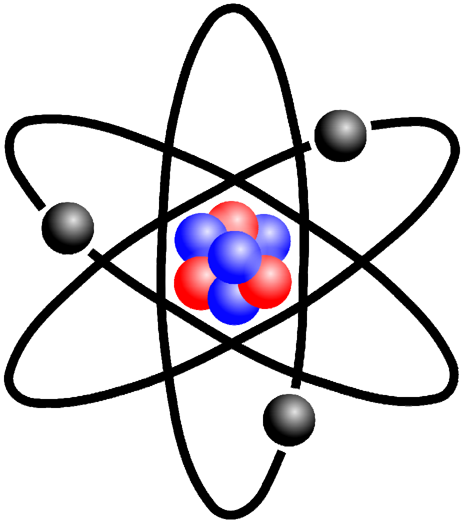
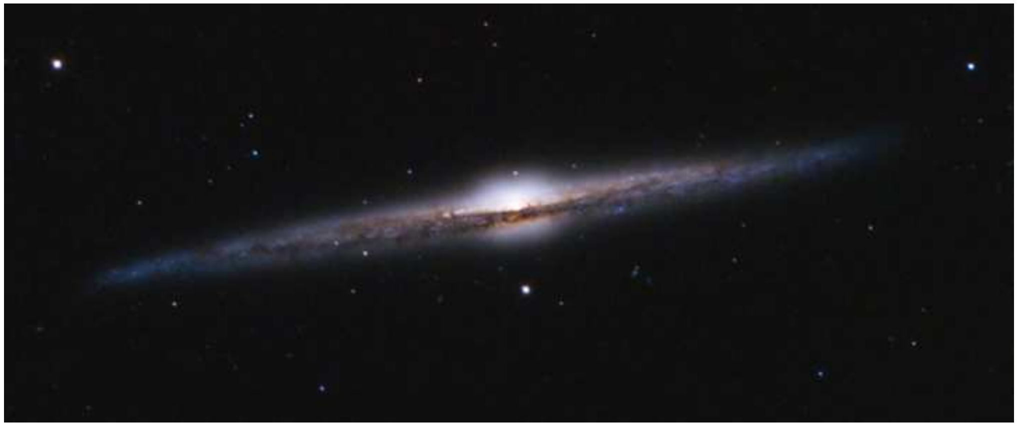
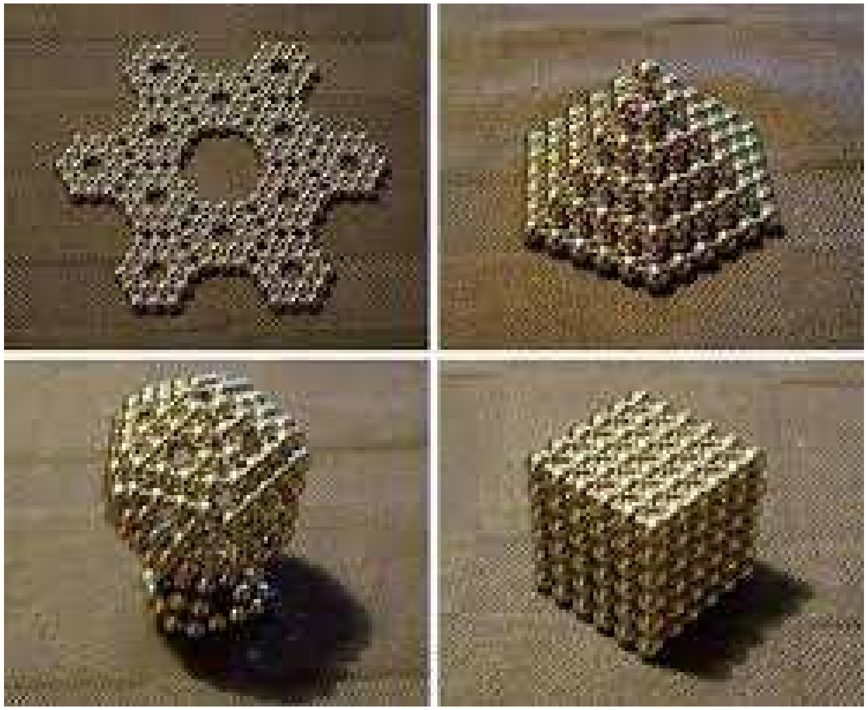


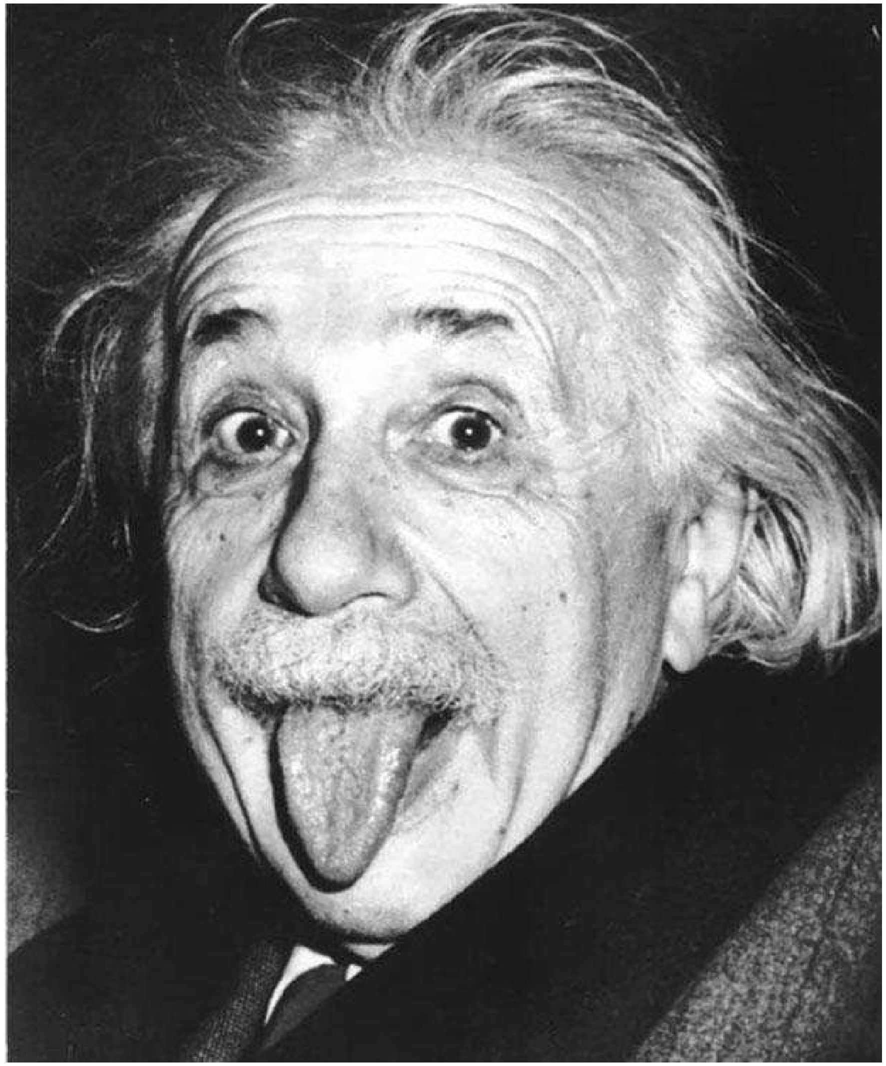


Fizika 112

20. Előadás



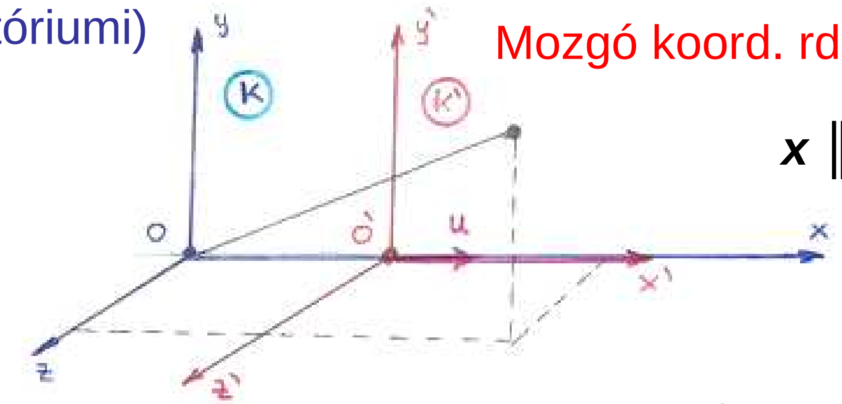
A speciális relativitás elmélete



Kinematika

Koordinátarendszerek

Nyugvó (laboratóriumi) koord. rdsz.



Mozgó koord. rdsz.

x ∥ ***x'*** és ***y*** ∥ ***y'*** és ***z*** ∥ ***z'***

$$\dot{x}' = \dot{x} - u \qquad \text{ahol}: \ \dot{x}' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}$$

Galilei-transzformáció: $x' = x - ut$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

az órák ugyanúgy járnak $t' = t$

$$\ddot{x}' = \ddot{x}$$

$$\dot{y}' = \dot{y} \qquad \ddot{y}' = \ddot{y}$$

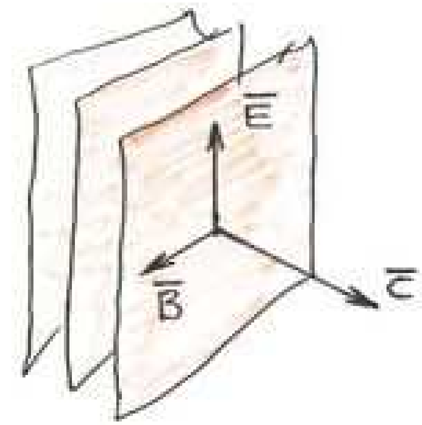
$$\dot{z}' = \dot{z} \qquad \ddot{z}' = \ddot{z}$$

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}}' = \vec{F} \ \leftrightarrow \ m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}}$$

A mechanika törvényei minden inerciarendszerben ugyanazok (azaz egyforma matematikai alakban fogalmazhatók meg).

Galilei féle relativitási elv

A speciális relativitáselmélet posztulátumai (Einstein-posztulátumok)



Maxwell (elméletileg), Hertz (kísérletileg) igazolta: EMH létezése

A Galilei_transzformáció nem működik!
(c’ ≠ c + u vagy c’ ≠ c - u , nem hullámegyenlet!)

Einstein-posztulátumok:

1. a Természettörvények minden inerciarendszerben ugyanolyan alakúak,
2. bármilyen fizikai hatás maximum *c* sebességgel terjedhet.

1. → ***c* = *c’***

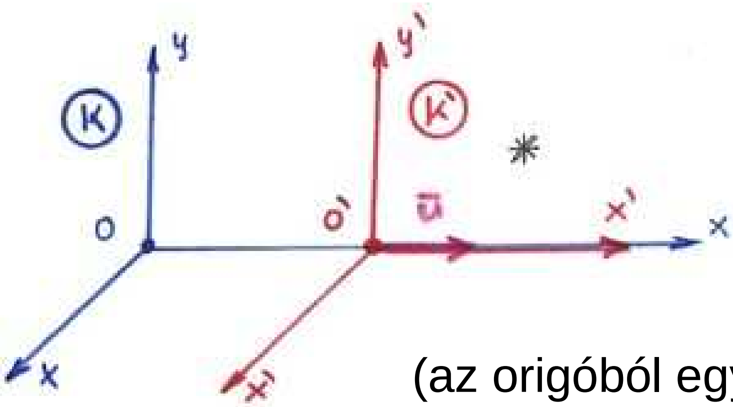
A speciális relativitáselmélet: $(x, y, z, t) \leftrightarrow (x', y', z', t)$ és $\vec{F} \leftrightarrow \vec{F}'$

Lorentz-transzformáció I.

Hendrik Antoon Lorentz és Henri Poincaré → transzformáció

⇓

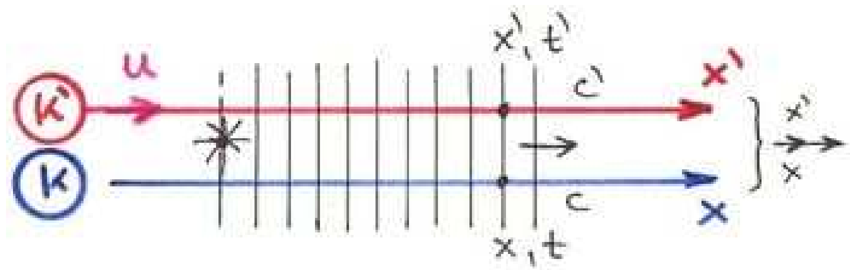
a Maxwell-egyenleteket változatlanul hagyja



$$t = t' = 0 \;\leftrightarrow\; O = O'$$

(az origóból egyszerre induló fényjelekkel → órák szinkronizálása)

(sztenderd elrendezés)



$$t = \frac{x}{c} \quad \text{és} \quad t' = \frac{x'}{c}$$

(nem ugyanazt mérik!)

Galilei-transzformáció ↔ ***c* = *c***' ???

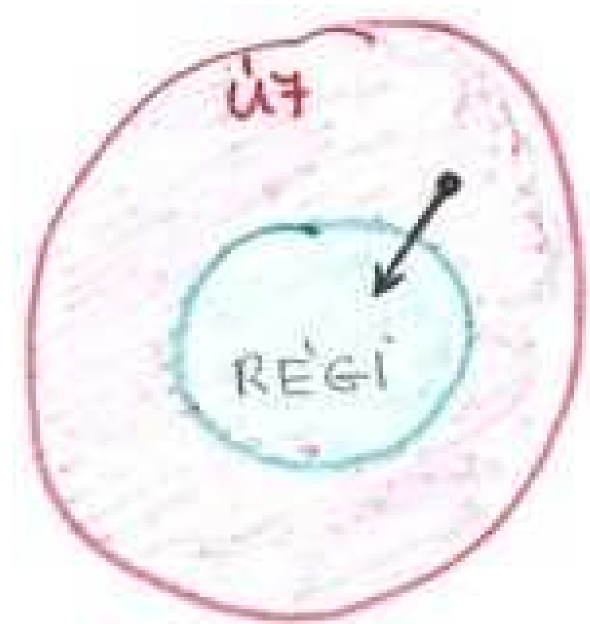
Másik transzformáció kell! ←

$$\frac{x'}{c} = \frac{x}{c} - \frac{u}{c}t \quad \Rightarrow \quad t' = t\left(1 - \frac{u}{c}\right) \;\Rightarrow\; \underline{\underline{t \neq t'}}\;\textbf{!!}$$

Lorentz-transzformáció II.

A korrespondencia-elv:

…egy adott jelenségre vonatkozó „új” törvénynek határesetben mindig vissza kell adnia a „régit”!



Vissza kell kapnunk a Galilei-transzformációt, ha:

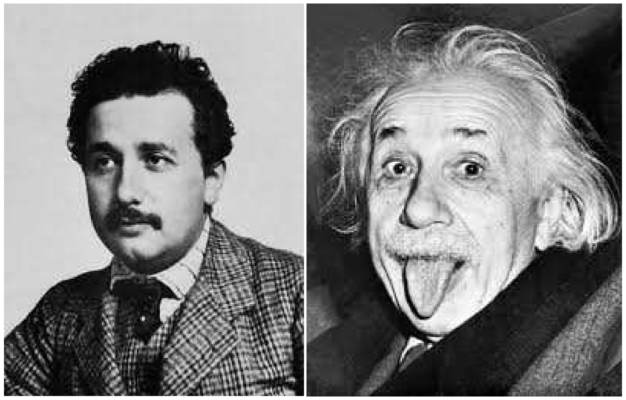
$$\frac{u}{c} << 1 \quad \text{, vagyis} \quad c \to \infty \quad \Rightarrow \quad t = t'$$

---

c* = *c' → mechanika ??? ⇒ új transzformáció (Einstein)

$$x' = \Gamma(x - ut) \quad \text{és} \quad x = \Gamma(x' + ut') \quad \text{és} \quad t \leftrightarrow t'$$

$$\lim_{u \to 0} \Gamma = 1$$



Lorentz-transzformáció III.

$$t = \frac{x}{c} \quad \text{és} \quad t' = \frac{x'}{c}$$

$$x' = \Gamma(x - ut) \quad \text{és} \quad x = \Gamma(x' + ut')$$

$$x' = \Gamma x\left(1 - \frac{u}{c}\right) \quad \text{és} \quad x = \Gamma x'\left(1 + \frac{u}{c}\right)$$

$$xx' = \Gamma^2 xx'(1 - \frac{u}{c})(1 + \frac{u}{c}) \;\Rightarrow\; \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

A korrespondencia elv
tényleg teljesül:

$$\lim_{c \to \infty} \Gamma = 1 \quad (u << c)$$

Hogyan transzformálódik az idő?

$$\left.\begin{array}{l} x' = \Gamma(x - ut) \\ x = \Gamma(x' + ut') \end{array}\right\} \; x = \Gamma^2 (x - ut) + \Gamma u t'$$

$$t' = \Gamma t + \frac{x}{u}\frac{1 - \Gamma^2}{\Gamma}$$

$$t' = \Gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$$

$$\lim_{u \to 0} t' = t$$

Lorentz-transzformáció IV.

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

K → K' $\xrightarrow{u \;\to\; -u}$ K' → K

$$x' = \Gamma(x - ut) \qquad x = \Gamma(x' + ut')$$

$$t' = \Gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \qquad t = \Gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)$$

$$y' = y \qquad z' = z$$

Lineáris kapcsolat!!!

Esemény (téridő koordináták): $\mathrm{K}: \ (x,t) \quad \text{és} \quad \mathrm{K}': (x',t')$

Ha két esemény történt: $\mathrm{K}: \ \Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{és} \quad \Delta t = t_2 - t_1$

$$\mathrm{K}': \ \Delta x' = x_2' - x_1' \quad \text{és} \quad \Delta t' = t_2' - t_1'$$

(A) $\Delta x' = \Gamma(\Delta x - u\Delta t)$

(B) $\Delta t' = \Gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)$

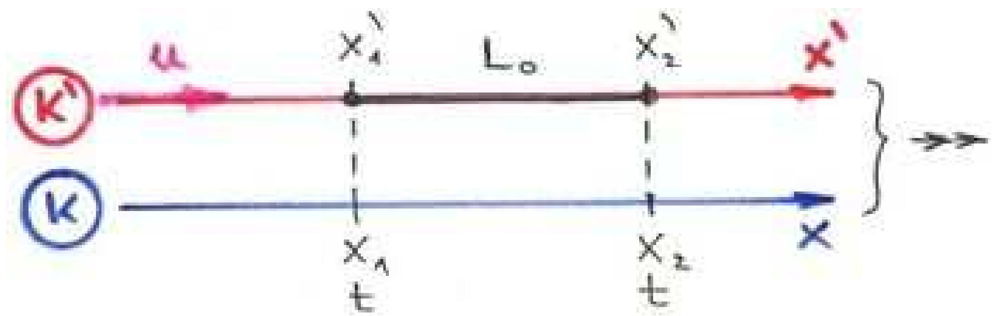
(C) $\Delta x = \Gamma(\Delta x' + u\Delta t')$

(D) $\Delta t = \Gamma\left(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'\right)$

Hosszkontrakció

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

A nyugalomban lévő rúd hossza K′-ben: $\Delta x' = L_0$



Mérés: $\Delta t = 0$

(A) $\Delta x' = \Gamma(\Delta x - u\Delta t)$

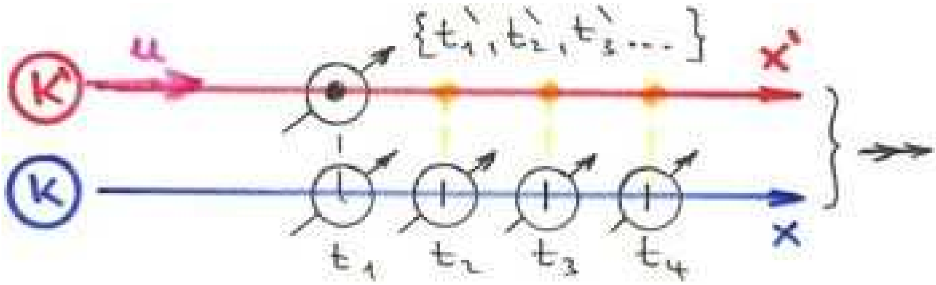
A rúd hossza K-ban: $L = L_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$

Fordítva??

-
-
-

Az idődilatáció

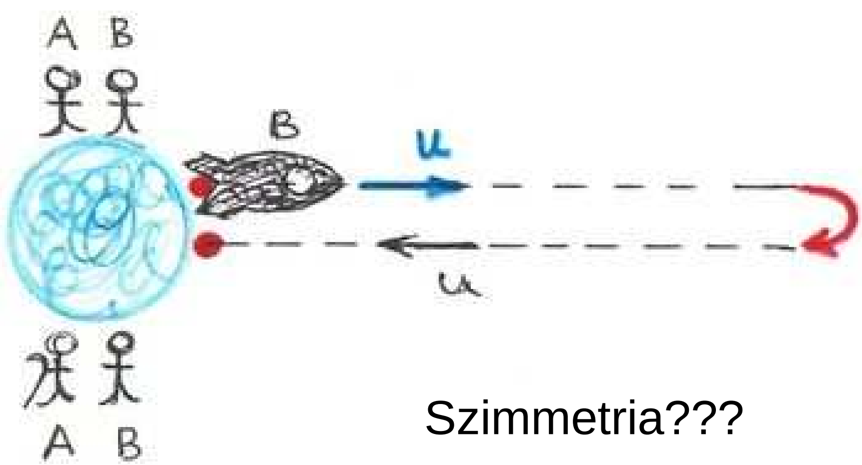
Egy óra K′-ben nyugalomban van: $\Delta x' = 0$



$$\text{(D)} \quad \Delta t = \Gamma\left(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'\right)$$

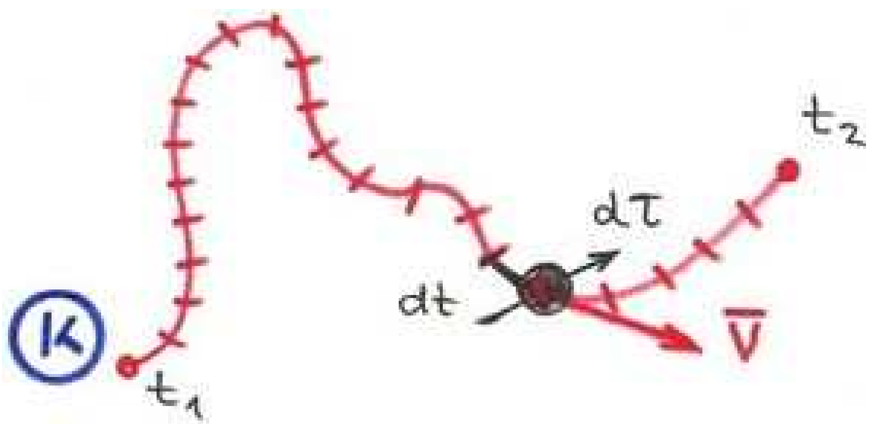
$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Ikerparadoxon:



Szimmetria???

A sajátidő

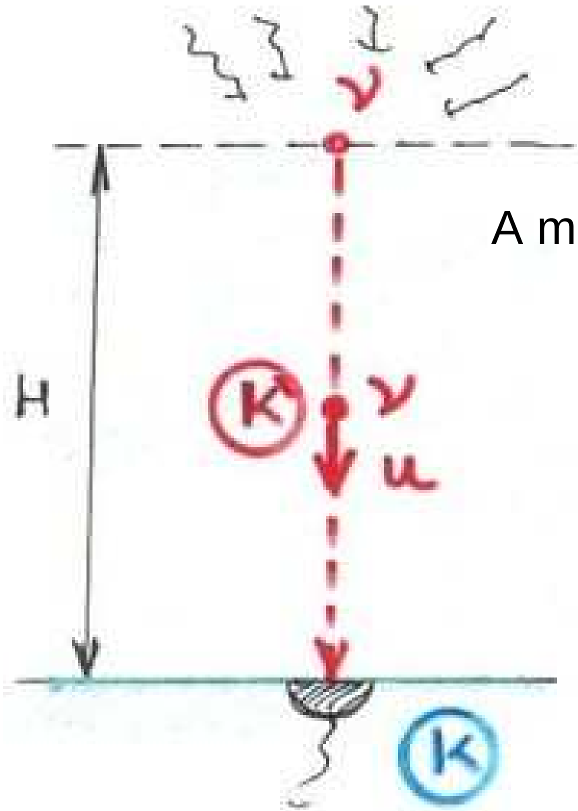


$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\tau_{12} = \int_{r_1}^{r_2} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-v^2/c^2}\,dt \le \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1$$

Sajátidő: bármely inerciarendszerből számítva ugyanaz

A mű-mezon (müon) bomlása



A müon instabil részecske, amely $\tau \approx 2.2\ \mu s$ alatt elbomlik.

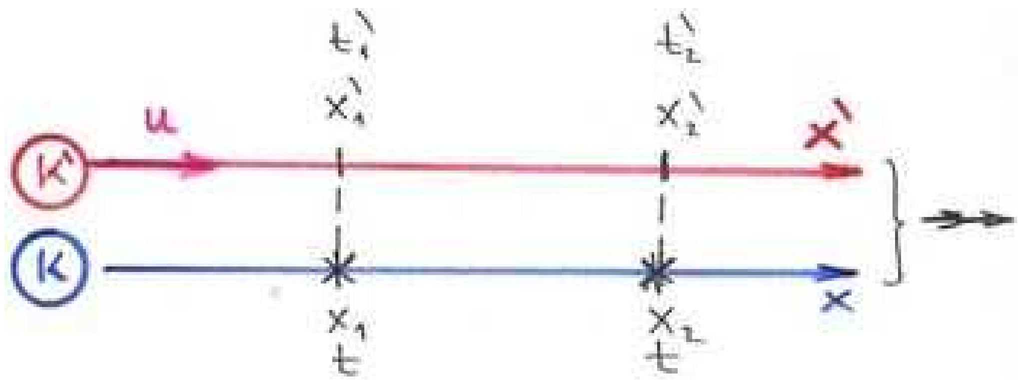
Ezek a részecskék a Föld felső légkörében,
H = 4700 m magasan keletkeznek

$$v_\mu = \frac{H}{\tau} \approx 7c$$

$$H = u \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = u\tau$$

$$u \approx 0.99c$$

Az egyidejűség relativitása



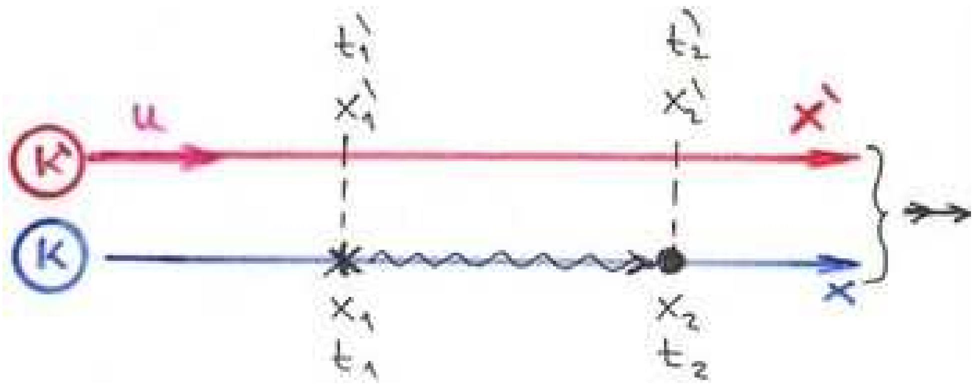
$$t_1 = t_2 \quad \rightarrow \quad \Delta t = 0$$

$$\text{(B)} \quad \Delta t' = \Gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)$$

$$t'_2 - t'_1 = \Delta t' = \Gamma\left(-\frac{u}{c^2}\Delta x\right) = \frac{-\frac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Az *egyidejűség* is relatív fogalom, nincsen „abszolút” egyidejűség !!!

Az ok-okozat relativisztikus tárgyalása



$$t_2 > t_1 \;\Rightarrow\; \Delta t > 0$$

ok okozat

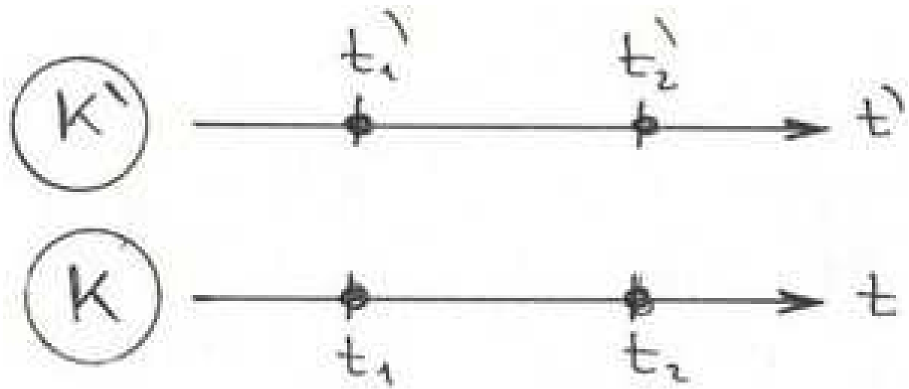
Az ok-okozat sorrend megfordulhat-e a másik koordinátarendszerből nézve?

$$\text{(B)}\quad \Delta t' = \Gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right) \longrightarrow \Delta t' = \Gamma \Delta t\left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$$

$$\text{Ha } \Delta t' < 0 \;\rightarrow\; \left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) < 0 \;\rightarrow\; c^2 < u\frac{\Delta x}{\Delta t}$$ ellentmondás

Az ok-okozat sorrend (kauzalitás) nem cserélődhet fel!

A sebességek relativisztikus összegződése



Láttuk:

$$\text{(C)}\quad \Delta x = \Gamma(\Delta x' + u\Delta t')$$

$$\text{(D)}\quad \Delta t = \Gamma\left(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'\right)$$

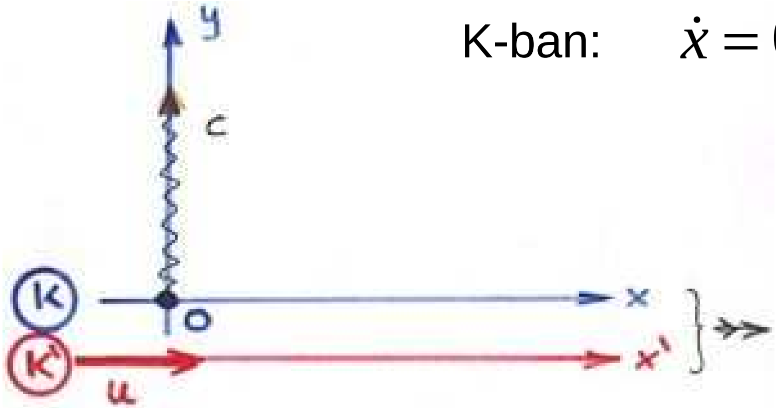
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Gamma(\Delta x' + u\Delta t')}{\Gamma\left(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'\right)} \longrightarrow \boxed{v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}}$$

$$v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{\Gamma\left(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'\right)} = \frac{v'_y\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}$$

és

$$v_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}$$

Példa a sebesség-összeadásra I.



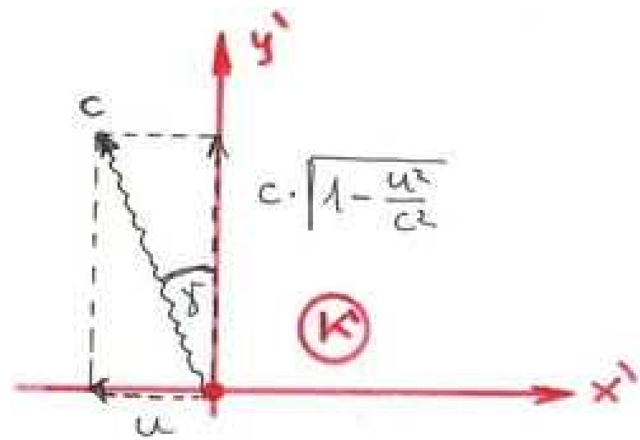
K-ban: $\dot{x} = 0 \quad \dot{y} = c$

$$\dot{x}' = \frac{\dot{x} - u}{1 - \frac{u\dot{x}}{c^2}}$$

$$\dot{y}' = \frac{\dot{y}}{\Gamma\left(1 - \frac{u\dot{x}}{c^2}\right)} = \frac{c}{\Gamma} = c\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$c'^2 = u^2 + c^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = c^2$$

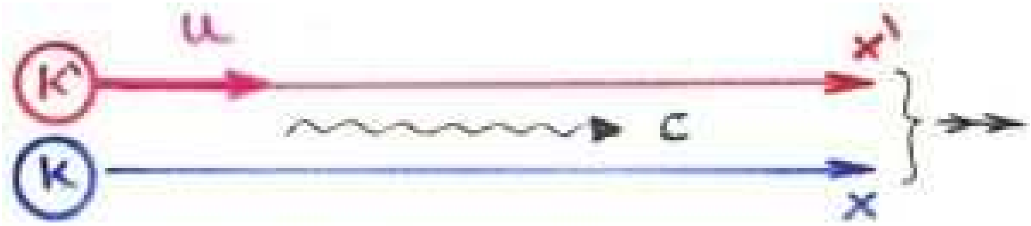
A fény a mozgó rendszerben is **c** sebességgel terjed,
de az iránya egy kissé megváltozik.



Példa a sebesség-összeadásra II.

Indítsunk el egy fénysugarat a mozgó rendszer tengelye mentén.

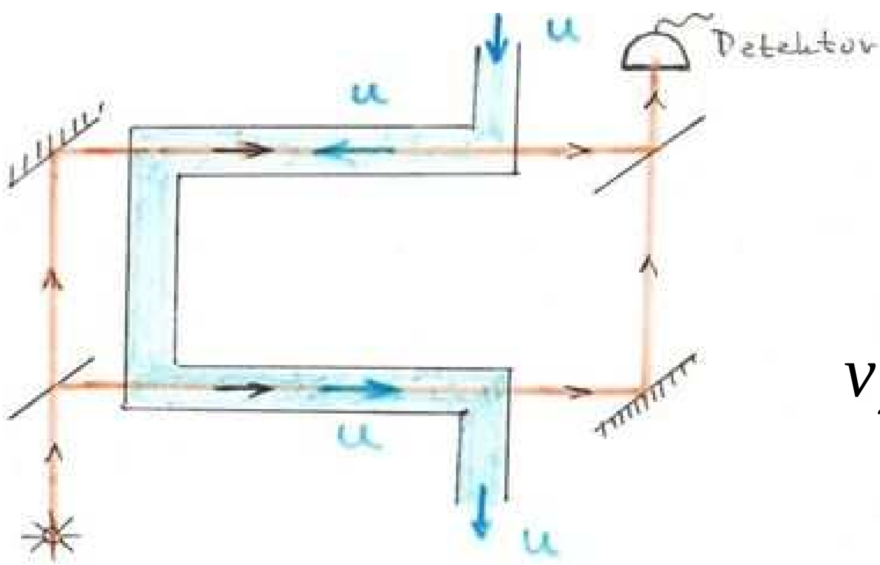
$$\dot{x}' = c$$



$$\dot{x} = \frac{\dot{x}' + u}{1 + \frac{u\dot{x}'}{c^2}} = \frac{c + u}{1 + \frac{u}{c}} = c$$

Példa a sebesség-összeadásra III.

Hippolyte Fizeau (1851)



Fény mozgása áramló folyadékban

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} \quad , \text{de} \quad \frac{uv'_x}{c^2} << 1$$

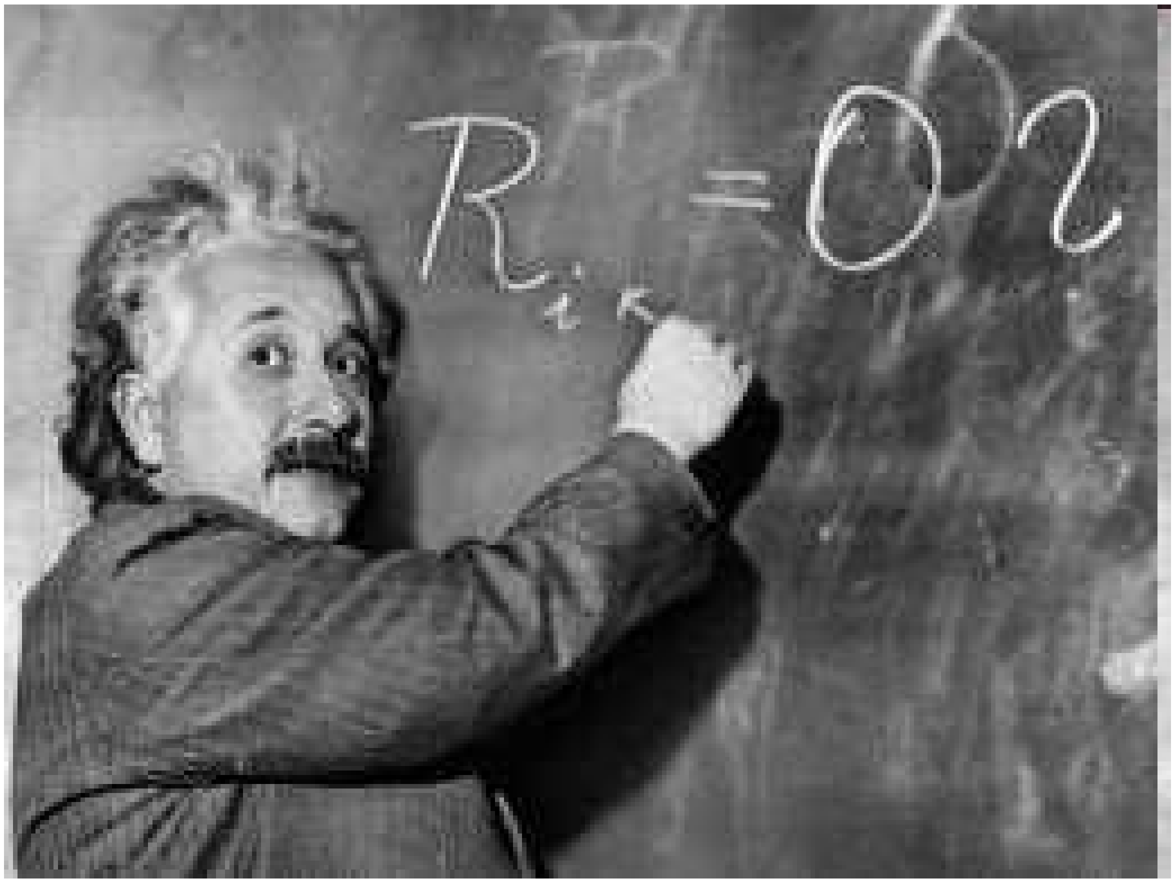
$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}} \approx (v'_x + u)\left(1 - \frac{uv'_x}{c^2}\right)$$

$$v_x \approx v'_x + u - \frac{uv'^2_x}{c^2} - \frac{u^2 v'_x}{c^2} \approx v'_x + u - \frac{uv'^2_x}{c^2} \qquad v'_x = \frac{c}{n}$$

$$v_x \approx \frac{c}{n} + u - \frac{u}{n^2} = \frac{c}{n} + u\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

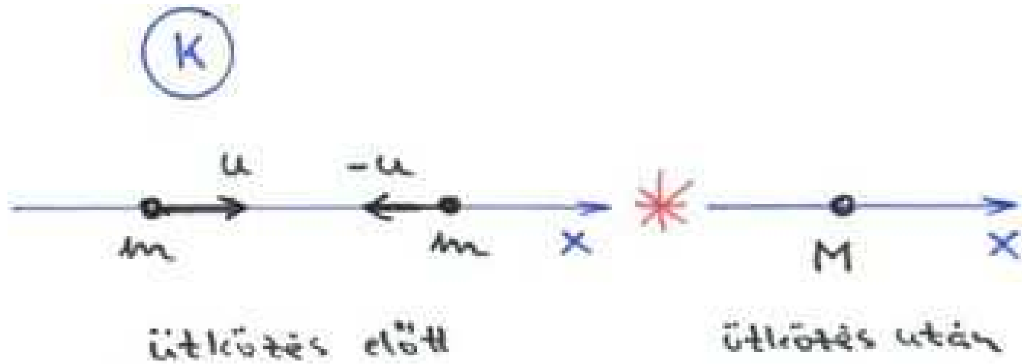
⇦ Fizeau mérési eredménye

A speciális relativitás elmélete



Dinamika

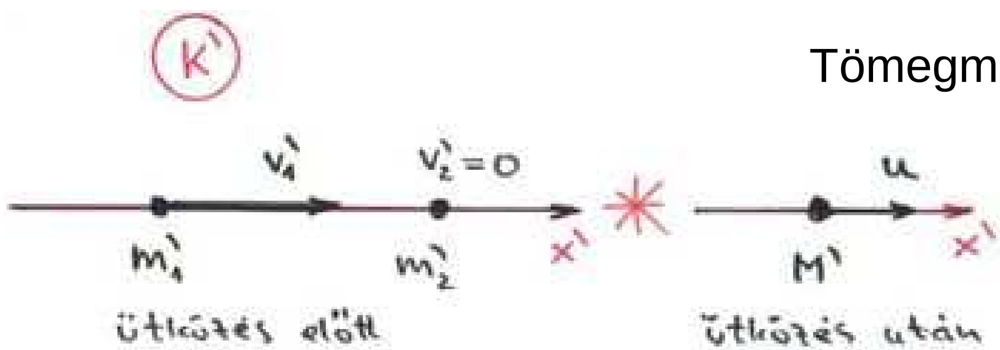
Impulzus-megmaradás I.



$$mu + m(-u) = 0$$

"Kívülről nézve…"

Rögzítsük a ***K'*** koordinátarendszerünket a ***-u*** sebességgel mozgó tömegponthoz.



$$m_1' v_1' = M' u$$

∗u

Tömegmegmaradás: $m_1' + m_2' = M'$

$$m_1'(v_1' - u) = m_2' u$$

$$\frac{m_1'}{m_2'} = \frac{u}{v_1' - u} = \frac{1}{\frac{v_1'}{u} - 1}$$

Impulzus-megmaradás II.

$$\frac{m_1'}{m_2'} = \frac{u}{v_1' - u} = \frac{1}{\frac{v_1'}{u} - 1} \qquad (*)$$

$$m_1' = m_2' = m \longrightarrow 1 = \frac{u}{v_1' - u} \rightarrow v_1' = 2u$$

Azonban:

$$v_1' = \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}} = \frac{2u}{1 + \beta^2}$$

Newtoni tömegfogalom: $m_1' = m_2' = m \rightarrow M = 2m$

$$mv_1' = Mu \longrightarrow m\frac{2u}{1+\beta^2} \neq 2mu$$

?

Impulzus-megmaradás III.

$$\frac{v_1'}{u}=\frac{2}{1+\beta^2}$$

Beírjuk (*)-be:

$$\frac{m_1'}{m_2'}=\frac{1}{\frac{v_1'}{u}-1}=\frac{1}{\frac{2}{1+\beta^2}-1}=\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}$$

$$\beta_1=\frac{v_1'}{c}=\frac{2u/c}{1+\beta^2}=\frac{2\beta}{1+\beta^2}$$

$$1-\beta_1^2=1-\frac{4\beta^2}{\left(1+\beta^2\right)^2}=\frac{1+2\beta^2+\beta^4-4\beta^2}{\left(1+\beta^2\right)^2}=\frac{\left(1-\beta^2\right)^2}{\left(1+\beta^2\right)^2}$$

$$\frac{m_1'}{m_2'}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}}\longrightarrow m_1'=\frac{m_2'}{\sqrt{1-\left(v_1'/c\right)^2}}\longrightarrow \boxed{m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}}$$

Nyugalmi tömeg

Relativisztikus tömeg

Relativisztikus impulzus (relativisztikus tömeg nélkül !!!)

K’-ben: $a = \dfrac{F}{m} = const.$

$$m dv_o = F d\tau$$

K-ban:

$$m dv_o = F d\tau = F\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt$$

$$dv : dv_o = \frac{d\ell}{dt} : \frac{d\ell_o}{d\tau}$$

$$d\ell = d\ell_o\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$ és $$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$dv = dv_o\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}\frac{F}{m}$$

$$\frac{1}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt} = F$$

$$\frac{dp}{dt} = F$$

$$\boxed{p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

Relativisztikus mozgásegyenlet

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$ ahol $$p = \frac{m_o v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Példa: tömegpont mozgása állandó erő hatására I.

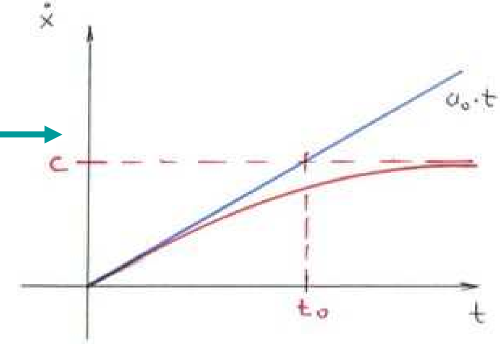
$$m_o \ddot{x} = F_o$$

$$\ddot{x} = \frac{F_o}{m_o} \equiv a_o$$

Példa: tömegpont mozgása állandó erő hatására II.

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m_o\dot{x}}{\sqrt{1-(\dot{x}/c)^2}}\right]=F_o \quad\longrightarrow\quad \left[\frac{m_o\dot{x}}{\sqrt{1-(\dot{x}/c)^2}}\right]_0^{\dot{x}}=F_o t$$

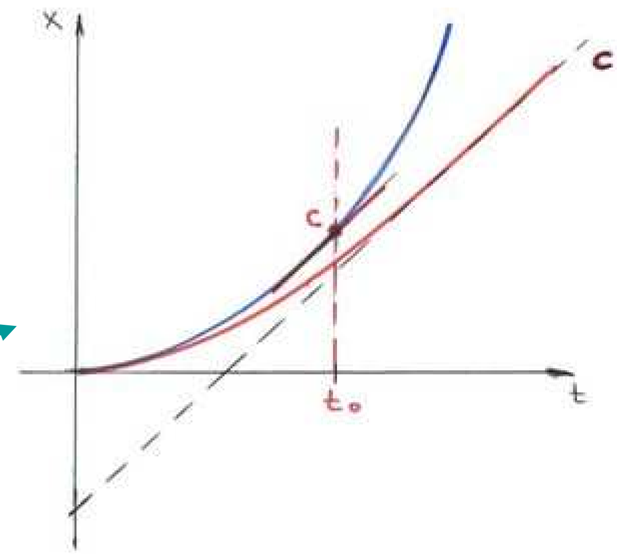
$$\dot{x}=a_o t\sqrt{1-(\dot{x}/c)^2} \quad\longrightarrow\quad \dot{x}=\frac{a_o t}{\sqrt{1+(a_o t/c)^2}}$$



$$\lim_{t\to\infty}\dot{x}=c$$

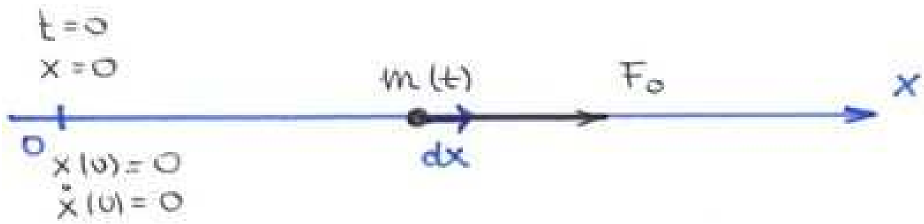
$$[x]_0^t=\int_0^t\frac{a_o t}{\sqrt{1+(a_o t/c)^2}}dt=\left[\frac{c^2}{a_o}\sqrt{1+(a_o t/c)^2}\right]_0^t$$

$$x(t)=\frac{c^2}{a_o}\left(\sqrt{1+(a_o t/c)^2}-1\right)$$



A tömeg-energia ekvivalencia

$$W = \int_0^x F dx$$



$$\frac{dp}{dt} = F \rightarrow p = mv = \frac{m_o v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$W = \int_0^x F dx = \int_0^x \frac{dp}{dt} dx = \int_0^p \frac{dx}{dt} dp = \int_0^p v dp = \int_0^v v \frac{dp}{dv} dv \longrightarrow W = [pv]_0^v - \int_0^v p dv$$

$$W = [pv]_0^v - m_o \int_0^v \frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} dv \rightarrow W = m_o \frac{v^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - m_o \left[-c^2 \sqrt{1-(v/c)^2} \right]_0^v$$

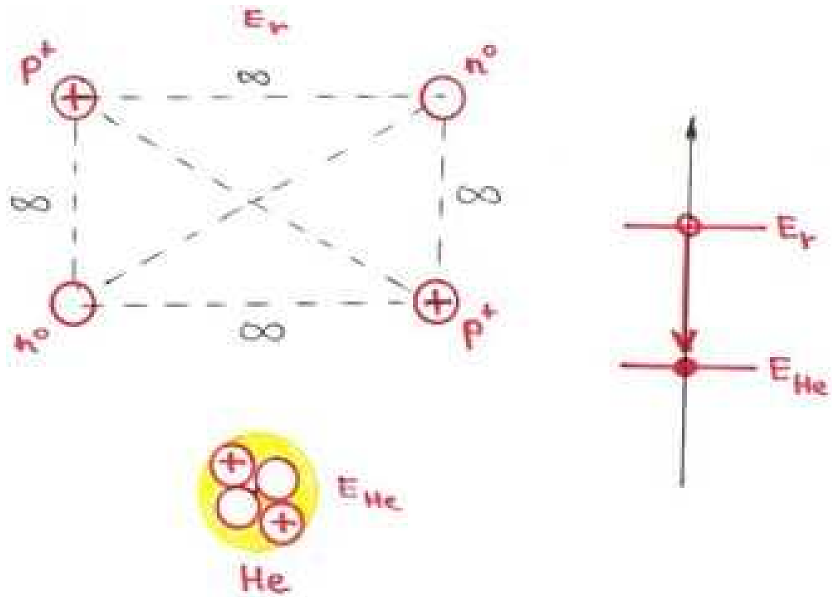
$$W = m_o \frac{v^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + m_o c^2 \sqrt{1-(v/c)^2} - m_o c^2$$

$$\Delta E_k = W = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - m_o c^2$$

$$\boxed{E = mc^2}$$

$$\frac{v}{c} << 1 \rightarrow E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \ldots$$

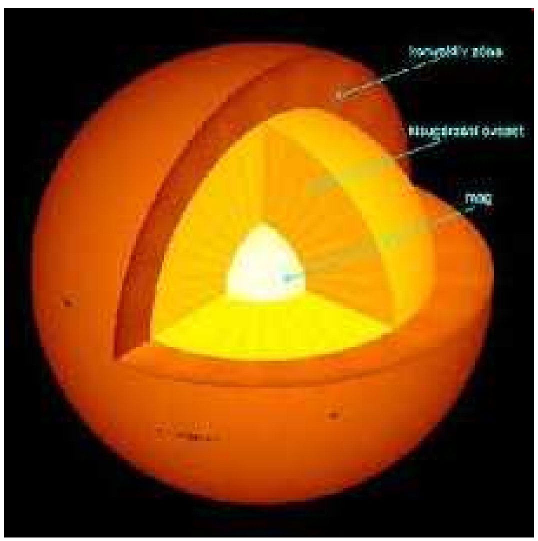
A tömegdefektus

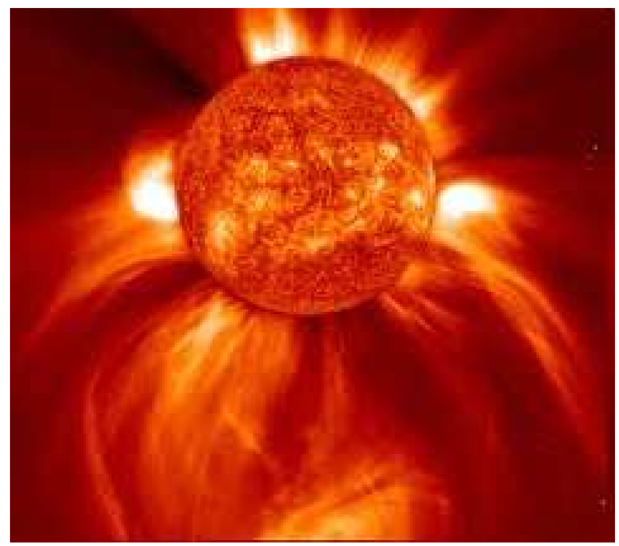


$$2m_p + 2m_n > m_{He}$$

$$\Delta E = 28MeV$$

$$1\,mól \rightarrow 10^{11}\,\mathrm{J}$$



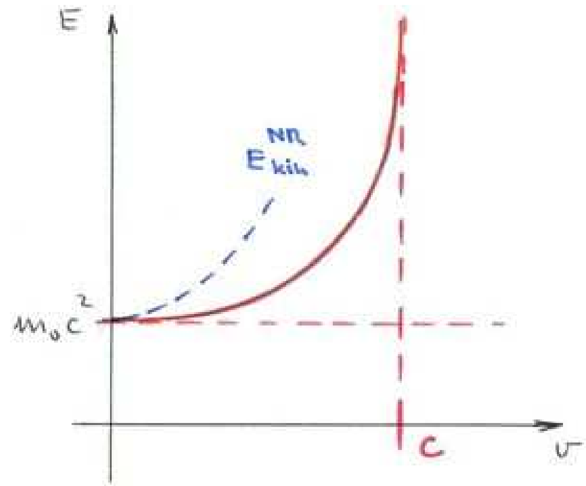


Az energia, mint a sebesség és az impulzus függvénye

Klasszikus fizika: $E = \frac{1}{2}mv^2$

$p = mv$

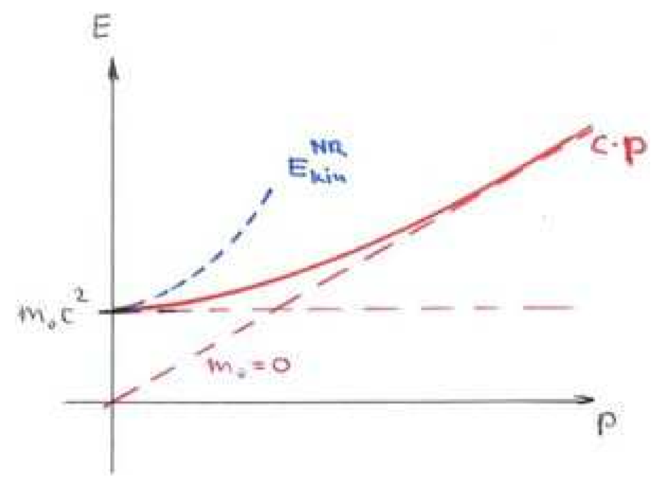
$$E = \frac{p^2}{2m}$$



$$E = mc^2 = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$p = \frac{m_o v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

?



Belátható: $E^2 - p^2c^2 = m_o^2 c^4$

$$\boxed{E = \sqrt{m_o^2 c^4 + p^2 c^2}} \rightarrow E_k = \sqrt{m_o^2 c^4 + p^2 c^2} - m_o c^2 \approx \frac{p^2}{2m} \quad \text{ha} \quad p << m_o c$$