

Emlékeztető: az n-dimenziós sokaság görbültségét kifejező mennyiség a Riemann-tenzor (Riemann, 1854):

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}$$

ahol a $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ ún. konnexiós koefficiensek (vagy Christoffel-szimbólumok) a metrikus tenzor $g_{\alpha\beta}(x^{\gamma})$ komponenseiből kaphatók meg:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left[\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right]$$

ahol $g^{\alpha\sigma}$ a metrikus tenzor inverze.

A Riemann-tenzor tehát a metrikus tenzor első és **második deriváltjait** tartalmazza. (Mint ahogy 2D-ben a K Gauss-görbület is a metrikus tenzor első és **második deriváltjait** tartalmazza.)

1

Néhány új mennyiség:

Ricci-tenzor:

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^0{}_{\alpha 0\beta} + R^1{}_{\alpha 1\beta} + R^2{}_{\alpha 2\beta} + R^3{}_{\alpha 3\beta} = R^{\gamma}{}_{\alpha\gamma\beta}$$

Ricci-skalár:

$$R \equiv g^{00} R_{00} + g^{01} R_{01} + \dots + g^{33} R_{33} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$$

A Ricci-tenzorban és a Ricci-skalárban is a metrikus tenzor első és **második deriváltjai** szerepelnek (ha részletesen kiírjuk őket).

2

Az Einstein-egyenlet (az ált. rel. elm. alapegyenlete):

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad [E]$$

$T_{\alpha\beta}$: Az energia-impulzus tenzor a téridő adott pontjában (az adott eseményben).
Pl. vákuumban: $T_{\alpha\beta} = 0$.

[E] jelentése: „A tömeg előírja a téridőnek, hogyan görbüljön.“ (John Wheeler)

Általában: $T_{\alpha\beta}$ adott, és a $g_{\alpha\beta}$ metrikus tenzor komponensei az ismeretlenek.

→ [E]: 10 másodrendű, nemlineáris, csatolt differenciálegyenlet $g_{\alpha\beta}$ -ra.

Adott $T_{\alpha\beta}$ mellett (azaz adott téridő-geometria mellett) is *végtelen sok* megoldás van $g_{\alpha\beta}$ -ra. Ezek koordináta-transzformációval egymásba átszámolhatók.

[Pl. ugyanazt a téridőt írja le a Schwarzschild-metrika és a Painlevé-Gullstrand-metrika, csak más koordinátarendszert használva.]

Fordított probléma: „Tervezői téridő“ (Designer Spacetime). $g_{\alpha\beta}$ adott, és $T_{\alpha\beta}$ az ismeretlen. [Sokkal könnyebb matematikai feladat.]

3

A geodetikus egyenlet:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \quad [G]$$

[G] jelentése: „A téridő írja elő a tömegnek, hogyan mozogjon.“ (John Wheeler)

Adott $g_{\alpha\beta}$ esetén [G]-ből meghatározható, milyen $x^\alpha(\tau)$ világvonalat követ egy szabadon mozgó kő.

→ [G]: 4 másodrendű, nemlineáris, csatolt differenciálegyenlet $x^\alpha(\tau)$ -ra.

4

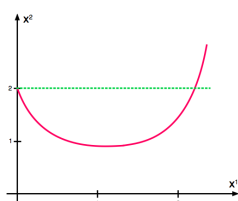
Megjegyzések az Einstein-egyenlet és a geodetikus egyenlet kapcsán:

(1) A [G] nem független az [E]-től, hanem levezethető belőle.

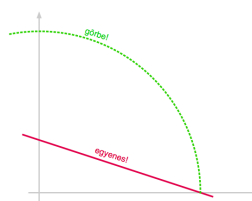
(2) Ha $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \neq 0$, akkor $\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} \neq 0$, tehát $\frac{dx^\alpha}{d\tau} \neq konst.$ Jelenti-e ez azt, hogy a

téridő görbült?

NEM! A görbület ($R^\alpha_{\beta\mu\nu}$) lehet zérus akkor is, ha $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \neq 0$.



← lehet pl. egy torzított térkép, amely egy síkot ábrázol



$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \Gamma^\gamma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\mu}$$

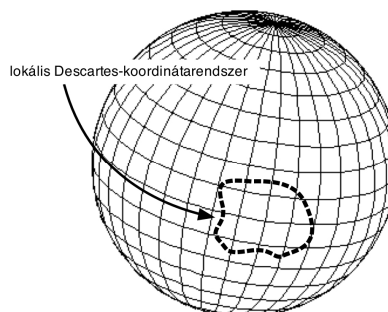
5

Megjegyzések az Einstein-egyenlet és a geodetikus egyenlet kapcsán:

(3) *Lokálisan* minden sokaságon felvehetők Descartes-koordináták (nagyon közelről nézve minden kicsi felületdarab „síknak látszik“). Ilyen koordináta-rendszerben $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$, tehát [G] alapján $dx^\alpha/d\tau = konst.$

Következik-e ebből, hogy sík a téridő?

NEM! A görbület ($R^\alpha_{\beta\mu\nu}$) lehet nemnulla akkor is, ha $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$.



$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \Gamma^\gamma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\mu}$$

6

Megjegyzések az Einstein-egyenlet és a geodetikus egyenlet kapcsán:

- (4) *Vákuumban* (pl. a Nap körül, egy fekete lyuk körül) $T_{\alpha\beta} = 0$. Jelenti-e ez azt ([E] alapján), hogy vákuumban a téridő sík? NEM!
- (a) Az [E]-ből nem következik, hogy $T_{\alpha\beta} = 0$ esetén muszáj, hogy $R_{\alpha\beta} = 0$ legyen.
- (b) Még ha $R_{\alpha\beta} = 0$ is, akkor is lehet a téridő görbült, mert a görbületet végső soron az $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ Riemann-tenzor írja le.

Fő konklúziók:

A téridő görbültségéről a Riemann-tenzor ad számot. *A Riemann-tenzor sem az [E]-ben, sem a [G]-ben nem jelenik meg explicit módon.*

Tehát tartsuk észben, hogy:

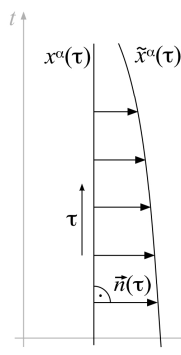
- (a) A téridő vákuumban is lehet görbült, ez nem mond ellent [E]-nek.
- (b) A [G] arról szól, hogy „néz ki” egy geodetikus egy adott koordináta-rendszerbeli „térképen”. De ez közvetlenül nem ad információt a görbületről.

7

Milyen egyenlet ad számot közvetlen módon a görbületről? [Milyen egyenletben szerepel explicit módon a Riemann-tenzor?]

A geodetikus deviáció egyenlete:

$$\left(\frac{d^2 \vec{n}}{d\tau^2}\right)^\alpha = -R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} n^\gamma u^\beta u^\delta \quad [D]$$



$x^\alpha(\tau), \tilde{x}^\alpha(\tau)$: egymáshoz közeli geodetikusok

$\vec{n}(\tau)$: „elválasztás-négyesvektor”

$$n^\alpha(\tau) \equiv \tilde{x}^\alpha(\tau) - x^\alpha(\tau)$$

$u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\tau}$: négyessebesség

[D] jelentése: *Két geodetikus milyen ütemben közeledik egymáshoz (vagy távolodik egymástól)*

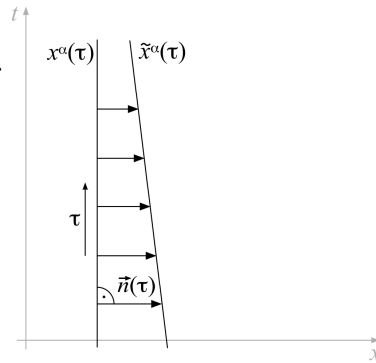
8

A geodetikus deviáció egyenlete:

$$\left(\frac{d^2 \vec{n}}{d\tau^2}\right)^\alpha = -R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} n^\gamma u^\beta u^\delta \quad [D]$$

1. példa: sík téridő

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 \vec{n}}{d\tau^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{n}}{d\tau} = konst.$$

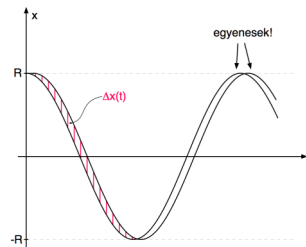
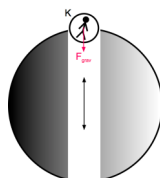


A geodetikus deviáció egyenlete:

$$\left(\frac{d^2 \vec{n}}{d\tau^2}\right)^\alpha = -R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} n^\gamma u^\beta u^\delta \quad [D]$$

2. példa: görbült téridő

$$\frac{d\vec{n}}{d\tau} \neq konst. \Leftrightarrow \frac{d^2 \vec{n}}{d\tau^2} \neq 0 \Leftrightarrow R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} \neq 0$$



gömbült 2D felület:

