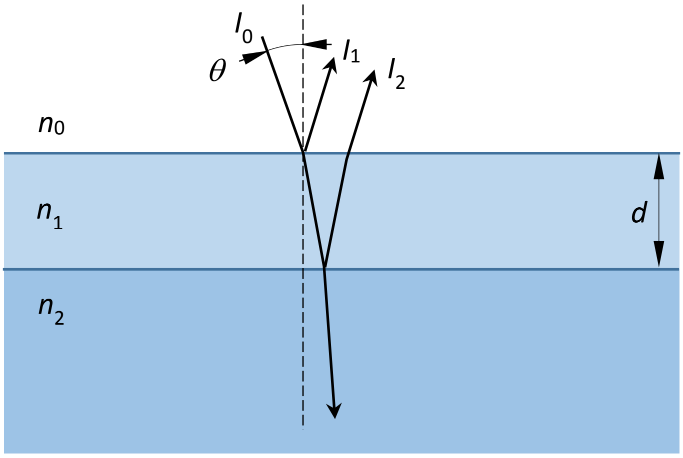
ZÁRTHELYI DOLGOZAT #2

2019-12-04

1. Vízen úszó olajfolt reflexiójának meghatározása kéthullám interferenciával

Egy vízen úszó olajfoltot vizsgálunk merőleges beesés mellett ($\theta \approx 0$), λ_0 = 550 nm-es hullámhosszúságú zöld fénnyel (1. ábra). A törésmutatók értékei: n_0 = 1,0 (levegő), n_1 = 1,505 (motorolaj), n_2 = 1,333 (víz), azaz a többszörös reflexiót elhanyagolhatjuk. Legalább milyen vastag az olajréteg, ha 550 nm-en éppen maximális reflexiót (azaz konstruktív interferenciát) tapasztalunk? Mekkora ebben az esetben az eredő reflektancia (R)? **25 p**



$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta \tag{1}$$

$$OPD = n_1 \cdot 2d \tag{2}$$

$$\delta = OPD\frac{2\pi}{\lambda_0} - \pi = n_1 \cdot 2d \cdot \frac{2\pi}{\lambda_0} - \pi \tag{3}$$

A tükrözés maximalizálásához a két hullámnak azonos fázisban kell találkoznia:

$$\delta = 2\pi \cdot m \quad ; \quad m \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Ha $m = 0$:

$$n_1 \cdot 2d \cdot \frac{2\pi}{\lambda_0} = \pi \quad \rightarrow \quad n_1 \cdot d = \frac{\lambda_0}{4} \quad \rightarrow \quad d = 91{,}4\ \text{nm}. \tag{5}$$

Feltételezzük, hogy mindkét felület reflexiója kicsi, így a a beeső nyaláb (I_0) és a második felületen reflektálódó nyaláb is közelítőleg gyengülés nélkül halad át az első felületen.

$$I_1 = I_0\left(\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1}\right)^2 \quad \text{és} \quad I_2 \approx I_0\left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \tag{6}$$

Az eredő reflektancia:

$$R = \frac{I}{I_0} = \left(\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1}\right)^2 + \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 + 2\left|\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1}\right|\left|\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right|\cos\delta \tag{7}$$

$$R = \left(\frac{1 - 1{,}505}{1 + 1{,}505}\right)^2 + \left(\frac{1{,}505 - 1{,}333}{1{,}505 + 1{,}333}\right)^2 + 2\,\frac{1{,}505 - 1}{1{,}505 + 1} \cdot \frac{1{,}505 - 1{,}333}{1{,}505 + 1{,}333} = 6{,}88\%. \tag{8}$$

2. Diffrakciós rács méretének meghatározása többhullám interferenciával

Ha a nátrium D-vonalán sugárzó két szuperfinom átmenet hullámhosszának különbsége $\Delta\lambda$ = 0,6 nm, és a kisebb hullámhosszúságú vonal esetén λ = 589,0 nm, akkor legalább milyen átmérőjű (*D*) diffrakciós rácsot kell választanunk, hogy a módusokat a diffrakció első rendjében (*m* = 1) a rács fel tudja oldani? A rács vonalsűrűsége legyen 300 vp/mm. Ha a rácsot a felületére merőlegesen világítjuk meg, milyen szög alatt látszódik a megadott hullámhossz (θ_1)? Mekkora ehhez képest a Rayleigh-kritérium szerint éppen felbontható 589,6 nm-es hullámhossz szögeltérése ($\Delta\theta$)? **25 p**

A vonalsűrűség a rácsállandó reciproka: $1/a$, és *m* = 1:

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m \cdot N = m\frac{D}{a} \quad \rightarrow \quad D = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}\left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = \frac{589}{0{,}6}300^{-1} = 3{,}27\ \mathrm{mm}. \tag{9}$$

Az első diffrakciós rend iránya:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta_m \cdot a = m2\pi \quad \rightarrow \quad \sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a} = 0{,}1767 \quad \rightarrow \quad \theta_1 = 10{,}18°. \tag{10}$$

$$I(\delta) = I_1\left(\frac{\sin(\delta N/2)}{\sin(\delta/2)}\right)^2 \tag{11}$$

Az első zérushely távolsága valamelyik maximumhelytől:

$$\Delta\delta N/2 = \pi \rightarrow \Delta\delta = \frac{2\pi}{N} \tag{12}$$

$$\Delta\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta\sin\theta_1 \cdot a = \frac{2\pi}{N} \tag{13}$$

$$\Delta\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{a\cdot N} = \frac{\lambda}{D} = 1{,}801 \cdot 10^{-4} \quad \rightarrow \quad \Delta\theta \approx \Delta\sin\theta_1 = 0{,}18\ \mathrm{mrad} = 0{,}0103°. \tag{14}$$

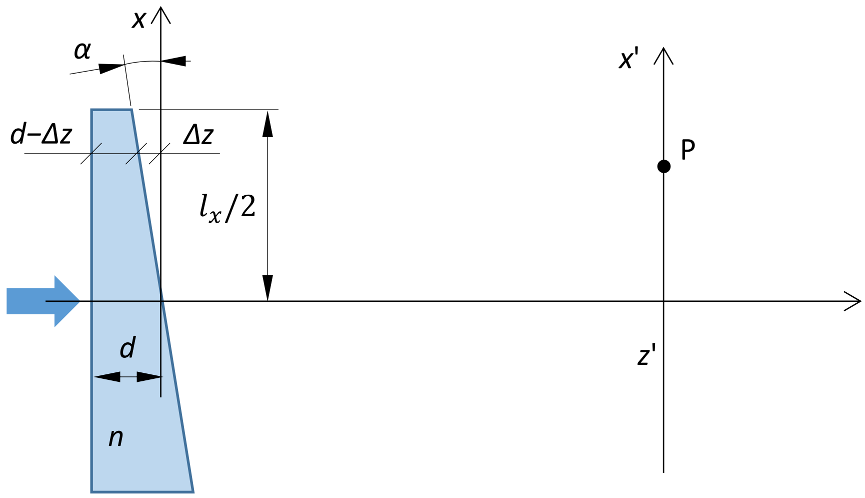
3. Szem felbontóképességének vizsgálata Fraunhofer-diffrakcióval

Legolas, a tünde harcos a krónikák szerint éles szeméről volt híres. Úgy tartják, hogy 15 mérföldről (*z*') képes volt megszámolni a lovon közeledő ellenséget. Mekkora lehet Legolas pupillája (*D*), ha feltételezzük, hogy szemének képalkotási tulajdonságait csak a kör alakú pupilláján végbemenő diffrakció határozza meg? A hullámhossz legyen λ = 555 nm, mivel itt a legmagasabb a szem érzékenysége. A lovasokat a nagy távolság miatt pontforrásnak tekintjük, melyek legkisebb távolsága 2 m, akiket akkor tud a szeme megkülönböztetni, ha azok épp a Rayleigh-kritériumnak megfelelő távolságra vannak egymástól. Használja ki, hogy egy optikai rendszer szögben kifejezett felbontóképessége ugyanaz marad, ha az ideális pontforrásokat nem a tárgy- hanem a képsíkon helyezzük el. Egy angol mérföld hossza 1609 m. **20 p**

$$R_{Airy} = 1{,}22\frac{\lambda z'}{D} \quad \rightarrow \quad D = 1{,}22\frac{\lambda z'}{R_{Airy}} = 8{,}2\ \mathrm{mm}. \tag{15}$$

4. Kis eltérítésű prizma távoltéri diffrakciójának meghatározása

Egy l_x szélességű prizmát vizsgálunk (2. ábra), melynek *y*-irányú méretét végtelennek tekintjük, így a számításokat egy dimenzióban végezhetjük. A prizma transzmittanciáját 1-nek tekintjük, ennek apertúráján kívül pedig nullának. A megvilágító nyaláb (λ_0) az optikai tengellyel párhuzamosan terjedő síkhullám (E_0 = 1). Írja föl a prizmán áthaladó fény optikai úthosszkülönbségének (*OPD*(*x*)) helyfüggését a *z* = 0 síkban, az *x* = 0 pontot tekintve referenciának (azaz *OPD*(0) = 0)! A közelítés során használja ki, hogy $\alpha \approx 0$. Írja föl a prizma utáni térben, a *z* = 0 síkban a komplex térerősségeloszlást (*E*(*x*))! A Fraunhofer-féle diffrakciós integrál segítségével határozza meg a *z*' ≈ ∞ síkban a térerősség kifejezését (*E*(*x*'))! Hogyan értelmezhető a kapott formula? **30 p**



$$OPD = OPL_{prizma} - OPL_{üveg} \tag{16}$$

$$OPL_{üveg} = nd \tag{17}$$

$$OPL_{prizma} = (d - \Delta z)n + \Delta z \tag{18}$$

$$OPD = \Delta z - \Delta z \cdot n = \Delta z(1 - n) = x \tan\alpha \cdot (1 - n) \tag{19}$$

$$E(x) = e^{ik \cdot OPD} = e^{i\frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot x \tan\alpha \cdot (1-n)} \quad , \qquad ha\ x \geq\ 0 \tag{20}$$

$$b \equiv -\tan\alpha \cdot (1 - n) \tag{21}$$

$$E(x') = \frac{e^{ikz'} \cdot e^{i\frac{kx'^2}{2z'}}}{i \cdot \lambda z'} \int_{\Sigma} E(x) \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}x} dx \tag{22}$$

$$\int_{\Sigma} E(x) \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}x} dx = \int_{-l_x/2}^{l_x/2} e^{-ikbx} \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}x} dx \tag{23}$$

$$\int_{-l_x/2}^{l_x/2} e^{-ikbx} \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}x} dx = \frac{1}{-ikb - i\frac{kx'}{z'}} \left[e^{-ikbx} \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}x} \right]_{-l_x/2}^{l_x/2} =$$

$$= \frac{1}{-ikb - i\frac{kx'}{z'}} \left(e^{-ikb\frac{l_x}{2}} \cdot e^{-i\frac{kx'}{z'}\frac{l_x}{2}} - e^{ikb\frac{l_x}{2}} \cdot e^{i\frac{kx'}{z'}\frac{l_x}{2}} \right) =$$

$$= \frac{2}{-kb - \frac{kx'}{z'}} \sin\left(-kb\frac{l_x}{2} - \frac{kx'}{z'}\frac{l_x}{2} \right) =$$

$$= \frac{l_x}{\frac{\pi x'}{\lambda_0 z'} l_x + \frac{\pi b}{\lambda_0} l_x} \sin\left(\frac{\pi x'}{\lambda_0 z'} l_x + \frac{\pi b}{\lambda_0} l_x \right) =$$

$$= l_x \operatorname{sinc}\left(\frac{x' l_x}{\lambda_0 z'} + \frac{b l_x}{\lambda_0} \right). \tag{24}$$

A sinc eltolása annak felel meg, hogy a kapott diffrakciós folt nem a tengelyben lesz:

$$\frac{x'}{\lambda_0 z'} l_x + \frac{b}{\lambda_0} l_x = 0 \ \rightarrow \ \frac{x'}{z'} = -\ \tan\alpha \cdot (n - 1) \tag{25}$$

Ami tökéletes összhangban van a törési törvénnyel, ha α annyira kicsi, hogy

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha\ \ [\mathrm{rad}]. \tag{26}$$