

Optika gyakorlat 8.

Fraunhofer diffrakció

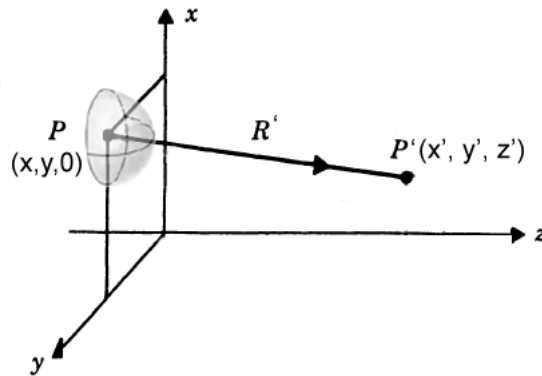
Diffrakciós modellek

A diffrakció során kialakuló téreloszlás felfogható végtelen sok folytonos eloszlású hullám fázishelyes szuperpozíciójaként:

- Pontforrásokra bontás: Huyghens-Fresnel-elv
- Síkhullámokra bontás: Fourier-optika

Huygens-Fresnel-elv

Az időfüggetlen, skalár hullámegyenlet, a Helmholtz-egyenlet megoldását keressük pontforrás és sík felületen elhelyezkedő apertúra esetén. Az apertúrára Kirchoff-határfeltételt feltételezünk, ahol az apertúrán belül a transzmisszió értéke 1, míg azon kívül 0, valamint az apertúrán kívül a térerősség parciális deriváltjai is eltűnnek. A pontforrás által kialakított tér a $P(x, y, z = 0)$ pontban $\tilde{E}_0(x, y, 0) = \frac{E_0}{R} \cdot e^{ikR}$.



1. ábra. Huygens-Fresnel-elv

A Helmholtz-egyenletből és a peremfeltételekből levezethető a Fresnel-Kirchoff diffrakciós integrál, mely meghatározza a térerősség értékét a $P'(x', y', z')$ pontban:

$$\tilde{E}(x', y', z') = -\frac{i}{\lambda} \iint E_0 \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \frac{e^{ikR'}}{R'} \cdot \frac{\cos\Theta' - \cos\Theta}{2} dx dy$$

ahol a Θ szög előjeles mennyiség. Tehát a Huygens-Fresnel-elvnek megfelelően az elektromos tér az (x', y') pontban felírható elemi gömbhullámok összegeként úgy, hogy az elemi gömbhullámokat koszinuszos iránykarakterisztikával kell figyelembe venni, és az elemi gömbhullámok nem az apertúrától haladnak az ernyő felé, hanem fordítva.

Ez a képlet ilyen formán azonban nehézkesen alkalmazható, ezért alkalmazzuk a következő közelítéseket az egyszerűsítés érdekében. Legyen az apertúra mérete lényegesen kisebb, mint a forrás és az ernyő apertúrától mért távolsága. Ennek következtében a koszinuszos tagok

eggyel közelíthetők $\cos\Theta \approx -1$, $\cos\Theta' \approx 1$, s így az egyenlet a következő alakra egyszerűsödik pontforrás közeltéri diffrakciója esetén:

$$\tilde{E}(x', y', z') = -\frac{i}{\lambda} \iint E_0 \cdot \frac{e^{ikR}}{R} \cdot \frac{e^{ikR'}}{R'} dx dy$$

Általános esetben, tetszőleges forrásra pedig kapjuk a Huygens-Fresnel elvnek megfelelő összefüggést:

$$\tilde{E}(x', y', z') = -\frac{i}{\lambda} \iint \tilde{E}(x, y, 0) \cdot \frac{e^{ikR'}}{R'} dx dy$$

Az integrál további egyszerűsítése érdekében újabb közelítést vezethetünk be:

$$R' = \sqrt{z'^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2} = z' \cdot \sqrt{1 + \frac{(x - x')^2}{z'^2} + \frac{(y - y')^2}{z'^2}}$$

Mivel $\frac{x - x'}{z'} \ll 1$ és hasonlóan $\frac{y - y'}{z'} \ll 1$, ezért:

$$R' \approx z' \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - x'}{z'} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - y'}{z'} \right)^2 \right]$$

Alkalmazzuk ezt a közelítést R' értékére az exponenciális kifejezésben, a nevezőben pedig legyen egyszerűen $R' \approx z'$:

$$\tilde{E}(x', y', z') = -\frac{i}{\lambda} \iint \tilde{E}(x, y, 0) \cdot \frac{e^{ik(z' \cdot [1 + \frac{1}{2} (\frac{x - x'}{z'})^2 + \frac{1}{2} (\frac{y - y'}{z'})^2])}}{z'} dx dy$$

Átalakítva az egyenletet kapjuk a Fresnel-közelítést:

$$\tilde{E}(x', y', z') = -\frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{ikz'}}{z'} \iint \tilde{E}(x, y, 0) \cdot e^{i \frac{k}{2z'} \cdot ((x-x')^2 + (y-y')^2)} dx dy$$

Tovább formálva az összefüggést:

$$\begin{aligned} \tilde{E}(x', y', z') &= -\frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{ikz'}}{z'} \iint \tilde{E}(x, y, 0) \cdot e^{i \frac{k}{2z'} \cdot (x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2)} dx dy \\ \tilde{E}(x', y', z') &= -\frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{ikz'} \cdot e^{i \frac{k}{2z'} (x'^2 + y'^2)}}{z'} \iint \tilde{E}(x, y, 0) \cdot e^{i \frac{k}{2z'} \cdot (x^2 + y^2 - 2xx' - 2yy')} dx dy \end{aligned}$$

A fenti integrál tovább egyszerűsíthető abban az esetben ha az apertúra mérete lényegesen kisebb az apertúra ernyőtől mért távolságánál: $x^2 + y^2 \ll z'\lambda$. Ekkor alkalmazva a $\frac{k \cdot (x^2 + y^2)}{z'} \approx 0$ közelítést kapjuk a távolféri diffrakcióra érvényes Fraunhofer-közelítést:

$$\tilde{E}(x', y', z') = -\frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{ikz'} \cdot e^{i \frac{k}{2z'} (x'^2 + y'^2)}}{z'} \iint \tilde{E}(x, y, 0) \cdot e^{-i \frac{k}{z'} \cdot (xx' + yy')} dx dy$$

Bevezetve az $f_x = \frac{x'}{\lambda z'}$ és az $f_y = \frac{y'}{\lambda z'}$ térfrekvenciákat a Fraunhofer-integrál egy kétdimenziós Fourier-transzformációként írható:

$$\tilde{E}(x', y', z') = -\frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{ikz'} \cdot e^{i \frac{k}{2z'} (x'^2 + y'^2)}}{z'} \iint \tilde{E}(x, y, 0) \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot (f_x x + f_y y)} dx dy$$

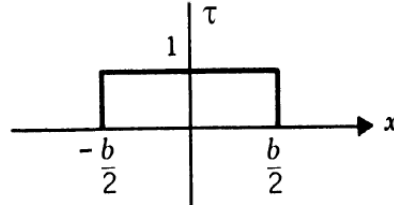
$$\tilde{E}(x', y', z') = -\frac{i}{\lambda} \cdot \frac{e^{ikz'} \cdot e^{i\frac{k}{2z'}(x'^2+y'^2)}}{z'} \cdot \mathcal{F}(\tilde{E}(x, y, 0))$$

ahol \mathcal{F} a Fourier-transzformációt jelöli. Ezek alapján távoltéri diffrakció esetén az $I(x', y', z') = |\tilde{E}(x', y', z')|^2$ intenzitás a következőképp számolható:

$$I(x', y', z') = \frac{1}{\lambda^2 z'^2} \cdot |\mathcal{F}(\tilde{E}(x, y, 0))|^2$$

1. példa: Rész távoltéri elhajlási képe

Határozzuk meg egy egydimenziós b szélességű az origóra szimmetrikus homogén módon megvilágított rész távoltéri diffrakciós képét!



2. ábra. Egy b szélességű origóra szimmetrikus egydimenziós rész transzmissziója

Megoldás: A rész transzmissziójának leírására használjuk a $rect(x)$ függvényt, melyre definíció szerint:

$$rect(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |x| < 1/2 \\ 1/2 & \text{ha } |x| = 1/2 \\ 0 & \text{ha } |x| > 1/2 \end{cases}$$

Jelen esetben tehát a b szélességű origóra szimmetrikus rész transzmissziója $\tau(x) = rect(\frac{x}{b})$.

A τ transzmissziós függvény általános esetben nem csak amplitúdó-, hanem fázis-modulációt is tartalmazhat, ekkor alakja:

$$\tilde{\tau} = |\tilde{\tau}| \cdot e^{i\delta}$$

ahol $|\tilde{\tau}|$ határozza meg az amplitúdó-modulációt és δ a fázistolást. Közel merőleges beesés és közel állandó lemezvastagság esetén a fázis-moduláció az alábbi képlet segítségével számolható:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)d$$

ahol n a lemez törésmutatója és $d(x, y)$ a vastagsága.

Távoltéri diffrakció esetén a kialakuló térerősség a következő Fourier-transzformációs integrál segítségével határozható meg:

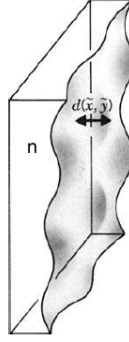
$$\mathcal{F} = \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x) \cdot E_0 \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot f_x x} dx$$

Felhasználva, hogy jelen esetben $\tau(x) = rect(x/b)$:

$$\mathcal{F} = \int_{-b/2}^{b/2} E_0 \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot f_x x} dx$$

Elvégezve az exponenciális függvény integrálását:

$$\mathcal{F} = \left[\frac{E_0}{-i \cdot 2\pi \cdot f_x} \cdot e^{-i \cdot 2\pi \cdot f_x x} \right]_{-b/2}^{b/2}$$



3. ábra. Egy n törésmutatójú $d(x,y)$ vastagságú átlatszó lemez fázistolása

$$\mathcal{F} = \frac{E_0}{-i \cdot 2\pi \cdot f_x} \cdot \left(e^{-i \cdot 2\pi \cdot f_x \cdot \frac{b}{2}} - e^{-i \cdot 2\pi \cdot f_x \cdot \frac{-b}{2}} \right)$$

$$\mathcal{F} = \frac{2i \cdot E_0}{i \cdot 2\pi \cdot f_x} \cdot \frac{e^{i \cdot 2\pi \cdot f_x \cdot \frac{b}{2}} - e^{-i \cdot 2\pi \cdot f_x \cdot \frac{b}{2}}}{2i}$$

Felhasználva, hogy tetszőleges ϕ valós számra $\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} = \sin\phi$:

$$\mathcal{F} = \frac{E_0}{\pi \cdot f_x} \cdot \sin(2\pi \cdot f_x \cdot \frac{b}{2})$$

$$\mathcal{F} = E_0 \cdot b \cdot \frac{\sin(\pi \cdot f_x \cdot b)}{\pi \cdot f_x \cdot b}$$

Vezessük be a $\text{sinc}(x)$ függvényt, mely definíció szerint $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. Ezt felhasználva a Fourier-transzformációs integrál:

$$\mathcal{F} = E_0 \cdot b \cdot \text{sinc}(f_x \cdot b)$$

A Fourier-transzformációs integrál ismeretében az intenzitás a következő képlet segítségével határozható meg:

$$I(x', z') = \frac{1}{\lambda^2 z'^2} \cdot |\mathcal{F}(\tilde{E}(x, 0))|^2$$

$$I(x', z') = \frac{1}{\lambda^2 z'^2} \cdot |E_0 \cdot b \cdot \text{sinc}(f_x \cdot b)|^2$$

$$I(x', z') = \frac{E_0^2 \cdot b^2}{\lambda^2 z'^2} \cdot \text{sinc}^2(f_x \cdot b)$$

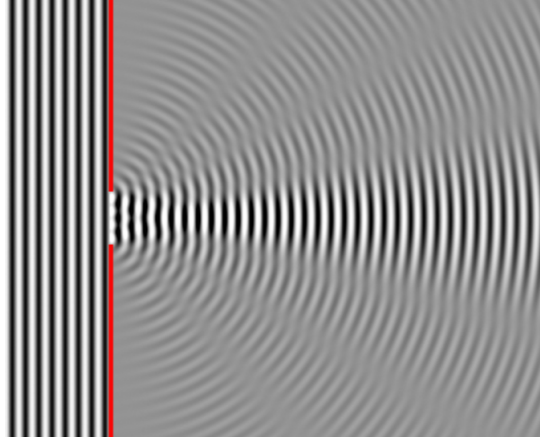
A kialakuló intenzitáseloszlást az alábbi ábra szemlélteti:

Felhasználva, hogy a térfrekvenciára $f_x = \frac{x'}{\lambda z'}$:

$$I(x', z') = \frac{E_0^2 \cdot b^2}{\lambda^2 z'^2} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{x' \cdot b}{\lambda z'}\right)$$

Az f_x térfrekvenciát az x' és z' koordináták helyett kifejezhetjük az ernyő adott pontjának origóból tekintett Θ látószögével is. Ekkor mivel $x' \ll z'$ érvényes a következő közelítés $\Theta \approx \sin\Theta \approx \text{tg}\Theta$, melyet felhasználva:

$$f_x = \frac{\sin\Theta}{\lambda}$$

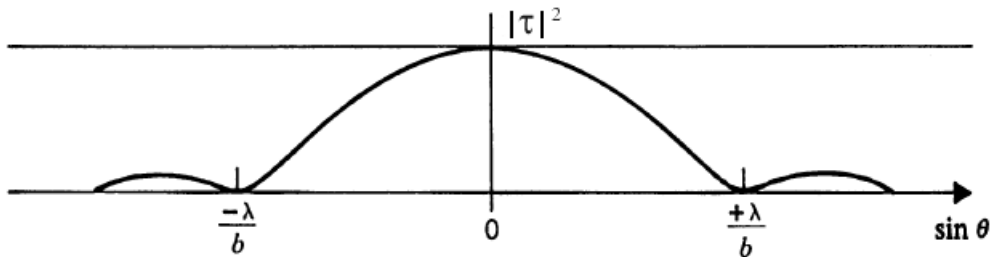


4. ábra. Egydimenziós rés által kialakított intenzitáseloszlás

Ezt felhasználva az intenzitás a látószög függvényében a következőképpen alakul:

$$I(\Theta) = \frac{E_0^2 \cdot b^2}{\lambda^2 z'^2} \cdot \text{sinc}^2\left(\sin\Theta \cdot \frac{b}{\lambda}\right)$$

A kialakuló intenzitáseloszlást a látószög szinuszának függvényében az alábbi ábra szemlélteti:



5. ábra. Egydimenziós rés által kialakított intenzitáseloszlás a látószög szinuszának függvényében

2. példa: Young-féle kétrés

Legyen a transzmissziós függvény két b szélességű ablakfüggvény egymástól a távolságra:

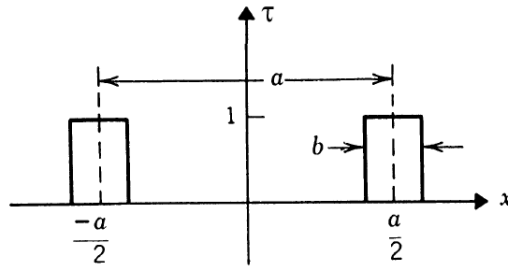
$$\tau(x) = \text{rect}\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{b}\right) + \text{rect}\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{b}\right)$$

A Fraunhofer diffrakciós képet a bejövő komplex amplitúdó Fourier-transzformáltja adja. Felhasználjuk a Fourier eltolásra kapott összefüggést:

Fourier-transzformáció eltolási tulajdonsága:

$$\mathcal{F}(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i2\pi f_x x} dx$$

$$\mathcal{F}(f(x - x_0)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x_0) e^{-i2\pi f_x x} dx = e^{-i2\pi f_x x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x_0) e^{-i2\pi f_x (x - x_0)} dx$$

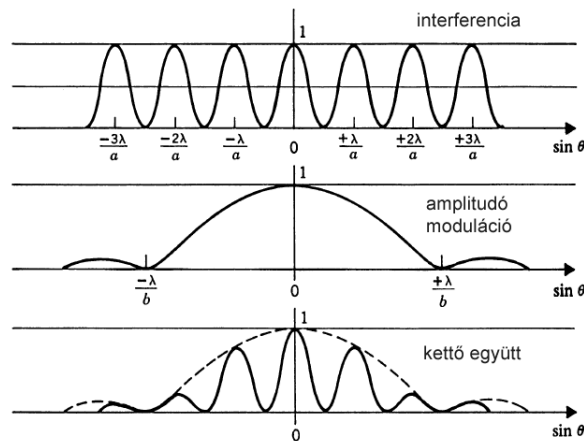


6. ábra. Young-féle kétrés

$$\rightarrow \mathcal{F}(f(x - x_0)) = e^{-i2\pi f_x x_0} \mathcal{F}(f(x))$$

$$T(f_x) = \mathcal{F}(\tau(x)) = b \cdot \text{sinc}(f_x b) \cdot (e^{-i2\pi f_x \frac{a}{2}} + e^{+i2\pi f_x \frac{a}{2}}) = b \cdot \text{sinc}(f_x b) \cdot 2 \cos(\pi f_x a)$$

$$\rightarrow I = \frac{E_0^2}{(\lambda z')^2} \cdot |T(f_x)|^2 = 4 \frac{E_0^2 b^2}{(\lambda z')^2} \cdot \frac{\sin^2(\pi f_x b)}{(\pi f_x b)^2} \cdot \cos^2(\pi f_x a) \quad , \text{ ahol } f_x = \frac{\sin \Theta}{\lambda}$$



7. ábra. Young-féle kétrés

3. példa: N db rés (rács) diffrakciós képe



8. ábra. N db rés

Legyen a transzmissziós függvény N db b szélességű ablakfüggvény egymástól a távolságra:

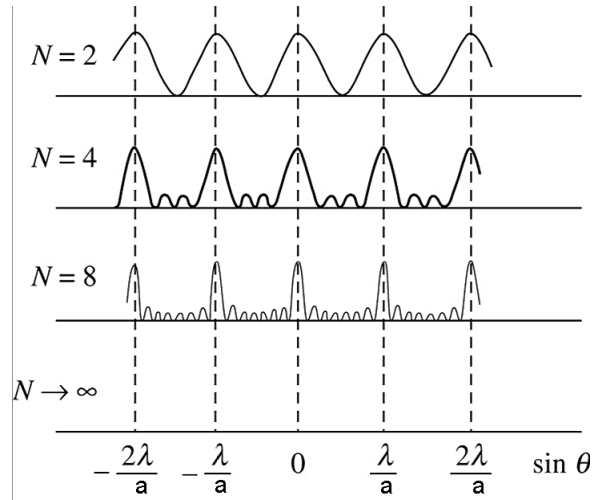
$$\tau(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \tau_1(x - x_n) \quad , \text{ ahol } \tau_1(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{b}\right) \quad \text{és} \quad x_n = n \cdot a$$

$$\rightarrow T(f_x) = T_1(f_x) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2\pi f_x n a} = T_1(f_x) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\delta} \quad , \text{ ahol } \delta = -2\pi f_x a$$

Ez egy N elemű mértani sorozat, $q = e^{i\delta}$ kvócienssel. Az összegre alkalmazzuk a mértani sorozat összegképletét:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{in\delta} = \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}} = \frac{e^{iN\delta/2}}{e^{i\delta/2}} \cdot \frac{e^{-iN\delta/2} - e^{iN\delta/2}}{e^{-i\delta/2} - e^{i\delta/2}} = e^{i(N-1)\delta/2} \cdot \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$$

Ennek a függvénynek az abszolút értékét ábrázolva kapjuk a "fésű" (comb) függvényt:



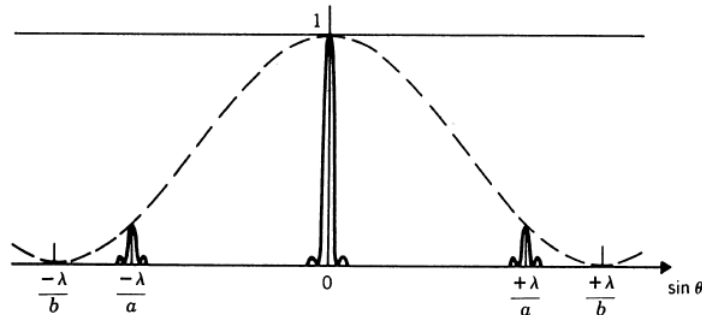
9. ábra. A fésű (comb) függvény alakja az N változó függvényében

Az intenzitás értékére kapjuk:

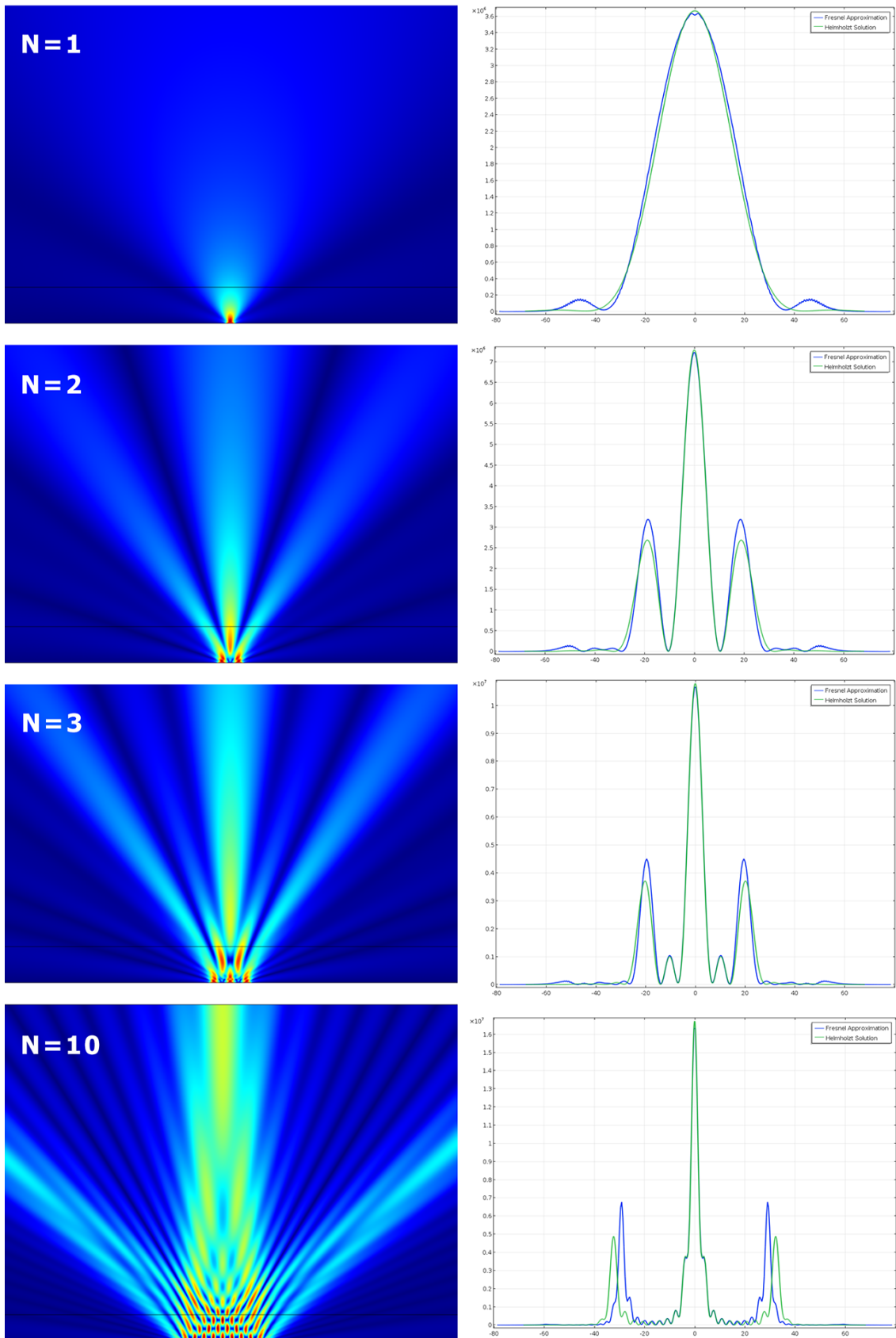
$$I = \frac{E_0^2}{(\lambda z')^2} \cdot |T(f_x)|^2 = \frac{E_0^2}{(\lambda z')^2} \cdot |T_1(f_x)|^2 \cdot \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} = \frac{E_0^2 b^2}{(\lambda z')^2} \cdot \frac{\sin^2(\pi f_x b)}{(\pi f_x b)^2} \cdot \frac{\sin^2(N\pi f_x a)}{\sin^2(\pi f_x a)}$$

, ahol

$$f_x = \frac{\sin\Theta}{\lambda}$$



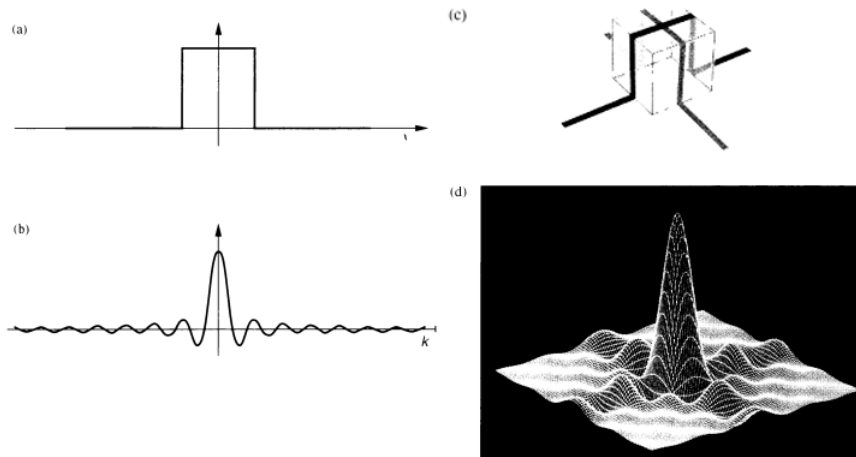
10. ábra. A rács eredő diffrakciós képe a fésű függvény és az amplitudó moduláció szorzata



11. ábra. Különböző sokrések (N) diffraktált intenzitás eloszlása és az ernyőn megjelenő intenzitás eloszlás (Helmholtz egyenlet és Fresnel közelítés) (Comsol Multiphysics)

4. példa: 2 dimenziós négyszög apertúra

Legyen a transzmissziós függvény egy 2D ablakfüggvény A és B oldalhosszúságokkal, benne a közepétől d távolságra egy rés kitakarás a és b oldalhosszúságokkal. Írjuk fel a rés Fraunhofer transzmissziós képét!



12. ábra. (a) kétdimenziós téglalap alakú rés kitakarással (b) egy hagyományos 2D négyzet alakú rés diffrakciós képe

Megoldás:

A transzmissziós függvény két ablakfüggvény különbségeként írható fel (a kitakarás egy inverz résként fogható fel):

$$\tau(x) = \tau_1(x) - \tau_2(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{A}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{B}\right) - \text{rect}\left(\frac{x-d}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right)$$

A Fraunhofer diffrakciós képet a bejövő komplex amplitudó Fourier-transzformáltja adja. Felhasználjuk a Fourier eltolásra kapott összefüggést:

$$T_1(f_x, f_y) = \mathcal{F}(\tau_1(x)) = A \cdot \text{sinc}(f_x A) B \text{sinc}(f_y B)$$

$$T_2(f_x, f_y) = \mathcal{F}(\tau_2(x)) = a \cdot \text{sinc}(f_x a) b \text{sinc}(f_y b) \cdot e^{-i2\pi f_x d}$$

, ahol

$$f_x = \frac{\sin\Theta_x}{\lambda}, \quad f_y = \frac{\sin\Theta_y}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{E_0^2}{(\lambda z')^2} \cdot |T_1 - T_2|^2 = \frac{E_0^2}{(\lambda z')^2} \cdot (|T_1|^2 + |T_2|^2 - T_1^* T_2 - T_1 T_2^*) = \\ &= \frac{E_0^2}{(\lambda z')^2} \cdot (A^2 B^2 \cdot \text{sinc}^2(f_x A) \text{sinc}^2(f_y B) + a^2 b^2 \cdot \text{sinc}^2(f_x a) \text{sinc}^2(f_y b) + \\ &\quad - ABab \cdot \text{sinc}(f_x A) \text{sinc}(f_y B) \text{sinc}(f_x a) \text{sinc}(f_y b) \cdot (e^{-i2\pi f_x d} + e^{+i2\pi f_x d})) \end{aligned}$$

, ahol

$$e^{-i2\pi f_x d} + e^{+i2\pi f_x d} = 2 \cos(2\pi f_x d)$$