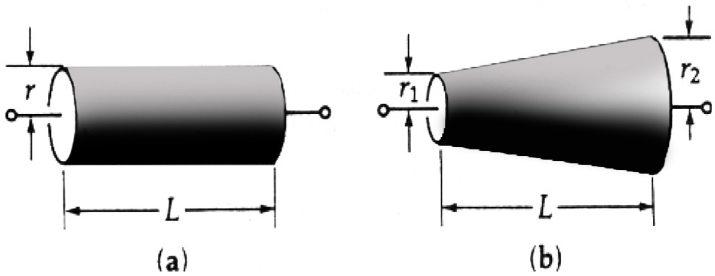
1. fejezet

Gyakorlat 3

1.1. 28C-41

A 1.1 ábrán két, azonos anyagból gyártott ellenállás látható. A véglapokat vezető réteg-



gel vonták be. Tételezzük fel, hogy az ellenállások belsejében az áramsűrűség bármely, a tengelyre merőleges síkmetszet mentén állandó nagyságú. Mutassuk meg, bogy a két ellenállás azonos nagyságú, ha a henger r sugara egyenlő a csonkakúp r_1, és r_2 sugarának mértani közepével, azaz $r = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$. Útmutatás: a R ellenállás nagyságának kiszámításakor számítsuk ki a tengelyszimmetrikus, dx vastagságú, $y = r_1 + (r_2 - r_1) \cdot x/L$ sugarú vékony körlemezek átellenes lapjai közötti dR ellenállást. A teljes ellenállást ezen elemi ellenállások segítségével, integrálassal kaphatjuk meg.)

Megoldás:

Osszuk fel a csonkakúp alakú ellenállást párhuzamos dx vastagságú rétegekre! Egy ilyen, az r_1 sugarú, a fedőlaptól x távolságra levő korong sugara, felülete, illetve ellenállása

$$r(x) = r_1 + \frac{(r_2 - r_1)\cdot x}{L} \tag{1.1}$$

$$A(x) = r^2(x)\cdot\pi \tag{1.2}$$

$$dR(x) = \rho\cdot\frac{dx}{A(x)} = \rho\cdot\frac{dx}{r^2(x)\pi} \tag{1.3}$$

A teljes ellenállás ezért

$$R = \rho\cdot\int_0^L \frac{dx}{r^2(x)} \tag{1.4}$$

A legegyszerűbben akkor járunk el, ha az x szerinti integrálásról áttérünk az $r(x)$ szerinti integrálásra. (1.1) alapján

$$dr = d\left(r_1 + \frac{(r_2 - r_1)\cdot x}{L}\right) = \frac{r_2 - r_1}{L}\cdot dx \Rightarrow dx = \frac{L}{r_2 - r_1}\,dr$$

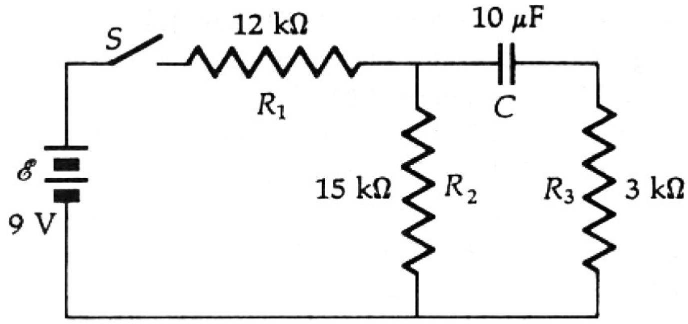
ezért

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho\cdot L}{\pi\,(r_2 - r_1)}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \\ &= \frac{\rho\cdot L}{\pi\,(r_2 - r_1)}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} \\ &= \frac{\rho\cdot L}{\pi\,(r_2 - r_1)}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \\ &= \frac{\rho\cdot L}{\pi\,(r_2 - r_1)}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1\cdot r_2}\right) = \\ &= \frac{\rho\cdot 1}{\pi\, r_2\cdot r_1} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Ez viszont valóban megegyezik egy olyan egyenes henger alakú rúd ellenállásával, amelynek sugara $r' = \sqrt{r_1\cdot r_2}$.

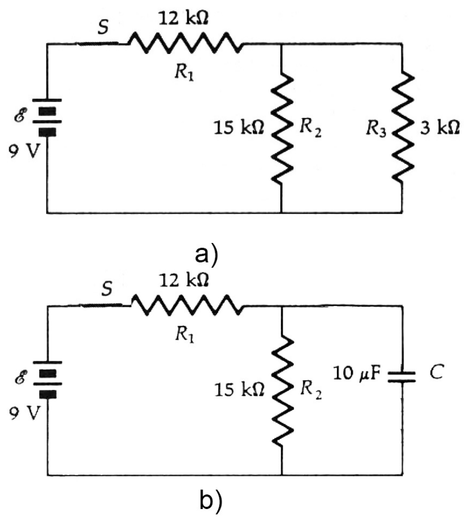
1.2. 29C-62

Tekintsük a 1.2 áramkört. Kezdetben a kondenzátoron nincs töltés; a $t = 0$ időponthan az S kapcsolót zárjuk. a) Készítsünk táblázatot, amely az egyes áramköri elemeken folyó áramerősségek (i_{12}, i_{15} és i_c) és a rajtuk létrejövô feszültségesések (u_{12}, u_{15}, és u_c) kezdeti (közvetlenül t = 0 utáni) értékét foglalja össze. b) Készítsünk egy másik táblázatot is, a fenti mennyiségek stacionárius értékeivel.



Megoldás:

Mielőtt a kapcsolót zárnánk a kondenzátoron nem volt feszültség. A kapcsoló zárásakor a kondenzátor feszültsége nem változhat meg ugrásszerűen, ezért továbbra is 0 marad, vagyis olyan a helyzet, mintha a kondenzátor helyett egy rövidzár lenne. Ezért a kapcsolás ebben a pillanatban ekvivalens a 1.1 a) ábráján láthatóval.



1.1. ábra. helyettesítő kapcsolások az 1.2 feladathoz

Ennek az áramkörnek az ellenállása $R(t=0) = R_1 + \dfrac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 19,74\,k\Omega$ Az R_1

ellenálláson átfolyik a teljes áram, ezért

$$\begin{aligned}
i_{12} \equiv i_{R_1} &= \frac{U}{R(t=0)} = \frac{R_2 + R_3}{R_2 \cdot R_3} \cdot U = 1,350 \cdot 10^{-3}\, A \\
u_{12} \equiv u_{R_1} &= R_1 \cdot i_{R_1} = 5,471\, V \\
u_{15} \equiv u_{R_2} &= U - u_{R_1} = 3,529\, V \\
i_{15} \equiv i_{R_2} &= \frac{u_{R_2}}{R_2} = 2,353 \cdot 10^{-4}\, A \\
u_c &= 0V \\
i_c = i_{R_3} &= \frac{u_{R_3}}{R_3} = \frac{u_{R_2}}{R_3} = 1,176 \cdot 10^{-3} A
\end{aligned}$$

Stacionárius állapotban a kondenzátort tartalmazó ágban nem folyik áram és a kondenzátor teljesen fel van töltve, ezért a kondenzátor feszültsége megegyezik az R_2 ellenálláson eső feszültséggel (tehát az R_3 ellenállás sarkai között nincs potenciálkülönbség.) Ld. 1.1 b) ábra. A körben folyó áram viszont lecsökken, mert az eredő ellenállás most $R_{stac} = R_1 + R_2 = 27\, k\Omega$ és csak ezen a két ellenálláson folyik át áram.

$$\begin{aligned}
i_{12} \equiv i_{R_1} &= \frac{U}{R(stac)} = \frac{U}{R_2 + R_3} = 3,333 \cdot 10^{-4}\, A \\
u_{12} \equiv u_{R_1} &= R_1 \cdot i_{R_1} = 4\, V \\
u_{15} \equiv u_{R_2} &= U - u_{R_1} = 6\, V \\
i_{15} \equiv i_{R_2} &= i_{R_1} = 3,333 \cdot 10^{-4}\, A \\
u_c &= u_{15} = 6\, V \\
i_c &= 0
\end{aligned}$$

1.3. 30A-7

A magnetron a radar-oszcillátorok egy tipusa. A radar által kisugárzott mikrohullám frekvenciáját a magnetron mágneses erőterében keringő elektronok ciklotron-frekvenciája szabja meg. Becsüljük meg, milyen mágneses fluxussűrűség szükséges 3 cm-es hullámhosszúságú mikrohullámok előállitásához.

Megoldás:

A homogén mágneses térben az elektron a tér irányára merőleges síkban körpályán mozog[1] A körpályán tartást az elektronra ható Lorentz erő biztosítja, ezért

$$
\begin{aligned}
F_L &= F_{cp} \\
e \cdot |\mathbf{v} \times \mathbf{B}| &= \frac{m_e \cdot v^2}{r} \\
e \cdot v \cdot B &= \frac{m_e \cdot v^2}{r} \\
\frac{e \cdot B}{m_e} &= \frac{v}{r}
\end{aligned}
$$

De $\frac{v}{r} \equiv \omega$ a keringő elektron körfrekvenciája. Az elektron keringési frekvenciája tehát

$$
f = \frac{\omega}{2\,\pi} = \frac{e \cdot B}{2\,\pi\, m_e} \tag{1.6}
$$

A mikrohullám fénysebességgel terjed, frekvenciája megegyezik az elektron „rezgési" frekvenciájával:

$$
\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\,\pi\, m_e \cdot c}{e \cdot B} \tag{1.7}
$$

ahonnan

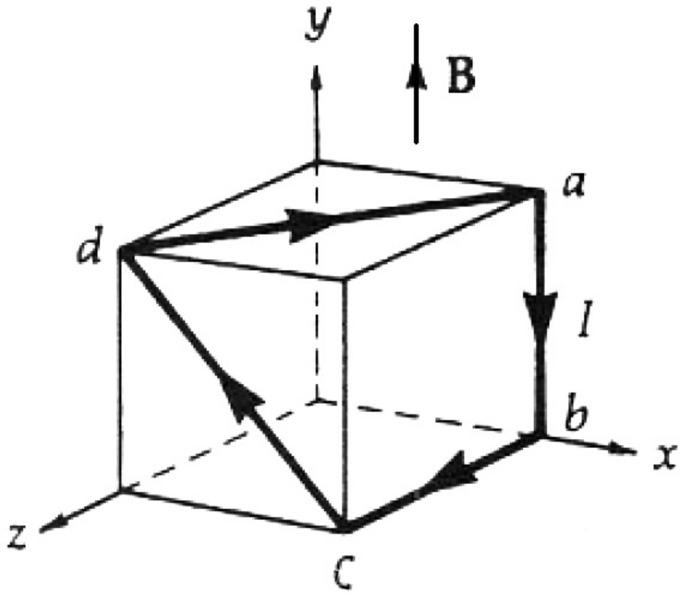
$$
\begin{aligned}
B = \frac{2\,\pi\, m_e \cdot c}{e \cdot \lambda} &= \frac{2 \cdot 3,141 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \cdot 2,998 \cdot 10^{8}}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,03} \\
&= 0,357 \cdot \frac{kg \cdot m}{s \cdot C \cdot m} = 0,357 \cdot \frac{kg\frac{m}{s^2} \cdot m}{A \cdot m^2} = 0,357 \cdot \frac{N \cdot m}{A \cdot m^2} \\
&= 0,357 \cdot \frac{J}{A \cdot m^2} = 0,357 \cdot \frac{W \cdot s}{A \cdot m^2} = 0,357 \cdot \frac{V \cdot A \cdot s}{A \cdot m^2} = 0,357 \cdot \frac{V \cdot s}{m^2} = 0,357\, T
\end{aligned}
$$

1.4. 30B-18

A 1.4 ábrán bemutatott kocka 40 cm élhosszúságú. A négy egyenes szakaszból (ab,bc,cd és da) álló dróthurkon $I = 5$ A erősségű (áram folyik. Az y tengely pozitív irányában $B = 0,02$ T fluxussűrűségű homogén mágneses erőtér hat. Készítsünk táblázatot, melyben a fenti sorrendben az egyes huzalszakaszokra ható) erők nagyságát és irányát foglaljuk össze.

Megoldás:

[1] Későbbiekben látni fogjuk, hogy egy gyorsuló töltés energiát sugároz, ezért külső energia betáplálása nélkül az elektron egyre nagyobb sugarú körpályára térne át.



Egy egyenes vezetőre **B** fluxussűrűségű homogén mágneses térben ható erőt az

$$\mathbf{F} = I\,(\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}), \qquad F = I\,\ell\,B\,sin\,\alpha(\boldsymbol{\ell}, \mathbf{B})$$

képlet adja meg, ahol $\boldsymbol{\ell}$ az áram irányába mutató vektor melynek hossza megegyezik az egyenes vezető szakasz hosszával és $\alpha(\boldsymbol{\ell}, \mathbf{B})$ a szakasz és **B** közötti szög. $|\boldsymbol{\ell}|$ helyére tehát a következőket kell beírni: $|\boldsymbol{\ell}_{ab}| = |\boldsymbol{\ell}_{bc}| = A$, $|\boldsymbol{\ell}_{cd}| = |\boldsymbol{\ell}_{da}| = \sqrt{2} \cdot A$, ahol $A = 0,4\,m$ a kocka élhossza. Az egyes irányított szakaszok **B** vel bezárt szögei: $\alpha_{ab} = 180^o$, $\alpha_{bc} = 90^o$, $\alpha_{cd} = 45^o$ és $\alpha_{da} = 90^o$. Az egyes szakaszokra ható erők nagyságai és irányai:

$F_{ab} = 0,$

$F_{bc} = I \cdot A \cdot B = 5 \cdot 0,4 \cdot 0,02 = 0,04\,N$ $\qquad -x$ irányú

$F_{cd} = \sqrt{2} \cdot I \cdot A \cdot B \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = I \cdot A \cdot B = 0,04\,N$ $\qquad -z$ irányú

$F_{da} = \sqrt{2} \cdot I \cdot A \cdot B = 0,052N$ $\qquad +x$ és $+z$ tengellyel 45^o szöget bezáró irányú

1.5. 30C-51

Szigetelő anyagból keszült R sugarú korong egyik oldalán a felületmenti homogén töltéssűrűség nagysága σ. A korongot tengelye körül ω szögsebességgel forgatjuk. Mutassuk meg hogy mágneses dipólusmomentuma $\omega \cdot \sigma \cdot \pi R^4/4$. (Útmutatás: Számítsuk ki az r sugarú, dr széles körgyűrűn levő töltések mozgásából származó mágneses erőteret. Használhatjuk a $p_m = I\,\mathbf{A}$ - (30-14) egyenletet.)

Megoldás:

A korongon levő töltések mindegyike a korong tengelye körüli körpályán mozog, tehát egy köráramnak felel meg. Minden köráramnak van mágneses momentuma, ezért a forgó korongnak is. Bontsuk fel a korong felületét koncentrikus dr szélességű körgyűrűkre. Egy r sugarú I erősségű köráram mágneses momentumának nagysága $p_m = I \cdot A = I \cdot r^2\,\pi$. Esetünkben a középponttól r és $r + dr$ távolságban található $dQ = \sigma\,2\,\pi\,r\,dr$ nagyságú töltések $dI(r)$ árama:

$$dI(r) = \frac{dQ}{T} = \frac{dQ}{2\,\pi/\omega} = \frac{\omega\,dQ}{2\,\pi} = \frac{2\,\pi\,\omega\,\sigma\,r\,dr}{2\,\pi} = \omega\,\sigma\,r\,dr$$

Egy ilyen köráram dp_m mágneses momentuma

$$p_m = dI \cdot A(r) = dI \cdot r^2\,\pi = \omega\,\sigma\,r^3\,\pi\,dr$$

A teljes körlap mágneses momentuma tehát

$$p_m = \omega\,\sigma\,\pi \int_0^R r^3\,dr = \omega\,\sigma\,\pi\,\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\omega\,\sigma\,\pi\,R^4}{4} \tag{1.8}$$

1.6. 31B-6

Egy R sugarú, köralakú vezetőhurokban I áram folyik. A hurok tengelyén, a huroktól milyen x távolságban van az a pont, ahol a mágneses fluxussűrűség, éppen fele a hurok középpontjában mérhetőnek? Felhasználhatjuk a1.7 feladat eredményét is.

Megoldás:

Menjen át a koordinátarendszer x tengelye a hurok középpontján merőlegesen a korong síkjára. A 1.7 feladat eredménye szerint x távolságban a hurok középpontjától

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mu_o \cdot I}{2}\right)\frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot \mathbf{x}$$

ahol $\mathbf{x}$ a $+x$ irányú egységvektor. Az x távolságban a tengelyen mérhető térerősség aránya a hurok középpontjában ($x = 0$) mérhetőhöz:

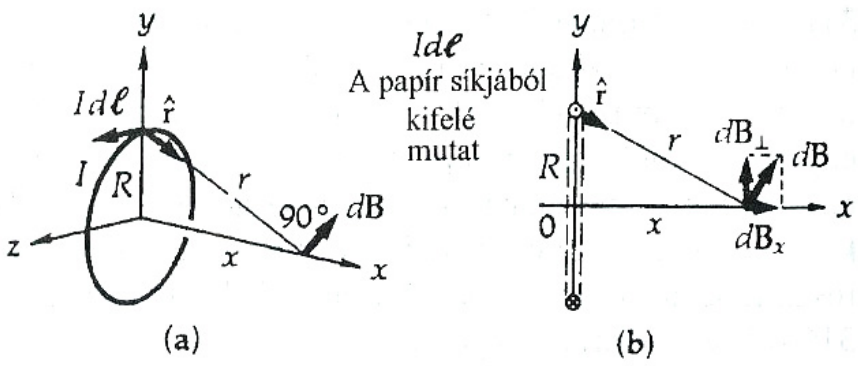
$$\frac{|B(x)|}{|B(0)|} = \frac{\frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}}{\frac{R^2}{(R^2)^{3/2}}} = \frac{R^3}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

Ez akkor 1/2, ha

$$\frac{R^3}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}$$
$$2\,R^3 = (x^2+R^2)^{3/2}$$
$$2^{2/3}\,R^2 - R^2 = x^2$$
$$x = \pm\,(2^{2/3}-1)\cdot R = \pm 0,587\,R$$

1.7. 31C-17

A 1.7 ábrán vázolt R sugarú hurokban I áram folyik. Mutassuk meg, hogy a hurok



tengelyén, a hurok sikjától x távolságban

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_o \cdot I}{2}\right)\frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot \mathbf{x}$$

(Útmutatás: Mi történik az x tengelyre merőleges $d\mathbf{B}_\perp$ komponensekkel az Idt elemi áramtól származó $d\mathbf{B}$ elemi mágneses indukcióvektorok összegzése során?)

Megoldás:

Osszuk fel a hurkot a 1.7 a) ábra szerint $d\boldsymbol{\ell}$ darabokra. Az egy ilyen darabkától származó mágneses tér a Biot-Savart törvény szerint

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\,\pi}\cdot\frac{I\,d\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{r}}{|r|^3}$$

Minden elemi szakasz ugyanakkor nagyságú, de más irányú elemi $d\mathbf{B}$ -t hoz létre. A 1.7 b) ábrán látható, hogy $d\mathbf{B}$ felbontható egy az x tengellyel párhuzamos $d\mathbf{B}_{||}$ és egy arra merőleges $d\mathbf{B}_\perp$ komponensre. A hurok mentén átellenesen elhelyezkedő elemi szakaszoktól származó mágneses fluxussűrűségek $d\mathbf{B}_\perp$ komponensi pont ellentétes irányúak, így kiejtik egymást, azonos nagyságú $d\mathbf{B}_{||}$ komponenseik pedig összeadódnak. Ez azt jelenti, hogy az eredő $\mathbf{B}$ térnek csak x irányú komponense lesz, a pozitív tengelyen pozitív, a negatív tengelyen negatív irányú, tehát a tér párhuzamos lesz az x irányú egységvektorral $\mathbf{x}$-szel. Az egy szakasztól származó $d\mathbf{B}_{||}$ nagysága $dB_{||} = B\, sin\alpha$, ahol α az x és r közötti szög. Felhasználva, hogy $\mathbf{r}$ és $\boldsymbol{\ell}$ merőlegesek :

$$
\begin{aligned}
dB_{||} &= \frac{\mu_o}{4\,\pi} \cdot \frac{I\,|d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{r}|}{|r|^3} \cdot sin\,\alpha \\
&= \frac{\mu_o}{4\,\pi} \cdot \frac{I\,d\ell \cdot r}{|r|^3} \cdot sin\,\alpha \\
&= \frac{\mu_o}{4\,\pi} \cdot \frac{I\,d\ell}{|r|^2} \cdot sin\,\alpha
\end{aligned}
$$

Mivel $r = \sqrt{x^2 + R^2}$

$$
sin\,\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}
$$

amivel

$$
dB_{||} = \frac{\mu_o}{4\,\pi} \cdot \frac{I\,R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \ell \tag{1.9}
$$

A teljes B tér az elemi szakaszok $dB_{||}$ járulékainak összege. Nagysága:

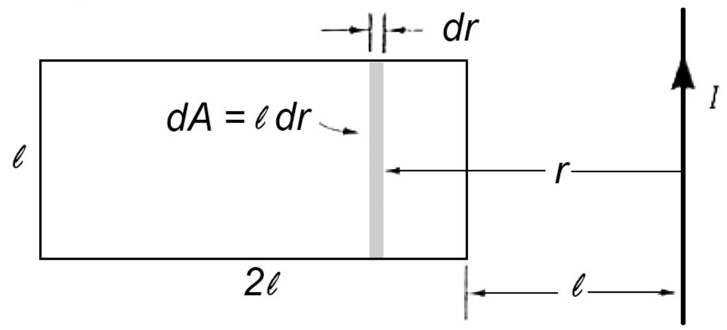
$$
\begin{aligned}
B &= \frac{\mu_o}{4\,\pi} \cdot \frac{I\,R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \int_0^{2\,r\,\pi} d\ell \\
&= \frac{\mu_o}{4\,\pi} \cdot \frac{I\,R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot [\ell]_0^{2\,r\,\pi} \\
&= \frac{\mu_o}{4\,\pi} \cdot \frac{I\,R}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2\,R\,\pi \\
&= \frac{\mu_o}{2} \cdot \frac{I\,R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \qquad (1.10)
\end{aligned}
$$

Az irányt is figyelembe véve

$$
\mathbf{B} = \left(\frac{\mu_o \cdot I}{2}\right) \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \mathbf{x} \tag{1.11}
$$

1.8. 31B-9

A 1.8 ábrán látható, téglalap alakú vezetőhurok és a hosszúsúgú, egyenes vezető azonos sikban fekszik. A vezetőhurok ellenállása $2\,\Omega$. Számítsuk ki a hurok teljes felületén átha-



ladó mágneses fluxust, ha az egyenes vezetőn I áram halad át. (Útmutatás: Válasszunk ki egy $dA = \ell dr$ felületelemet, és számítsuk ki a $d\Phi_B$, fluxust ezen a felületelemen, majd integrálással számítsuk ki a teljes fluxust.)

Megoldás:

Osszuk fel a felületet dr szélességű sávokra! Egy ilyen sáv mentén a mágneses fluxussűrűség konstansnak tekinthető. Az egyenes vezetőtől r távolságban a B mágneses fluxussűrűség nagysága

$$B = \mu_o \cdot \frac{I}{2\,\pi\,r}$$

így a dr széles és ℓ hosszú sávra vett elemi $d\Phi$ fluxus

$$d\Phi = B(r) \cdot dA = B(r) \cdot \ell \cdot dr = \mu_o \cdot \frac{I\,\ell\,dr}{2\,\pi\,r}$$

A teljes hurkon áthaladó fluxus az elemi fluxusok összege, ami integrálként írható fel.

$$\Phi = \mu_o \cdot \frac{I\,\ell}{2\,\pi} \int_{\ell}^{3\,\ell} \frac{1}{r}\,dr = \mu_o \cdot \frac{I\,\ell}{2\,\pi}\,[ln\,r]_{\ell}^{3\,\ell} = \mu_o \cdot \frac{I\,\ell}{2\,\pi}\,ln\,\frac{3\,\ell}{\ell} = \mu_o \cdot \frac{I\,\ell}{2\,\pi}\,ln\,3 \qquad (1.12)$$