ed részére csökken, így

$$e^{-\frac{t}{RC}} = e^{-2}, \tag{2.6.4}$$

amelyből

$$t = 2RC. \tag{2.6.5}$$

2.7. Feladat: (HN 29A-36) Kondenzátor adott feszültséggel való feltöltésekor a töltés maximumhoz tart. Számítsuk ki, hogy a $\tau = RC$ időállandó hányszorosa az az időtartam, ami ahhoz szükséges, hogy a töltés 2 %-nyira megközelítse a maximumot?

Megoldás: A Kirchhoff-törvény szerint

$$\varepsilon = \frac{Q}{C} + RI = \frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \tag{2.7.1}$$

amelyből a változók szeparálásával a

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q - \varepsilon C} = -\frac{\mathrm{d}t}{RC} \tag{2.7.2}$$

egyenlet adódik. Az integrálást kijelölve

$$\int_0^{Q(t)} \frac{\mathrm{d}Q}{Q-\varepsilon C} = \int_0^t -\frac{\mathrm{d}t}{RC} \tag{2.7.3}$$

írható. Az integrálást elvégezve megkapjuk, hogy a

$$Q(t) = \varepsilon C(1-e^{-\frac{t}{RC}}) = Q_0(1-e^{-\frac{t}{RC}}) \tag{2.7.4}$$

függvénnyel változik a kondenzátor töltése, ahol $Q_0 = \varepsilon C$ a teljesen feltöltött kondenzátor töltése. A feladat szerint

$$0,98 = (1-e^{-\frac{t}{RC}}), \tag{2.7.5}$$

amelyből a kérdéses idő

$$t = -RC\ln 0,02 = 3,912RC. \tag{2.7.6}$$

2.8. Feladat: (HN 29A-37) Egy 10 μF-os kondenzátort R ellenálláson keresztül l0 V-os teleppel töltünk. A kondenzátor lemezei közötti potenciálkülönbség a töltés megkezdése után 3 másodperccel éri el a 4 V értéket. Számítsuk ki R nagyságát.

Megoldás: Adatok: $C = 10$ μF; $\varepsilon = 10$ V; $t = 3$ s; $U_C = 4$ V.
A Kirchhoff-törvény szerint

$$\varepsilon = \frac{Q}{C} + RI = \frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \tag{2.8.1}$$

amelyből a változók szeparálásával és az integrációs határok megadásával a

$$\int_0^{Q(t)} \frac{\mathrm{d}Q}{Q-\varepsilon C} = \int_0^t -\frac{\mathrm{d}t}{RC} \tag{2.8.2}$$

egyenlet adódik. Az integrálást elvégezve megkapjuk, hogy a

$$Q(t) = \varepsilon C(1-e^{-\frac{t}{RC}}) \tag{2.8.3}$$

függvénnyel változik a kondenzátor töltése. A kondenzátor feszültsége

$$U(t) = \varepsilon(1-e^{-\frac{t}{RC}}) = U_C. \tag{2.8.4}$$

A megadott adatokkal az R ellenállás értéke

$$R = 587\,\mathrm{k}\Omega. \tag{2.8.5}$$

2.9. Feladat: (HN 29B-42) Egy 3 μF-os kondenzátort 200 V feszültségre töltünk fel, majd elválasztjuk a töltőáramkörtől. A dielektrikum nem tökéletes szigetelő, ezért a két lemez közötti potenciálkülönbség 5 perc alatt 185 V-ra csökken. Számítsuk ki a dielektrikum ellenállását.

Megoldás: Adatok: $C = 3\mu$F; $U_0 = 200$ V; $t = 5$ perc $= 300$ s; $U = 185$ V.
Kezdetben a kondenzátoron lévő töltés: $Q_0 = CU_0$. A Kirchhoff-törvény szerint

$$0 = \frac{Q}{C} + RI = \frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}, \tag{2.9.1}$$

amely egyenletet szeparálva és az integrációs határokat megadva kapjuk:

$$\int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{\mathrm{d}Q}{Q} = \int_0^t -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t. \tag{2.9.2}$$

Ebből a kondenzátoron lévő töltés időfüggése

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \tag{2.9.3}$$

a rajta lévő feszültség

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = U. \tag{2.9.4}$$

Innen a dielektrikum ellenállása

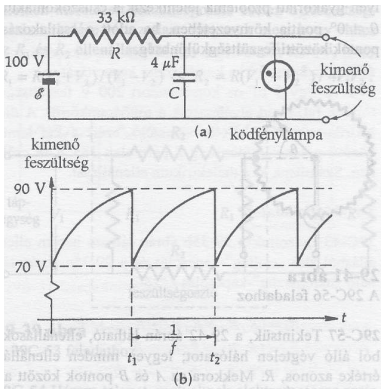
$$R = -\frac{t}{C\ln\frac{U}{U_0}} = 1,28 \cdot 10^9\,\Omega. \tag{2.9.5}$$

2.10. Feladat: (HN 29C-63) A 10 ábrán egyszerű fűrészfog-jelgenerátor kapcsolási rajza látható. A neon izzólámpa ellenállása nagyon kicsi, ha a rákapcsolt feszültség eléri a 90 V-os küszöböt, de amikor a feszültség 70 V alá esik, akkor az izzó gyakorlatilag már nem vezeti az áramot. Számítsuk ki az oszcillátor f frekvenciáját.

Megoldás: X

3. Feladatok a mágneses erőtér témaköréből

Elektromosan töltött részecskék mozgása mágneses erőtérben



10. ábra.

3.1. Feladat: (HN 30B-3) Egy elektron mágneses térben $3 \cdot 10^6$ m/s sebességgel halad az x tengely mentén pozitív x irányban. Számítsuk ki az elektronra ható erőt, ha a mágneses fluxussűrűséget tesla egységekben a $\mathbf{B} = 0,4\mathbf{i} + 0,7\mathbf{j} + 0,32\mathbf{k}$ összefüggés adja meg.

Megoldás: Adatok: $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i}$, ahol $v_x = 3 \cdot 10^6$ m/s; $B_x = 0,4$ Vs/m^2; $B_y = 0,7$ Vs/m^2; $B_z = 0,3$ Vs/m^2; $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C.
A elektronra ható Lorentz-erő:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = e \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -ev_xB_z\mathbf{j} + ev_xB_y\mathbf{k} = 1,44 \cdot 10^{-13}\mathbf{j} - 3,36 \cdot 10^{-13}\mathbf{k}\ \text{N}. \tag{3.1.1}$$

3.2. Feladat: (HN 30A-5) Egy proton 0,5T fluxussűrűségű (mágneses erőtérben 1,00 cm sugarú körpályán mozog. Mekkora a kinetikus energiája (eV egységekben kifejezve)?

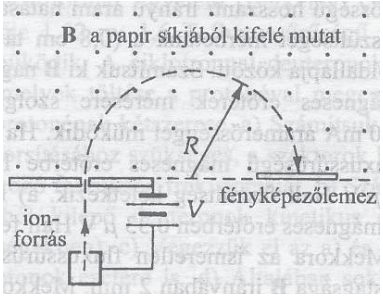
Megoldás: Adatok: $B = 0,5$ T; $r = 1,00$ cm; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.
A körpályán való mozgást az

$$m\frac{v^2}{r} = evB \tag{3.2.1}$$

mozgásegyenlettel írhatjuk le. A kinetikus energia kifejezését és az előző egyenletet használva

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{r^2e^2B^2}{m} = 1,92 \cdot 10^{-16}\,\text{J} = 1200\,\text{eV}. \tag{3.2.2}$$

3.3. Feladat: (HN 30B-10) A 11 ábrán bemutatott tömegspektrométerben egyszeresen ionizált, 6 és 7 atomtömegű ($6 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$,illetve $7 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg lítium ionokat 900V feszültség gyorsít, mielőtt belépnek a $B = 0,04$ T fluxussűrűségű homogén mágneses térbe. Itt egy félkört



11. ábra.

megtéve fényképezőlemezbe csapódnak, és egymástól x távolságra lévő két foltot idéznek elő. Mekkora ez az x távolság?

Megoldás: X

3.4. Feladat: (HN 30A-13) Egy sebességszűrőben (az elektronokat sebességük szerint szétválasztó eszközben) $1,4 \cdot 10^4$ V/m elektromos és erre merőleges l8 mT fluxussűrűségű mágneses erőteret alkalmaznak. Számítsuk ki a szűrőn áthaladó elektronok sebességét.

Megoldás: Adatok: $E = 1,4 \cdot 10^4$ V/m; $B = 18$ mT. A elektronok mind az E mind a B térre merőlegesen haladnak. Akkor az adott térrészen tudnak átjutni, ha az

$$eE = evB \tag{3.4.1}$$

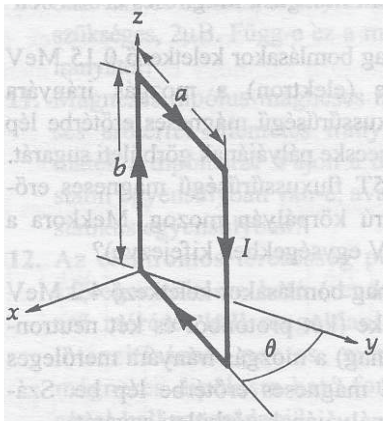
összefüggés fenn áll. Ebből a kérdéses sebesség

$$v = \frac{E}{B} = 7,78 \cdot 10^5 \text{ m/s}. \tag{3.4.2}$$

Áramvezetőre ható erő mágneses erőtérben

3.5. Feladat: (HN 30B-21) Téglalap alakú áramvezető hurok mágneses erőtérben a 12 ábrán vázolt módon helyezkedik el. A $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i}$ ($B_x = 0,15$ Vs/m^2) fluxussűrűségű (tesla egységben megadott nagyságú) mágneses erőtér a hurokra forgatónyomatékot gyakorol. Mekkora a forgatónyomaték, ha $a = 8$ cm, $b = 12$ cm, $\theta = 30^0$ és $I = 2$ A?

Megoldás: A mágneses dipólmomentum irányát a jobb kéz szabállyal lehet eldönteni, jelen eset-



12. ábra.

ben a keret síkjára merőlegesen a felület $\mathbf{n} = (-\cos\theta, \sin\theta, 0) = -\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ normál vektorának irányába mutat. Így a dipólmomentum vektor

$$\mu = Iab\mathbf{n} = Iab(-\cos\theta, \sin\theta, 0) = Iab(-\cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j} + 0\mathbf{k}). \tag{3.5.1}$$

A keretre ható forgatónyomaték

$$\mathbf{M} = \mu \times \mathbf{B} = Iab \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ B_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -IabB_x \sin\theta\mathbf{k} = -1,44 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Nm}. \tag{3.5.2}$$

3.6. Feladat: (HN 30C-34) A q/m töltés/tömeg hányadossal jellemezhető részecske $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$ sebességgel halad át a derékszögű koordinátarendszer köz6ppontján. A részecskét homogén mágneses erőtér téríti el annyira, hogy áthaladjon az $\mathbf{r} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ ponton.

(a) Határozzuk meg a $\mathbf{B}$ mágneses indukcióvektor irányát.

(b) Fejezzük ki b-t a, q, m, B és v függvényeként.

Megoldás: X

3.7. Feladat: (HN 30C-45) Egyenletes keresztmetszetű korongot, melynek tömege m, és melyen q töltés egyenletesen oszlik el, tengelye körül forgatunk. Mutassuk meg, hogy a forgó töltött korong μ mágneses momentuma és $\mathbf{L}$ impulzusmomentuma között a $\mu = (q/(2m))\mathbf{L}$ összefüggés teremt kapcsolatot.

Megoldás: A forgó korong impulzusmomentuma

$$\mathbf{L} = \theta\omega = \frac{1}{2}mR^2\omega, \tag{3.7.1}$$

ahol θ a korong tehetetlenségi nyomatéka, ω a szögsebesség és R a korong sugara.
A korong felületi töltéssűrűségét σ-val jelölve az összes töltés

$$q = \sigma R^2 \pi. \tag{3.7.2}$$

Az r sugarú, dr szélességű körgyűrűn

$$dq = \sigma 2 r \pi \mathrm{d}r \tag{3.7.3}$$

töltés van, amely $T = 2\pi/\omega$ idő alatt körbefut, s így

$$dI = \sigma r \mathrm{d}r \omega \tag{3.7.4}$$

áramot jelent. Mivel a körgyűrű által határolt felület $r^2\pi$, így gyűrű

$$\mathrm{d}r\mu = \sigma r^3 \pi \mathrm{d}r \omega \tag{3.7.5}$$

mágneses dipólmomentumot jelent. A teljes felületre összeadva:

$$\mu = \int_0^R \sigma r^3 \pi \mathrm{d}r \omega = \frac{1}{4}\sigma R^4 \pi \omega = \frac{1}{4} q R^2 \omega \tag{3.7.6}$$

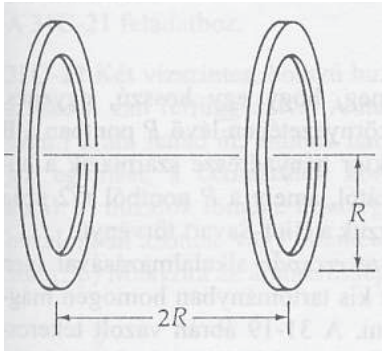
a mágneses dipólmomentum. Az impulzusmomentum és a dipólmomentum kifejezését összevetve az állítás

$$\mu = \frac{q}{2m}\mathbf{L} \tag{3.7.7}$$

adódik.

3.8. Feladat: (HN 30C-46) Köralakú áramvezető hurokra adott mágneses erőtérben maximálisan M_0 forgatónyomaték hat. Alakítsuk át a hurkot úgy, hogy kisebb, de kétmenetű legyen. Mekkora a maximális forgatónyomaték ezen a kisebb hurkon?

Megoldás: Ha az eredeti kör sugara R, akkor a két egyforma kör sugara $R/2$ kell legyen, mert a kerületek hossza egyenlő. A forgatónyomaték a keret felületével — $R^2\pi$ — arányos. A második esetben a két kör együttes felülete számít, azaz $2 \cdot (R/2)^2\pi$, ami fele a nagy körének. Így a maximális forgatónyomaték is, azaz $M_0/2$.



13. ábra.

Biot-Savart törvény

3.9. Feladat: (HN 31B-3) Két N menetű, R sugarú tekercs egymástól $2R$ távolságra helyezkedik el, ahogy a 13 ábra mutatja. Számítsuk ki a mágneses fluxussűrűséget a tekercsek tengelyén, tőlük egyenlő távolságban lévő pontban. Tételezzük fel, hogy a tekercsek sorba vannak kötve és az áramirány mindkét tekercsben azonos.

Megoldás: X

3.10. Feladat: (HN 31A-4) Számítsuk ki két hosszú, párhuzamos, vékony, egymástól 5 cm távolságban lévő huzal egységnyi hosszúságú szakaszai között ható erőt. Az egyik huzalon 10 A erősségű áram folyik, a másikon is ugyanekkora, de ellentétes irányú. Taszító vagy vonzó erő hat a két huzal között?

Megoldás: Adatok: $r = 5$ cm; $I = 10$ A. Az egyik vezető által a másik helyén keltett mágneses teret az Ampère-törvény szerint számolhatjuk ki

$$\oint \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{s} = \mu_0 \sum_i I_i, \tag{3.10.1}$$

$$B2r\pi = \mu_0 I, \tag{3.10.2}$$

azaz

$$B = \mu_0 \frac{I}{2r\pi}. \tag{3.10.3}$$

A vezetőben mozgó töltött részecskékre Lorentz-erő hat, amely L hossznyi vezetőt tekintve

$$F = ILB, \tag{3.10.4}$$

hosszegységenként

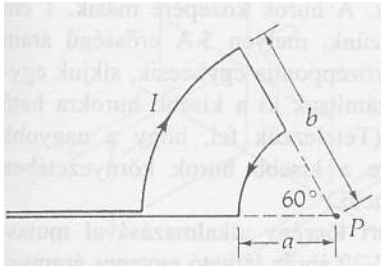
$$f = IB. \tag{3.10.5}$$

A B mágneses indukciót behelyettesítve

$$f = \mu_0 \frac{I^2}{2r\pi} = 4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N/m} \tag{3.10.6}$$

hosszegységenkénti taszító erő hat.

3.11. Feladat: (HN 31B-8) Számítsuk ki a mágneses indukcióvektort a 14 ábrán látható körívekből és sugárirányú egyenesszakaszokból álló hurok köríveinek P középpontjában.



14. ábra.

Megoldás: A radiális vezetőszakaszoknak nincs járuléka a P pontban, így csak a két ívet kell tekintsük. Az r központi sugarú ív ds elemi hosszától származó járulék

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}s}{r^2}. \tag{3.11.1}$$

Ugyanakkor ds ívhossz kifejezhető a θ központi szöggel

$$\mathrm{d}s = r\mathrm{d}\theta. \tag{3.11.2}$$

A teljes B teret a szög szerinti integrálással kapjuk:

$$B = \int_0^{60^0=\pi/3} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ir\mathrm{d}\theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{12}\frac{I}{r}. \tag{3.11.3}$$

A b sugarú ívtől

$$B_b = \frac{\mu_0}{12}\frac{I}{b} \tag{3.11.4}$$

a lap síkjára merőlegesen befelé, míg az a sugarú ívtől

$$B_a = \frac{\mu_0}{12}\frac{I}{a} \tag{3.11.5}$$

a lap síkjára merőlegesen kifelé mutató tér alakul ki. Az eredő

$$B = B_b - B_a = \frac{\mu_0}{12}\frac{I}{b} - \frac{\mu_0}{12}\frac{I}{a} = \frac{\mu_0 I}{12}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right). \tag{3.11.6}$$

Mivel $a < b$, így ennek eredménye negatív, azaz kifelé mutat.

3.12. Feladat: (HN 31A-13) Egy 50 cm hosszú, 2 cm átmérőjű szolenoid belsejében B = 0,07 T mágneses indukcióvektort kívánunk előállítani.
(a) Mekkora a teljes mágneses fluxus a szolenoid belsejében, a tengelyre merőleges felületen?
(b) Számítsuk ki, hány menetű legyen a tekercs, ha 5 A erősségű áramot alkalmazunk?

Megoldás: Adatok: $L = 50$ cm; $d = 2$ mm; a sugár $r = 1$ mm; $B = 0,07$ T.

(a) A tekercsbeli mágneses fluxus

$$\Phi_B = BA = Br^2\pi = 2,2 \cdot 10^{-7}\,\text{Vs}. \tag{3.12.1}$$

(b) Az Ampère-törvény szerint

$$\oint \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{s} = \mu_0 \sum_i I_i, \tag{3.12.2}$$

azaz

$$BL = \mu_0 N I \tag{3.12.3}$$

ahol N a menetszám. Így a tekercsbeli mágneses indukció

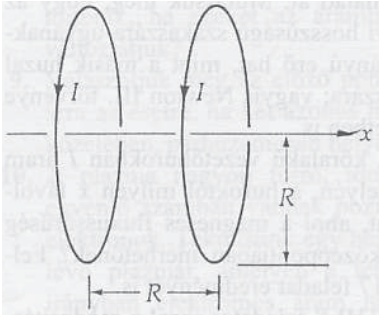
$$B = \mu_0 \frac{IN}{L}, \tag{3.12.4}$$

ahonnan az N menetszám

$$N = \frac{LB}{\mu_0 I} = 5570. \tag{3.12.5}$$

3.13. Feladat: (HN 31C-19) A Helmholtz tekercspár alkalmazásával igen egyszerű módon lehet kis tartományban homogén mágneses erőteret létesíteni. A 15 ábrán vázolt tekercspár két lapos, köralakú tekercsből áll, melyek távolsága egyenlő a tekercsek sugarával; a két tekercsben az áramirány megegyezik. Mutassuk meg, hogy az x tengelyen a két tekercs között a távolság felében a mágneses erőtér olyan, hogy a dB/dx és a d^2B/dx^2 is zérus.

Megoldás: X

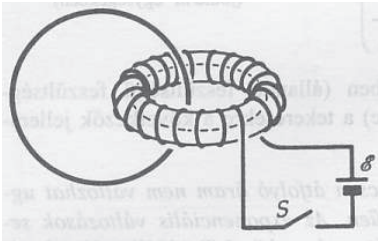


15. ábra.

4. Feladatok a mágneses indukció témaköréből

Faraday-törvény

4.1. Feladat: (HN 32B-1) Egy toroid tekercsen gyűrű van átfűzve (16. ábra). Az S kapcsoló zárásakor a toroidon áram kezd folyni.
(a) Számítsuk ki a gyűrűben indukált feszültséget,ha a toroidon belül a mágneses fluxus 30 Tm^2/s sebességgel változik.
(b) Az ideális toroid mágneses erőtere gyakorlatilag teljesen a tórusz belsejébe van lokalizálva, azaz a karikát a mágneses erőtér nem éri. Honnan származik akkor az indukált áram?



16. ábra.

Megoldás: Jelölés: $\Delta\Phi/\Delta t = 30\ Tm^2/s$.

(a) A mágneses fluxus ($\Phi = \oint \mathbf{B}d\mathbf{A}$) idő szerinti változása hozza létre a gyűrűben az indukált feszültséget

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -30\,\mathrm{V}. \tag{4.1.1}$$

(b) A **B** mágneses indukció változásakor **E** elektromos tér jön létre

$$-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta \oint \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{A}}{\Delta t} = \oint \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{s} = \varepsilon, \tag{4.1.2}$$

és ez a tér mozdítja el a töltéseket. Innen származik az indukált áram.

4.2. Feladat: (HN 32B-7) Egy 30 menetes lapos huzaltekercset hosszú, 4000 menet/m menetsűrűségű szolenoid végéhez illesztünk. A szolenoid és a huzaltekercs tengelye, és sugara azonos $R = 5$ cm. Számítsuk ki, mekkora a szolenoidban az áramerősség változása, ha a huzaltekercsben 2 mV-os feszültség indukálódik.

Megoldás: Adatok: $N_1 = 30$ menet; $N_2/l = 4000$ menet/m; $\varepsilon = 2$ mV.
A szolenoidban I áramerősség hatására

$$B = \mu_0 \frac{IN_2}{l} \tag{4.2.1}$$

mágneses indukció jön létre. Ez a huzaltekercs számára

$$\Phi = N_1 B R^2 \pi = \mu_0 \frac{IN_1N_2R^2\pi}{l} \tag{4.2.2}$$

fluxust jelent. Az indukált feszültség nagysága

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \mu_0 \frac{N_1N_2R^2\pi}{l}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \tag{4.2.3}$$

amelyből az áramerősség időbeli változása

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{l\varepsilon}{\mu_0 N_1 N_2 R^2 \pi} = 1,69\,\mathrm{A/s}. \tag{4.2.4}$$

4.3. Feladat: (HN 32A-8) Egy 400 menetes tekercsben l2 A/s áramerősség változás hatására 28 mV-os ellenfeszültség indukálódik. Mekkora a tekercs induktivitása?

Megoldás: Adatok: $N = 100$; $\Delta I/\Delta t = 12$ A/s; $\varepsilon = 28$ mV.
Az indukált feszültség nagysága

$$\varepsilon = L\frac{\Delta I}{\Delta t}, \tag{4.3.1}$$

ahonnan az L induktivitás

$$L = \varepsilon \frac{\Delta t}{\Delta I} = 2,33 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{H}. \tag{4.3.2}$$

4.4. Feladat: (HN 32A-15) Egy A keresztmetszetű és l kerületű toroid két külön tekercsből áll: mindkettőt a tórusz teljes kerülete mentén egyenletesen csévélték fel; menetszámuk N_1 és N_2,
(a) Mekkora az (önállóan használt) tekercsek L_1 és L_2 induktivitása?
(b) Mekkora a két tekercs M kölcsönös induktivitása?
(c) Mutassuk meg, hogy $M^2 = L_1 L_2$. (Ez az egyenlet csak akkor teljesül, ha bármelyik tekercs teljes fluxusa egyúttal benne van a másik tekercs belsejében is.)

Megoldás:
(a) Az L_1 és L_2 önindukciós együtthatók kiszámolása esetén hasonlóan járunk el. A mágneses indukciót az Ampère-törvény ($\oint \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{s} = \mu_0 \sum_i I_i$) segítségével határozzuk meg

$$B = \mu_0 \frac{IN}{l}. \tag{4.4.1}$$

A fluxus

$$\Phi = NBA = \mu_0 \frac{IN^2 A}{l}, \tag{4.4.2}$$

amelynek időbeli változása adja az indukált feszültséget

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \mu_0 \frac{N^2 A}{l} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{4.4.3}$$

Innen az L öndukciós együttható innen

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{l}. \tag{4.4.4}$$

Ezért L_1 és L_2

$$L_1 = \mu_0 \frac{N_1^2 A}{l}, \tag{4.4.5}$$

$$L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2 A}{l}. \tag{4.4.6}$$

(b) Az M kölcsönös indukciós együttható kiszámolása esetén az N_1 beli fluxusváltozás feszültséget indukál az N_2 tekercsben és *vice versa*. A mágneses indukció

$$B = \mu_0 \frac{IN_1}{l}. \tag{4.4.7}$$

A fluxus

$$\Phi = N_2 BA = \mu_0 \frac{IN_1 N_2 A}{l}, \tag{4.4.8}$$

amelynek időbeli változása adja az indukált feszültséget

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}. \tag{4.4.9}$$

Innen az L öndukciós együttható innen

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l}. \tag{4.4.10}$$

(c) Ezt követően könnyen belátható, hogy az $M^2 = L_1 L_2$ kapcsolat fenn áll.

4.5. Feladat: (HN 32B-17) Egy l hosszúságú, A keresztmetszetű, N_1 menetszámú hosszú szolenoid közepére szorosan és elektromosan szigetelve egy másik, N_2 menetszámú tekercset csévélnek. Számítsuk ki a szolenoid és a tekercs kölcsönös induktivitását, elhanyagolva a tekercsvégek hatását.

Megoldás: Az N_1 menetszámú tekercsben I áramerősség hatására

$$B = \mu_0 \frac{I N_1}{l} \tag{4.5.1}$$

mágneses indukció jön létre. Ez az N_2 menetszámú huzaltekercs számára

$$\Phi = N_2 B A = \mu_0 \frac{I N_1 N_2 A}{l} \tag{4.5.2}$$

fluxust jelent. Az indukált feszültség nagysága

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}, \tag{4.5.3}$$

ahonnan a kölcsönös indukciós együttható

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2 A}{l}. \tag{4.5.4}$$

4.6. Feladat: (HN 32B-18) Egy áramkör a sorba kötött, $\varepsilon = 10$ V-os feszültségforrásból, az S kapcsolóból, az $R = 50\ \Omega$ ellenállásból és az $L = 5$ H induktivitású tekercsből áll. Számítsuk ki azt az időtartamot, ami ahhoz szükséges, hogy az áramerősség elérje a stacionárius állapotnak megfelelő értekének

(a) felét, illetve

(b) a 90 %-át.

Megoldás: A hurokra felírható, hogy

$$\varepsilon = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI, \tag{4.6.1}$$

ahol $I(t)$ az áramkörben folyó áram. Az egyenletet szeparálva és az integrálási határokat kijelölve írhatjuk, hogy

$$\int_0^{I(t)} \frac{\mathrm{d}I}{I - \frac{\varepsilon}{R}} = -\int_0^t \frac{R}{L}\mathrm{d}t. \tag{4.6.2}$$

Az integrálást végrehajtva és az eredményt átrendezve az időfüggő áramerősség

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \tag{4.6.3}$$

Az adatok felhasználásával a megválaszolandó időtartamok:

(a) $t = 0,069$ s és

(b) $t = 0,23$ s.

4.7. Feladat: (HN 32A-23) Számítsuk ki a 3800 menet/m menetsűrűségű,hosszú szolenoid középen a mágneses tér energiasűrűségét, ha a szolenoidon áthaladó áram erőssége 4 A. Függ-e az energiasűrűség a menetek sugarától?

Megoldás: Adatok: $N/l = 3800$ menet/m; $I = 4A$.
A mágneses indukció nagysága

$$B = \mu_0 \frac{IN}{l}, \tag{4.7.1}$$

amellyel a mágneses energiasűrűség

$$\varepsilon_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I^2 N^2}{l^2} = 145,2\,\mathrm{J/m^3}. \tag{4.7.2}$$

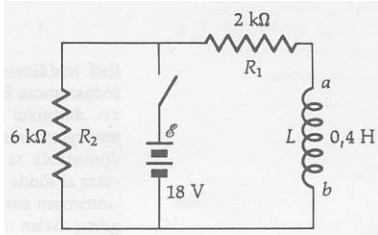
4.8. Feladat: (HN 32C-40) A 17. ábra áramkörében lévő kapcsolót zárjuk és megvárjuk, amíg az áramerősségek állandósulnak. Ezután a kapcsolót nyitjuk; ennek pillanata legyen $t = 0$.

(a) Számítsuk ki az L tekercsben indukálódó ε_0 feszültséget közvetlenül a kapcsoló nyitása után. A tekercs melyik vége pozitívabb potenciálú, a vagy b?

(b) Vázoljuk fel az R_1 és R_2 ellenállásokon átfolyó áram időtől való függését a $t < 0$ és $t > 0$ időtartományban (a stacionárius áramerősségeket válasszuk pozitív előjelűeknek).

(c) A kapcsoló nyílása után mennyi idő elteltével csökken az R_2 ellenálláson átfolyó áram erőssége 2 mA-re?

Megoldás: X



17. ábra.

4.9. Feladat: (HN 32C-45) Egy R sugarú hengeres vezetőn I_0 erősségű áram halad át; az áramsűrűség a vezető keresztmetszetén egyenletes. Határozzuk meg a vezető belsejében egységnyi hosszúságú szakaszra jutó mágneses energia nagyságát. (Útmutatás: mekkora a mágneses energia egy l hosszúságú, r ($r < R$) sugarú dr vastagságú hengerpalástban (csőben)?

Megoldás: Jelölje j_0 a keresztmetszeten egyenletes áramsűrűséget. Ekkor az $R^2\pi$ teljes felületen folyó I áramerősség

$$I_0 = j_0 R^2 \pi, \tag{4.9.1}$$

míg az $r < R$ sugárhoz tartozó $r^2\pi$ felületen

$$I(r) = j_0 r^2 \pi. \tag{4.9.2}$$

Ezekből

$$I(r) = I_0 \frac{r^2}{R^2}. \tag{4.9.3}$$

Az Ampère-törvény szerint

$$B(r) 2r\pi = \mu_0 I(r), \tag{4.9.4}$$

azaz

$$B(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2r\pi} = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi R^2}. \tag{4.9.5}$$

A mágneses energiasűrűség

$$\varepsilon_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{\mu_0 I_0^2 r^2}{8\pi^2 R^4}. \tag{4.9.6}$$

4.10. Feladat: (HN 32C-46) Oldjuk meg az előző feladatot azzal a változtatással, hogy a J áramsűrűség a henger sugara mentén lineárisan változik, azaz $J(r) = J_0 r$.

(a) Fejezzük ki a teljes I_0 áramot J_0 és R függvényeként.

(b) Adjuk meg a vezető belsejében hosszegységenként tárolt mágneses energia nagyságát.

Megoldás:

(a) A henger keresztmetszetén a felületelem $\mathrm{d}A = 2r\pi\mathrm{d}r$, amellyel r sugárhoz tartozó áram

$$I(r) = \int_0^r J(r)\mathrm{d}A = \int_0^r J_0 r 2r\pi\mathrm{d}r = 2\pi J_0 \int_0^r r^2\mathrm{d}r = \frac{2\pi J_0}{3}r^3. \tag{4.10.1}$$

A teljes keresztmetszeten folyó áram

$$I_0 = I(R) = \frac{2\pi J_0}{3}R^3. \tag{4.10.2}$$

(b) Az Ampère-törvény szerint

$$B(r)2r\pi = \mu_0 I(r), \tag{4.10.3}$$

azaz

$$B(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2r\pi} = \frac{\mu_0 j_0}{3}r^2. \tag{4.10.4}$$

A mágneses energiasűrűség

$$\varepsilon_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{\mu_0 j_0^2}{18}r^4. \tag{4.10.5}$$

A hosszegységenkénti energia a következő felületi integrál kiszámolását jelenti:

$$E_h = \int \varepsilon_B \mathrm{d}A = \int_0^R \varepsilon_B 2r\pi\mathrm{d}r = \int_0^R \frac{\mu_0 j_0^2}{18}r^4 2r\pi\mathrm{d}r = \int_0^R \frac{\mu_0 j_0^2\pi}{9}r^5 = \frac{1}{54}\mu_0 j_0^2\pi R^6. \tag{4.10.6}$$

4.11. Feladat: (HN 33C-9) Hosszú, vasmagos szolenoid sugara 1,25 cm; menetsűrűsége 1200 menet/m. Erre a tekercsre szorosan egy másik, 40 menetű tekercset is csévélünk, amelynek teljes ellenállása 5 Ω. Az utóbbi tekercs két kivezetését rövidre zárjuk. A szolenoidon 50 mA erősségű áramot indítunk, aminek következtében a vas mágnesesen teljesen telítődik. A második tekercsben a mágneses indukció változása következtében áram indukálódik. Számítsuk ki e tekercs valamely pontján áthaladó töltés mennyiségét.

Megoldás: Adatok: $r = 1,25$ cm; $N_1/l = 1200$ menet/m; $N_2 = 40$ menet; $R = 5\Omega$; $I = 50$ mA. A vas relatív mágneses permeabilitása $\mu_r = 5000$.

A lemágnesezéshez használt tér

$$B = \mu_0\mu_r\frac{IN_1}{l}, \tag{4.11.1}$$

amely a másik tekercsben

$$\Delta\Phi = N_2\mu_0\mu_r\frac{IN_1}{l}r^2\pi \tag{4.11.2}$$

fluxusváltozást jelent. Az indukált feszültség nagysága

$$\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \tag{4.11.3}$$

Ez az R ellenálláson

$$I' = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\Delta\Phi}{R\Delta t} \tag{4.11.4}$$

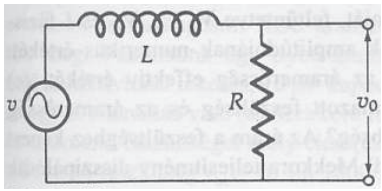
áramot jelent, amely a Δt idő alatt

$$Q = I'\Delta t = \frac{\varepsilon}{R}\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{R} = N_2\mu_0\mu_r\frac{IN_1}{lR}r^2\pi = 1,48\cdot 10^{-3}\,\mathrm{C}. \tag{4.11.5}$$

töltés átáramlását jelenti.

Váltakozó áramú áramkörök

4.12. Feladat: (HN 34B-11) Tekintsünk egy fázistoló áramkört (18. ábra). A bemenetre adott feszültség $V(t) = V_{be}sin\omega t$ ($V_{be} = 10$ V; $\omega = 200$ 1/s). Ha $L = 500$ mH,
(a) számítsuk ki R értékét, hogy a kimeneten megjelenő V_0 feszültség 30^0-nyit késsen V-hoz képest és
(b) számítsuk ki a V_0 amplitúdóját.

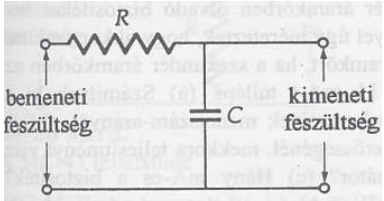


18. ábra.

Megoldás: X

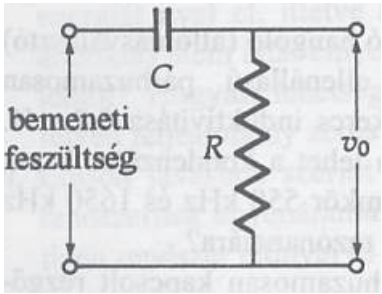
4.13. Feladat: (HN 34B-12) A 19. ábrán látható áramkört aluláteresztő szűrőnek nevezik. A kondenzátor impedanciája nagyobb frekvenciákon kisebb, így a kimenő feszültség is kisebb. A szűrő karakterisztikus vagy ún. levágási frekvenciájánál a kimenő feszültség a bemenő feszültség $1/\sqrt{2}$-szerese.
(a) Fejezzük ki a levágási frekvenciát R és C függvényeként.
(b) Mekkora ezen a frekvencián a kimenő és bemenő feszültség közötti fáziskülönbség?

Megoldás: X



19. ábra.

4.14. Feladat: (HN 34B-29) A 20. ábrán látható áramkört felüláteresztő szűrőként lehet használni. Elegendően nagy frekvenciákon, ha a bemenetre V_{eff} effektív értékű feszültséget kapcsolunk, az ellenálláson V_{eff}^2/R teljesítmény disszipálódik. Milyen frekvencián disszipálódik e teljesítmény fele?



20. ábra.

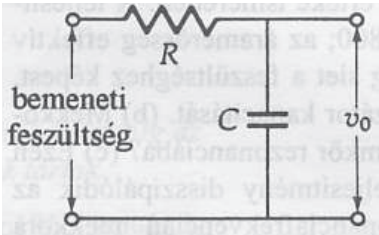
Megoldás: X

4.15. Feladat: (HN 34C-49) Tekintsük a 21. ábrán látható áramkört. A bemenő feszültség időben (nem szükségszerűen szinuszosan) változik. Mutassuk meg, hogy a V_0 kimenő feszültség közelítőleg arányos a V bemenő feszültség idő szerinti integráljával, ha a kapacitív reaktancia az R ellenállásnál sokkal kisebb (mindazon frekvenciák esetében, amelyek a bemenő jelben jelen vannak.

Megoldás: X

5. Feladatok az elektromágneses hullámok témaköréből

Az eltolódási áram



21. ábra.

5.1. Feladat: (HN 35B-2) Síkkondenzátor lemezei l0 cm átmérőjűek és 1 mm-es távolságban vannak egymástól. Mekkora a mágneses indukcióvektor nagysága a kondenzátor szélénél, ha a kondenzátor lemezei közötti potenciálkülönbség 1000 V/s sebességgel nő? (Az elektromos erőtér inhomogenitását a lemezek szélénél el lehet hanyagolni.)

Megoldás: Jelölések: $D = 2r = 10$ cm, r a lemezek sugara; $d = 1$ mm; $\Delta U/\Delta t = 1000$ V/s.
Az elektromos térerősség változása

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{d}\frac{\Delta U}{\Delta t}. \tag{5.1.1}$$

Az gyik Maxwell-egyenlet értelmében a változó elektromos tér mágneses teret kelt, azaz

$$\oint B\mathrm{d}s = \mu_0\varepsilon_0\frac{\Delta E}{\Delta t}r^2\pi. \tag{5.1.2}$$

Ebből következik, hogy

$$B2r\pi = \mu_0\varepsilon_0\frac{1}{d}\frac{\Delta U}{\Delta t}r^2\pi, \tag{5.1.3}$$

amelyből a mágneses indukció

$$B = \frac{\mu_0\varepsilon_0 r}{2d}\frac{\Delta U}{\Delta t} = 2,78\cdot 10^{-13}\,\mathrm{Vs/m^2}. \tag{5.1.4}$$

5.2. Feladat: (HN 35B-4) Egy 0,5 μF-os síkkondenzátort 100 Ω-os ellenálláson keresztül 9 V-os telepről töltünk. Számítsuk ki a kondenzátoron folyó eltolódási áramot a töltés megkezdése után 50 μs eltelte után.

Megoldás: Jelölések: $C = 0,5$ μF; $R = 100$ Ω; $\varepsilon = 9$ V; $t = 50$ μs.
Az eltolódási áram

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}, \tag{5.2.1}$$

ahonnan a kérdezett időpontban

$$I = 0,0332\,\mathrm{A}. \tag{5.2.2}$$

Elektromágneses hullámok

5.3. Feladat: (HN 35A-8) Az elektromágneses hullám mágneses indukcióvektorának az amplitúdója vákuumban $3 \cdot 10^{-8}$ T.
(a) Számítsuk ki a megfelelő elektromos térerősség amplitúdóját.
(b) Ha az elektromos térerősség -y irányú és a hullám -x irányban terjed, milyen irányú a mágneses indukcióvektor?

Megoldás:
(a) Ha a mágneses indukcióvektor amplitúdója $B_0 = 3 \cdot 10^{-8}$ T, akkor az elektromos térerősség amplitúdója

$$E_0 = B_0 c = 9\,\mathrm{V/m}. \tag{5.3.1}$$

(b) A mágneses indukcióvektor +z irányú.

5.4. Feladat: (HN 35A-13) Az URH rádió által vett elektromágneses hullám elektromos térerősség-komponensének amplitúdója $5 \cdot 10^{-5}$ V/m.
(a) Mekkora az ehhez tartozó mágneses indukcióvektor amplitúdója?
(b) Számítsuk ki a hullám intenzitását.

Megoldás: Jelölés: $E_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ V/m
(a) A mágneses indukció amplitúdója

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 1,67 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{Vs/m^2}. \tag{5.4.1}$$

(b) A hullám intenzitása

$$I = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = 3,32 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}. \tag{5.4.2}$$

5.5. Feladat: (HN 35B-15) Egy +x irányban terjedő elektromágneses síkhullám elektromos térerősség-komponensét SI egységekben az $\mathbf{E} = 6\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right] \sin(kx - 10^{16}\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right] t)\mathbf{j}$ függvény írja le.
(a) Írjuk fel a mágneses indukcióvektor jellemző képletét is.
(b) Számítsuk ki a sugárzás hullámhosszát.
(c) Számítsuk ki a sugárzás átlagos energiasűrűségét.

Megoldás: Jelölés: $E_0 = 6$ V/m, $\omega = 10^{16}$ 1/s.
(a) A mágneses indukcióvektor

$$\mathbf{B} = 2 \cdot 10^{-8} \left[\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}\right] \sin\left(kx - 10^{16} \left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right] t\right)\mathbf{k}. \tag{5.5.1}$$

(b) A terjedési sebesség $c = \omega/k$, ahonnan a k (cirkuláris) hullámszám

$$k = \frac{\omega}{c}, \tag{5.5.2}$$

amellyel a hullámhossz

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = 1,88 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}. \tag{5.5.3}$$

(c) A sugárzás energiasűrűsége

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 = 1,59 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J/m^3}. \tag{5.5.4}$$

5.6. Feladat: (HN 35A-22) Egy 100 mW-os lézernyaláb egy tükörről merőlegesen visszaverődik. Mekkora erő hat a tükörre?

Megoldás: Jelölés: $P_{teljes} = 100$ mW.
A sugárzás U energiája és p impulzusa között összefüggés:

$$U = pc. \tag{5.6.1}$$

Az t időegységgel osztva a P_{teljes} teljesítmény és az F erő között a

$$P_{teljes} = Fc \tag{5.6.2}$$

kapcsolat áll fenn. Mivel tökéletes visszaverődésről van szó, így az impulzus változás és – ennek megfelelően – az erőhatás kétszeres lesz, azaz

$$F = \frac{2P_{teljes}}{c} = 6,66 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{N}. \tag{5.6.3}$$

5.7. Feladat: (HN 35A-23) Tiszta időben a Föld felszínen a napfény intenzitása 840 W/m^2. Ha egy, a napsugarakra merőleges felület tökéletesen reflektál, mekkora rajta a sugárnyomás?

Megoldás: Tökéletes reflexió esetén a sugárnyomás

$$p_{ny} = \frac{2I}{c} = 5,6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N/m^2}, \tag{5.7.1}$$

ahol I a napfény intenzitása.

5.8. Feladat: (HN 35C-33) Elektromágneses sugárzást kibocsátó forrás hosszú egyenes mentén sugároz (vonalforrás); teljesítménye méterenként 20 W. Mekkora az elektromos térerősség amplitúdója a vonalforrástól 5 m-re?

Megoldás: Jelölések: $P = 20$ W /nem feledve, hogy méterenként/; $r = 5$ m. Mivel vonalforrásról van szó, így egy r sugarú és $l = 1$ m hengerpalásttal számolunk. /Itt vesszük figyelembe az méterenkénti hosszt./
A kisugárzott S energiaáram sűrűség egyrészt az

$$S = \frac{P}{2r\pi l}, \tag{5.8.1}$$

másrészt az

$$S = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2 \tag{5.8.2}$$

alakban írható fel. A (5.8.1) és (5.8.2) egyenletek egyenlőségéből a térerősség amplitúdója

$$E_0 = \sqrt{\frac{p\mu_0 c}{r\pi l}} = 21,9\,\mathrm{V/m}. \tag{5.8.3}$$

6. Feladatok a geometriai optika témaköréből

Fénytörés

6.1. Feladat: (HN 37B-2) Ha keskeny lézernyaláb vastag üveglemezről verődik vissza, akkor két párhuzamos nyaláb keletkezik. Az egyik a lemez előlapjáról, a másik a lemez hátlapjáról verődik vissza. Tegyük fel, hogy a beesési szög θ, a lemez vastagsága D, a lemez üvegének törésmutatója n. Adjuk meg a két visszavert sugár merőleges d távolságát θ, D és n függvényében.

Megoldás: X

6.2. Feladat: (HN 37B-11) Nyugodt vizű tó fenekén lévő hal a vízfelszín felett a tájnak, a haltól induló, függőleges tengelyű körkúpba eső részét láthatja. Számoljuk ki azt a térszöget (szteradiánokban), amelyet a hal szeme befog.

Megoldás: X

6.3. Feladat: (HN 37C-37) Vezessük le a Snellius fénytörési törvényt a Fermat-elvből kiindulva.

Megoldás: Legyen a két közeg határa az x tengely. Az x tengely feletti anyag törésmutatója n_1, a tengely alatti anyag törésmutatója n_2. A fénysugár induljon az n_1 közeg (x_1, y_1) pontjából és érkezzen meg az n_2 közeg $(x_2, -y_2)$ pontjába. Az áthaladási pont koordinátája $(x, 0)$. Az x koordináták között álljon fenn: $x_1 < x < x_2$. A Fermat-elv értelmében az optikai út (eikonál) minimális:

$$S(x) = \int_{(1)}^{(2)} n\,ds = n_1\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2} + n_2\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2} = \text{min.}, \tag{6.3.1}$$

azaz

$$\frac{dS(x)}{dx} = 0 = n_1 \underbrace{\frac{x-x_1}{(x-x_1)^2+y_1^2}}_{\sin\alpha} + n_2 \underbrace{\frac{x_2-x}{(x_2-x)^2+y_2^2}}_{\sin\beta}. \tag{6.3.2}$$

Itt α a beesési, β a törési szög. Az összefüggést más alakban írva:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}, \tag{6.3.3}$$

amit bizonyítani akartunk.

7. Feladatok a hullámoptika témaköréből

Interferencia

7.1. Feladat: (HN 38A-3) Kétréses kísérletben a nátriumlámpa fénye ($\lambda_1 = 589$ nm) egymástól $d_1 = 1,8$ mm-re lévő csíkokat hoz létre az ernyőn. Mekkora lesz a csíkok közti távolság, ha higanygőzlámpával ($\lambda_2 = 436$ nm) világítjuk meg a réseket?

Megoldás: A nátriumlámpa fényére az erősítések helyei

$$d\sin\theta = m\lambda_1, \tag{7.1.1}$$

ahol d a két rés közötti távolság. Ha kis szögeket tekintünk, akkor ehelyett írhatjuk, hogy

$$d\theta = m\lambda_1. \tag{7.1.2}$$

Az ernyőn a csíkok helyzetét az

$$x_1 = L\mathrm{tg}\theta \sim L\theta = m\frac{L}{d}\lambda_1, \tag{7.1.3}$$

ahol L az ernyő résektől való távolsága. Két csík közötti távolság

$$d_1 = \frac{L}{d}\lambda_1. \tag{7.1.4}$$

Hasonló összefüggés áll fenn a higanygőz lámpa fényre:

$$d_2 = \frac{L}{d}\lambda_2. \tag{7.1.5}$$

E két egyenletből a higanygőz lámpa csíkjainak távolsága

$$d_2 = d_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1,33\,\mathrm{mm}. \tag{7.1.6}$$

7.2. Feladat: (HN 38B-8) A hélium-neon lézer ($\lambda = 633$ nm) sugárnyalábját egy ernyőre irányítjuk. Hány hullámhossznyival nő meg az optikai úthossz, ha a nyaláb útjába merőlegesen $d = 0,11$ mm vastag, $n = 1,55$ törésmutatójú üveglapot helyezünk?

Megoldás: A d úthosszon

$$N_1 = \frac{d}{\lambda} = 173,78 \tag{7.2.1}$$

hullám fér el. Az n törésmutatójú üvegben a hullámhossz

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}, \tag{7.2.2}$$

így a d távolságban

$$N_2 = \frac{d}{\lambda/n} = \frac{nd}{\lambda} = 269,35 \tag{7.2.3}$$

hullám fér el. A kettő közötti különbség 95,57 hullámhossznyi.

7.3. Feladat: (HN 38B-19) Víz felszínén úszó olajréteg (n = 1,45) merőlegesen beeső fehér fénnyel van megvilágítva. A folt $d = 280$ nm vastag. Adjuk meg, hogy melyik szín dominál

(a) a visszavert fényben és

(b) az átmenő fényben!

Megoldás: Mindkét esetben az a fény dominál, amelyikre erősítés van.

(a) A visszavert fényben két nyaláb interferenciáját tekintjük. Az egyik a felületről verődik vissza. A nagyobb törésmutatójú közeg miatt a visszavert nyaláb π fázisugrás szenved, amely $\lambda/2$ úthosszkülönbségnek felel meg. A másik nyaláb az olajban halad, majd a víz felszínén reflektálódik. Az optikai úthossz $2nd$. Mivel a feladat nem tartalmazza a víz törésmutatóját, így ha kisebb mint az olajé, akkor nincs fázisugrás, ha nagyobb, akkor π.
A kisebb törésmutató esetén erősítés feltétele

$$2nd - \frac{1}{2}\lambda = m\lambda. \tag{7.3.1}$$

A látható tartományba eső hullámhossz $\lambda = 541$ nm.
A nagyobb törésmutató esetén az erősítés feltétele

$$2nd = m\lambda, \tag{7.3.2}$$

ahonnan $\lambda = 406$ nm.
(b) A feladatrész az előzőhöz hasonló meggondolásokkal oldható meg.

7.4. Feladat: (HN 39A-1) Résen elhajló 550 nn hullámhosszúságú fény diffrakciós képét a réstől 3 m távolságra lévő ernyőn fogjuk fel. A centrális maximum két oldalán lévő harmadrendű minimumok távolsága 25 mm. Mekkora a rés szélessége?

Megoldás: Adatok: $\lambda = 550$ nm; $L = 3$ m; $D = 25$ mm.

Rés esetén a minimumok az

$$m\lambda = \sin\theta \quad (m = 1, 2, \ldots, n) \tag{7.4.1}$$

összefüggésből határozhatjuk meg, ahol m a kioltási helyek sorszáma, θ az elhajlás szöge. (Ne feledjük, hogy középen erősítés van!) Mivel két harmadrendű (m=3 és m=-3 szimmetrikusan) vonal távolsága adott, így elég a félszögre vonatkozó adatokkal számolni. Így pl. az m=3-hoz tartozó elhajlási szög

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{D/2}{L}. \tag{7.4.2}$$

Felhasználva, hogy kis szögekre a $\sin\theta = \mathrm{tg}\theta$ közelítés alkalmazható, a rész szélességére az

$$a = \frac{m\lambda}{\sin\theta} = \frac{2m\lambda L}{D} \tag{7.4.3}$$

adódik. Az adatok behelyettesítésével: $a = 0,4$ mm.

7.5. Feladat: (HN 39A-27) A $\lambda = 0,30$ nm hullámhosszúságú röntgensugarak NaCl kristályon elsőrendű visszaverődést hoznak létre $\varphi = 30^0$-os szögben érkezve. Számítsuk ki, mekkora az a rácsállandó, ami ennek a visszaverődésnek felel meg.

Megoldás: A Bragg-féle szórás feltétel szerint a diffrakció maximuma a

$$m\lambda = 2d\sin\varphi, \text{ ahol } m = 1,2,3,\ldots. \tag{7.5.1}$$

Innen a rácsállandó

$$d(m=1) = \frac{m\lambda}{2d\sin\varphi} = 0,3\text{nm}. \tag{7.5.2}$$

7.6. Feladat: (HN 40A-2) Két ideális polárszűrő lemez úgy van egymásra helyezve, hogy a transzmissziós tengelyeik közötti szög θ. Adjuk meg a lemezek közötti szöget úgy, hogy a beeső polarizálatlan fény intenzitásának $\eta = 45\%$-a átjusson.

Megoldás: A második lemez utáni intenzitás a Malus-törvény értelmében

$$I(\theta) = \frac{I_0}{2}\cos^2\theta, \tag{7.6.1}$$

amelyből az áteresztés aránya

$$\eta = \frac{1}{2}\cos^2\theta. \tag{7.6.2}$$

Az adatok behelyettesítésével $\theta = 18,43^0$.

7.7. Feladat: (HN 40A-7) Üveglemez Brewster-szöge 57^0, ha a lemez a levegőben van. Számítsuk ki a lemez Brewster-szöget, ha vízbe helyezzük (n = 1,33)

Megoldás: A Brewster-szög azt jelenti, hogy a visszavert és megtört nyaláb által bezárt szög 90^0, így a törés szöge 33^0. Ezzel az üveg törésmutatója

$$n_{\text{ü}} = \frac{\sin 57^0}{\sin 33^0} = 1,54. \tag{7.7.1}$$

A vízbe helyezés esetén jelentse α a beesési, β a törési szöget. Ekkor egyrészt

$$\frac{n_{\text{ü}}}{n} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \tag{7.7.2}$$

másrészt a Brewster-szög miatt teljesül, hogy

$$90^0 = \alpha + \beta. \tag{7.7.3}$$

Az egyenletrendszert megoldva a beesési szög $\alpha = 49,2^0$.

8. Feladatok a speciális relativitáselmélet tárgyköréből

Relativisztikus kinematika

8.1. Feladat: Egy űrhajósnak a saját ideje szerint egy feladat elvégzéséhez 2 percre van szüksége. Mennyi idő telik el ezalatt a Föld vonatkoztatási rendszerében, ha az űrhajó $0,5c$ sebességgel halad a Földhöz képest?

Megoldás: Jelölések: $\tau = 2$ perc = 120 s és $v = 0,5c$.
A Föld vonatkoztatási rendszerében

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 138,56\,\mathrm{s} \tag{8.1.1}$$

idő telik el.

8.2. Feladat: Két távoli galaxis a Földtől ellenkező irányban távolodik, mindegyik 0,8c sebességgel. Mekkora volna a másik galaxis távolodási sebessége az egyiken lévő megfigyelő számára?

Megoldás: Gondolatban helyezkedjünk el az egyik galaxison. Most ez a K rendszer. A Föld ehhez képest mozog $v_0 = 0,8c$ sebességgel. A Föld a K' rendszer. Ebben a rendszerben mozog a másik galaxis $u'_x = 0,8c$ sebességgel. E galaxis K rendszerbeli u_x sebességének kiszámolására alkalmazzuk a sebesség-összeadás

$$u_x = \frac{v_0 + u'_x}{1 + \frac{v_0 u'_x}{c^2}} \tag{8.2.1}$$

összefüggését. Behelyettesítés után kapjuk, hogy K rendszerbeli (egyik galaxisbeli) megfigyelő számára a másik

$$u_x = 0,9756c \tag{8.2.2}$$

sebességgel távolodik.

Relativisztikus dinamika

8.3. Feladat: Egy m_0 tömegű test sebessége $v_1 = 0,6c$-ről $v_2 = 0,8c$-re változik. a.) Mekkora munkavégzés volt ehhez szükséges? Számítsa ki klasszikus és relativisztikus módon is! b.)

Mekkora a test impulzusváltozása? Számítsa ki klasszikus és relativisztikus módon is!

Megoldás: a, A munkavégzés a klasszikus mechanika szerint:

$$W_{kl} = \frac{1}{2}m_0v_2^2 - \frac{1}{2}m_0v_1^2 = 0,14m_0c^2, \tag{8.3.1}$$

míg relativisztikusan:

$$W_{rel} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{5}{12}m_0c^2 = 0,4167m_0c^2. \tag{8.3.2}$$

b, Az impulzusváltozás a klasszikus mechanika szerint:

$$\Delta P_{kl} = m_0v_2 - m_0v_1 = 0,2m_0c, \tag{8.3.3}$$

míg relativisztikusan:

$$\Delta P_{rel} = \frac{m_0v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{m_0v_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{7}{12}m_0c = 0,5833m_0c. \tag{8.3.4}$$

8.4. Feladat: Részecskegyorsítóban különböző töltött részecskéket tudunk gyorsítani.
(a) Mekkora egy proton sebessége, ha tömege kétszerese nyugalmi tömegének? ($m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg)
(b) Mekkora energiával gyorsítható fel a proton erre a sebességre?
(c) Mekkora lenne a nyugalomból induló elektron sebessége ekkora gyorsítási energia befektetése után?

Megoldás:
(a) A feladat matematikai megfogalmazása:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2m_0, \tag{8.4.1}$$

amiből a proton sebessége

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c = 0,866c = 2,598 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \tag{8.4.2}$$

(b) E sebesség felhasználásával a gyorsításhoz befektetett energia

$$\Delta E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 = m_0c^2 = 1,503 \cdot 10^{-10}\,\text{J} = 9,394 \cdot 10^8\,\text{eV}. \tag{8.4.3}$$

(c) A fenti összefüggés átrendezésével és az elektron tömegének alkalmazásával

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{m_e c^2}{\Delta E + m_e c^2}\right)^2} = 2,9999992 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}. \tag{8.4.4}$$

Megjegyzés: Látható, hogy a ΔE befektetett energia növelésével a fénysebesség egyre jobban megközelíthető.

8.5. Feladat: Két azonos, kezdetben nyugvó m_0 tömegű részecske egyikével $\Delta E_1 = \frac{2}{3}m_0c^2$, a másikkal $\Delta E_2 = \frac{1}{4}m_0c^2$ energiát közlünk.
(a) Mekkora lesz a testek sebessége a nyugvó laborrendszerben?
(b) Feltételezve, hogy egy irányban mozognak, mekkora sebességűnek érzékeli a lassabban mozgó részecske a gyorsabban mozgót a saját rendszeréből nézve?

Megoldás:
(a) A nyugvó részecske v sebességre történő felgyorsításához szükséges energia befektetés

$$\Delta E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2. \tag{8.5.1}$$

Ennek felhasználásával a $\Delta E_1 = \frac{2}{3}m_0c^2$ esetén

$$v_1 = 0,8c \tag{8.5.2}$$

az elért sebesség, míg a $\Delta E_2 = \frac{1}{4}m_0c^2$ energia esetén

$$v_2 = 0,6c \tag{8.5.3}$$

a sebesség.
(b) Ez a két sebesség a két részecske K nyugvó (laborrendszerbeli sebessége). A kérdés, hogy a nyugvó rendszerhez képest $v_0 = v_2 = 0,6c$ sebességgel mozgó /a lassabb részecskéhez rögzített/ K' rendszerben milyen a másik részecske u'_x sebessége. A gyorsabb részecske sebességét a K rendszerben jelölje $u_x = v_2 = 0,8c$. A sebesség összeadás szerint

$$u_x = \frac{v_0 + u'_x}{1+\frac{v_0 u'_x}{c^2}}, \tag{8.5.4}$$

amelyből

$$u'_x = \frac{u_x - v_0}{1-\frac{v_0 u_x}{c^2}} = 0,384c. \tag{8.5.5}$$

8.6. Feladat: A kezdetben $v_0 = 0,6c$ sebességű m_0 nyugalmi tömegű részecske impulzusát 16/9-szeresére növeljük. Mekkora lesz a végső v_2 sebesség és mekkora energia befektetés kellett ehhez?

(a) Számítsa ki klasszikusan!

(b) Számítsa ki relativisztikus közelítésben!

Megoldás:

(a) Klasszikus megoldás: A részecske impulzusa kezdetben m_0v_0, a gyorsítás végén m_0v_2. A feladat szövege szerint

$$m_0v_2 = \frac{16}{9}m_0v_0, \tag{8.6.1}$$

amelyből

$$v_2 = \frac{16}{9}v_0 = \frac{16}{15}c. \tag{8.6.2}$$

A befektetendő energia

$$W_{kl} = \frac{1}{2}m_0v_2^2 - \frac{1}{2}m_0v_0^2 = 0,389m_0c^2. \tag{8.6.3}$$

(b) Relativisztikus megoldás: A részecske impulzusa kezdetben

$$\frac{m_0v_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}, \tag{8.6.4}$$

a gyorsítás végén

$$\frac{m_0v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}. \tag{8.6.5}$$

A feladat szövege szerint fennáll, hogy

$$\frac{m_0v_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{16}{9}\frac{m_0v_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}. \tag{8.6.6}$$

Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy

$$v_2 = 0,8c. \tag{8.6.7}$$

A befektetendő energia

$$W_{rel} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} - \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{5}{12}m_0c^2 = 0,4167m_0c^2. \tag{8.6.8}$$

8.7. Feladat: Egy M tömegű részecske $v_1 = 0,6c$ sebességgel összeütközik egy másik m tömegű és $v_2 = 0,8c$ sebességű ellenkező irányba mozgó részecskével. Az ütközés után a két részecske egy összetett rendszert képez, amely a laboratóriumhoz képest nyugalomban van. Mekkora az M/m arány?

Megoldás: Az impulzus megmaradás ez esetben

$$\frac{Mv_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{mv_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} \tag{8.7.1}$$

alakban fogalmazható meg. Az adatok behelyettesítése után a kérdezett hányados

$$\frac{M}{m} = \frac{16}{9}. \tag{8.7.2}$$